Zad 18.

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^3}$

Koristimo granični test konvergencije, tj. cilj je usporediti s redom $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

$a_n=\frac{(\ln n)^2}{n^3}$, $b_n=\frac{1}{n^2}$, uočimo $a_n,b_n\geq 0$

Gledamo $\lim_n \frac{a_n}{b_n}=\lim_n\frac{\frac{(\ln n)^2}{n^{3}}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_n\frac{(\ln n)^2}{n}\overset{L'H}{=}\lim_n\frac{2\ln n\frac1n}{1}$

$=2\lim_n\frac{\ln n}{n}\overset{L'H}{=}2\lim_n\frac{\frac1n}{1}=0$

Jer je $\lim_n\frac{a_n}{b_n}=0$ (to znači da je $a_n<<b_n$) i red $\sum_{n=1}^\infty b_n$ je konvergentan slijedi po graničnom testu da je $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergentan. //

d) $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n^3\ln n}$

Gornji red sigurno konvergira jer smo ranije pokazali da $\sum_{n=1}^\infty\frac{(\ln n)^2}{n^3}<+\infty$.

$a_n:=\frac{1}{n^3\ln n}$, $b_n=\frac{(\ln n)^2}{n^3}$

Probajte za DZ napraviti usporedni kriterij za $\sum_{n=2}^\infty c_n$, gdje je $c_n=\frac{1}{n^3}$. Općenito znamo da red $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}<\infty$ akko $p\in\langle1,+\infty\rangle$

Jer je $1\leq(\ln n)^3$ za $n\geq3$

$\Rightarrow \frac{1}{\ln n}\leq(\ln n)^2 \;/\cdot\frac{1}{n^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{n^3\ln n}\leq\frac{(\ln n)^2}{n^3}$

$\Rightarrow a_n\leq b_n$ za $n\geq3$

Po usporednom testu jer je red $\sum_{n=2}^\infty b_n<\infty$, time je i $\sum_{n=2}^\infty a_n<\infty$, dakle red konvergira.

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^5+2n+3}}{n^4+1}$

Ovaj tip zadatka je najbrže riješiti koristeći granični test.

$\sqrt{n^5+2n+3}\approx n^{\frac52}$ ako je n jako velik

$n^4+1\approx n^4$ ako je n jako veliki.

Dakle za $a_n=\frac{\sqrt{n^5+2n+3}}{n^4+1}$ odaberemo niz $b_n=\frac{n^{\frac52}}{n^4}=\frac{1}{n^{1.5}}=\frac{1}{\sqrt{n^3}}$

Vidimo da je $\lim_n\frac{a_n}{b_n}=\lim_n\frac{\frac{\sqrt{n^5+2n+3}}{n^4+1}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}}=\lim_n\frac{\sqrt{n^8+2n^4+3n^3}}{n^4+1}\;\begin{matrix}:n^4\\:n^4\end{matrix}$

$=\lim_n\frac{\left(1+\frac{2}{n^4}+\frac{3}{n^5}\right)^{\frac12}}{1+\frac{1}{n^4}}=1\in\langle0,+\infty\rangle$

$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^{1.5}}$ je konvergentan (jer je $p=1.5>1$) red pa po graničnom testu red $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira.

f) $\sum_{n=1}^\infty\underbrace{\frac{\cos n}{n^2+n-5}}_{=:a_n}$

Ako pokažemo da je gornji red apsolutno konvergentan, onda je i nužno konvergentan ($\sum_{n=1}^\infty|a_n|<+\infty\Rightarrow\sum_{n=1}^\infty a_n<\infty$)

$|a_n|=\frac{|\cos n|}{|n^2+n-5|}\leq\frac{1}{0.5n^2}=:b_n$

$|\cos n|\leq1$

$0.5n^2\leq n^2+n-5$

$\Leftrightarrow 0\leq0.5n^2+n-5$

$\Leftrightarrow 0\leq n^2+2n-5=(n+1)^2-6$

$\Leftrightarrow 6\leq(n+1)^2$ To vrijedi za $n\geq2$

Jer je za $n\geq2$ $0.5n^2\leq n^2+n-5$

specijalno je i $0.5n^2\leq|n^2+n-5|$

$\Rightarrow\frac{1}{|n^2+n-5|}\leq\frac{1}{0.5n^2}$ za $n\geq2$

$\Rightarrow\frac{|\cos n|}{|n^2+n-5|}\leq\frac{1}{|n^2+n-5|}\leq\frac{1}{0.5n^2}$ za $n\geq2$

Pokazali smo da je $|a_n|\leq b_n$ za $n\geq2$ te jer je red $\sum_{n=2}^\infty b_n$ konvergentan, po usporednom kriteriju konvergentan je $\sum_{n=2}^\infty|a_n|$

Apsolutna konvergencija reda povlači običnu, tj. $\sum_{n=1}^\infty a_n<+\infty$ čime je početni red konvergentan. //

Dokaz izgleda dugačko? Općenito to ispada ako pokušavate koristiti samo jedan kriterij.
$\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}<+\infty$ prema poznatom rezultatu.
Jer je $\lim_n\frac{\frac{1}{n^2+n-5}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_n\frac{n^2}{n^2+n-5}=\lim_n\frac{1}{1+\frac1n-\frac{5}{n^2}}=1\in\langle0,+\infty\rangle$
Prema graničnom testu red $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2+n-5}$ je konvergentan jer je $\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^2}$ konvergentan.
$\frac{|\cos n|}{|n^2+n-5|}\overset{n\geq2}{=}\frac{|\cos n|}{n^2+n-5}\overset{\forall n\in\mathbb{N}}{\leq}\frac{1}{n^2+n-5}$
pa po usporednom kriteriju imamo da je red $\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{\cos n}{n^2+n-5}\right|$ konvergentan. Time je i $\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n}{n^2+n-5}$ konvergentan. //

g) $\sum_{n=1}^\infty\underbrace{\frac{n}{\sin n}}_{=:a_n}$

Red je dobro definiran, zaista $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
Za neki $n\in\mathbb{N}$ $n=k\pi$ povlači da je $\pi=\frac{n}{k}\in\mathbb{Q}$.
π nije racionalan broj (TEŠKO ZA DOKAZATI) pa po tome ne postoji $n\in\mathbb{N}$ sa svojstvom $n=k\pi$.

DODATNO

Za gornji red možemo naslutiti da je divergentan, pa pretpostavimo suprotno, da je niz konvergentan.

Ako je niz konvergentan, nužno je $\lim_n a_n=0$.

Specijalno je $\lim_n|a_n|=0$.

S druge strane jer je $|\sin n|\leq n$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow\frac{n}{|\sin n|}\geq1$, $\forall n\in\mathbb{N}$

Dakle, $\liminf_n|a_n|=\liminf_n\frac{n}{|\sin n|}\geq1$ što je kontradikcija s time da je $\lim_n|a_n|=0$. //

Napomena: $\lim_n\sin(n)$ nije definiran, tj. može se pokazati da za svaki $\ell\in[-1,1]$ postoji podniz $p:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ takav da $\lim_n\sin(p(n))=\ell$

DODATNO

Zadatak 19.

g) $\sum_{n=1}^\infty\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{=:a_n}$

Gledamo $q=\lim_n\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_n\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_n\frac{\frac{(n+1)n!}{(n+1)^n(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}}$

$=\lim_n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}$

$=\lim_n\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n}\right)^n}_{\to e^{-1}}\cdot\underbrace{\left(\frac{n}{n-1}\right)}_{\to 1}=e^{-1}=\frac1e<1$

POZNATI REZULTAT

Koristimo da je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

Jer je $q<1$ znamo da po D'Alembertovom kriteriju je red konvergentan. //

19 a) $\sum_{n=1}^\infty\underbrace{\frac{n^{10}}{3^n}}_{=:a_n}$

Cauchyev test konvergencije

$q=\lim_n\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_n\sqrt[n]{\frac{n^{10}}{3^n}}=\lim_n\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}}{3}=\frac13<1$

Koristimo da je $\lim_n\sqrt[n]{n}=1$

POZNATI REZULTAT

Jer je $q<1$ red konvergira.

DZ: Zadatak 18 opišite koristi Cauchyev test ili D'Alembertov, tj. u većini podzadataka mogu se koristiti oba.

Zadatak 21.

b) $\sum_{n=1}^\infty\underbrace{\frac{1}{n^p}}_{=:a_n}$

Definiramo $f:[1,+\infty\rangle\to[0,+\infty\rangle$, $f(x)=x^{-p}$, $p\in\langle0,\infty\rangle$

Vrijede svi uvjeti za integralni test: f je nenegativna, padajuća i neprekidna te vrijedi $f(n)=a_n$.

$\int_1^{+\infty}f(x)dx=\lim_{H\to\infty}\int_1^H f(x)dx=\lim_{H\to\infty}\int_1^H x^{-p}dx$

$\overset{p\neq1}{=}\lim_{H\to\infty}\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^H=\lim_{H\to\infty}\left(\frac{1}{1-p}H^{1-p}-\frac{1}{1-p}\right)$

Ako je $p>1$ limes je konačan pa nepravi integral postoji te time je i red $\sum a_n$ konvergentan po integralnom kriteriju.

Ako je $p\in\langle0,1\rangle$ nepravi integral divergira pa time i red.

Za $p=1$ $\lim_{H\to\infty}\int_1^H x^{-1}dx=\lim_{H\to\infty}\ln x\Big|_1^H=\lim_{H\to\infty}\ln H=+\infty$

nepravi integral divergira pa time i red.

Ovime smo pokazali da je $\sum\frac{1}{n^p}<+\infty\Leftrightarrow p>1$. !

c) $\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n\ln^2n}$

$f:[2,+\infty\rangle\to\langle0,+\infty\rangle$, $f(x)=\frac{1}{x\ln^2x}$

f nenegativna, monotono pada i vrijedi $f(n)=a_n$, $n\geq2$.

$\int_2^\infty\frac{1}{x\ln^2x}dx=\lim_{H\to\infty}\int_2^H\frac{1}{x\ln^2x}dx\quad\left[\begin{matrix}u=\ln x\\du=\frac{dx}{x}\end{matrix}\right]$

$=\lim_{H\to\infty}\int_{\ln2}^{\ln H}\frac{1}{u^2}du=\lim_{H\to\infty}-\frac{1}{u}\Big|_{\ln2}^{\ln H}$

$=\lim_{H\to\infty}\left(-(\ln H)^{-1}+(\ln2)^{-1}\right)<\infty$

Red je konvergentan po integralnom kriteriju. //

Napomena: 18 d) i 18 e) je lakše riješiti koristeći integralni kriterij. Napravite za DZ.

Zadatak 20.

a) $\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n}{2^n+\sin n}$

$\ell=\lim_n\frac{\frac{1}{2^n+\sin n}}{\frac{1}{2^n}}=\lim_n\frac{2^n}{2^n+\sin n}=\lim_n\frac{1}{1+\frac{\sin n}{2^n}}=1$

Po graničnom kriteriju budući je $\ell\in\langle0,\infty\rangle$ red $\sum\frac{1}{2^n+\sin n}$ konvergira jer je $\sum\frac{1}{2^n}$ konvergentan (Zbroj geometrijskog reda $\sum\frac{1}{2^n}=1$)

$|\cos n|\leq1\Rightarrow\frac{|\cos n|}{|2^n+\sin n|}\leq\frac{1}{|2^n+\sin n|}$

pa po usporednom kriteriju red $\sum_{n=1}^\infty\frac{|\cos n|}{|2^n+\sin n|}$ je konvergentan.

Time je $\sum_{n=1}^\infty\frac{|\cos n|}{|2^n+\sin n|}<+\infty$, odnosno je i $\sum_{n=1}^\infty\frac{\cos n}{2^n+\sin n}$ konvergentan.