Rješenja zadataka s izbornog natjecanje za Vojtěch Jarník

29.02.2008.

I. kategorija

1. Najprije primijetimo da za nul-polinom $p = 0$ imamo

$$F(0) = \sup \{|\cos(4\pi x)| : \ x \in [0,1]\} = 1.$$

Tvrdimo da nul-polinom minimizira funkciju F. Štoviše, dokazat ćemo da je vrijednost $F(p)$ minimalna (s iznosom 1) ako i samo ako je $p = 0$.

Pretpostavimo je $p \in \mathcal{P}_3$ takav da je $F(p) \leq 1$. Za $i = 0, \ldots, 4$ stavimo $x_i := \frac{i}{4}$. Tada je

$$\cos(4\pi x_i) = 1, \text{ za } i = 0,2,4 \quad \text{te} \quad \cos(4\pi x_i) = -1, \text{ za } i = 1,3.$$

Iz $F(p) \leq 1$ slijedi $|1 - p(x_i)| \leq 1$, za $i = 0,2,4$ te $|-1 - p(x_i)| \leq 1$, za $i = 1,3$. Stoga je

$$p(x_i) \geq 0, \text{ za } i = 0,2,4 \quad \text{te} \quad p(x_i) \leq 0, \text{ za } i = 1,3. \tag{1}$$

Neka je Δ operator diferencije s korakom $\frac{1}{4}$,

$$\Delta p(x) := p\Big(x + \frac{1}{4}\Big) - p(x).$$

Kako je $\deg p \leq 3$, imamo $\Delta^4 p = 0$. Specijalno je i

$$0 = \Delta^4 p(0) = p(x_4) - 4p(x_3) + 6p(x_2) - 4p(x_1) + p(x_0)$$

$$= [p(x_4) - p(x_3)] + 3[p(x_2) - p(x_3)] + 3[p(x_2) - p(x_1)] + [p(x_0) - p(x_1)].$$

Zbog (1) je svaki od izraza u uglatim zagradama nenegativan, pa je nužno

$$p(x_0) = p(x_1) = p(x_2) = p(x_3) = p(x_4) = 0.$$

Kako je $\deg p \leq 3$ mora biti $p = 0$.

2. Kako bismo konstruirali traženu particiju, koristimo dekadski prikaz prirodnog broja $n = c_k 10^k + c_{k-1}10^{k-1} + \cdots + c_0$. Definiramo skupove $A = \{n : \ 0 = c_1 = c_3 = c_5 = \ldots\}$ i $B = \{n : \ 0 = c_0 = c_2 = \ldots\}$. Odgovarajuća particija je oblika $T_1 = \{1\} \cup \{1+n : \ n \in A\}$, $T_{k+1} = \{b_k + n : \ n \in T_1\}$, gdje je $b_1, b_2, \ldots$ niz svih elemenata iz B. Sada je očito da se svaki $x \in \mathbb{N}$ može (na jedinstven način) zapisati na jedan od sljedećih načina:

$$x = 1, \quad x = 1 + a \ (a \in A), \quad x = 1 + b \ (b \in B), \quad x = 1 + a + b \ (a \in A, b \in B).$$

3. Primjetimo da za brojeve $c \neq 0$ i d te n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ koje zadovoljavaju uvjete zadatka, i n-torke $(ca_1 + d, ca_2 + d, \ldots, ca_n + d)$ i $(cb_1 + d, cb_2 + d, \ldots, cb_n + d)$ također zadovoljavaju iste uvjete. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dvije n-torke prirodnih brojeva.

Neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Definiramo polinome (funkcije izvodnice):

$$E_A(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{a_i} \quad \text{i} \quad E_B(x) = \sum_{i=1}^{n} x^{b_i}.$$

Imamo

$$(E_A(x))^2 = \sum_{k=1}^{n} x^{2a_k} + 2 \sum_{1\le i<j\le n} x^{a_i+a_j} = E_A(x^2) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} x^{a_i+a_j} \quad \text{i}$$

$$(E_B(x))^2 = E_B(x^2) + 2 \sum_{1\le i<j\le n} x^{b_i+b_j}.$$

Budući da se nizovi

$$a_1 + a_2,\ a_1 + a_3,\ \dots,\ a_{n-1} + a_n \quad \text{i} \quad b_1 + b_2,\ b_1 + b_3,\ \dots, b_{n-1} + b_n$$

podudaraju do na permutaciju, vrijedi

$$\sum_{1\le i<j\le n} x^{a_i+a_j} = \sum_{1\le i<j\le n} x^{b_i+b_j}.$$

Zato je

$$(E_A(x))^2 - (E_B(x))^2 = E_A(x^2) - E_B(x^2).$$

Kako su neuređene n-torke A i B različite, $E_A(x) - E_B(x) \neq 0$, pa je

$$E_A(x) + E_B(x) = \frac{(E_A(x))^2 - (E_B(x))^2}{E_A(x) - E_B(x)}.$$

Primjetimo da je $E_A(1) = E_B(1) = n$, tj. $x = 1$ je korijen polinoma $E_A(x) - E_B(x)$, pa možemo pisati

$$E_A(x) - E_B(x) = (x-1)^k f(x),$$

gdje je $f(x)$ polinom koji nije djeljiv s $x-1$, odnosno $f(1) \neq 0$. Sada je $E_A(x^2)-E_B(x^2) = (x^2-1)^k f(x^2)$, pa slijedi

$$E_A(x) + E_B(x) = \frac{(x^2-1)^k f(x^2)}{(x-1)^k f(x)} = \frac{(x+1)^k f(x^2)}{f(x)}.$$

Uvrstimo li $x = 1$ u gornju jednakost, dobivamo

$$2n = E_A(1) + E_B(1) = \frac{2^k f(1)}{f(1)} = 2^k,$$

tj. $n = 2^{k-1}$ čime je dokaz završen.

4. Najprije ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju koju ćemo iskazati u obliku leme.

Lema 1 *Za svaku matricu* $C \in M_n(\mathbb{R})$ *vrijedi* $\det(I + C^2) \geq 0$, *gdje je sa* I *označena jedinična matrica u* $M_n(\mathbb{R})$

Dokaz: Primijetimo da za kompleksnu matricu $D = (d_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ vrijedi

$$\det \overline{D} = \overline{\det D},$$

gdje je sa sa $\overline{D}$ označena matrica dobivena iz D konjugiranjem njenih vrijednosti, $\overline{D} = (\overline{d_{ij}})$. Zaista, imamo

$$\det \overline{D} = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{1\le i\le n} \overline{d_{i\sigma(i)}} = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{1\le i\le n} d_{i\sigma(i)}} = \overline{\det D}.$$

Koristeći tu činjenicu zajedno sa Binet-Cauchyjevim teoremom, imamo

$$\det(I + C^2) = \det((I + iC)(I - iC)) = \det(I + iC)\det(I - iC)$$
$$= \det(I + iC)\det(\overline{I + iC}) = \det(I + iC)\overline{\det(I + iC)} = |\det(I + iC)|^2 \geq 0.$$

$\square$

Vratimo se sada tvrdnji zadatka. Promotrimo sljedeća dva slučaja u ovisnosti o parnosti broja $k \in \mathbb{N}$.

Neka je k paran, $k = 2m$ za neko $m \in \mathbb{N}$. U ovom slučaju tvrdnja zadatka vrijedi i bez pretpostavke da je $\det(A + B) \geq 0$. Zaista, budući da je spektar od B konačan, možemo naći $\varepsilon > 0$ takav da je matrica $B_\delta := \delta I + B$ invertibilna, za svako $0 < \delta < \varepsilon$. Tada imamo

$$\det(A^{2m}+B_\delta^{2m}) = \det(B_\delta^{2m}(B_\delta^{-2m}A^{2m}+I)) = (\det B_\delta)^{2m} \det((A^m B_\delta^{-m})^2+I) \geq 0,\ \forall \delta \in \langle 0, \varepsilon \rangle.$$

Zato je i

$$\det(A^{2m} + B^{2m}) = \lim_{\delta \to 0^+} \det(A^{2m} + B_\delta^{2m}) \geq 0.$$

Neka je k neparan, $k = 2m+1$ za neko $m \in \mathbb{N}$. Označimo sa $z_0, z_1, \ldots, z_{2m}$ sve kompleksne nultočke polinoma $z^{2m+1} + 1$, gdje smo oznake izabrali tako da je $z_0 = -1$ te $z_{j+m} = \overline{z_j}$, za sve $j = 1, \ldots, n$. Budući da matrice A i B komutiraju, imamo

$$A^{2m+1} + B^{2m+1} = (A + B) \prod_{1 \leq j \leq m} (A - z_j B)(A - \overline{z_j} B).$$

Konačno, kako su A i B realne matrice, imamo

$$\det(A^{2m+1} + B^{2m+1}) = \det(A + B) \prod_{1 \leq j \leq m} [\det(A - z_j B) \det(A - \overline{z_j} B)]$$

$$= \det(A+B) \prod_{1 \leq j \leq m} [\det(A - z_j B) \det(\overline{A - z_j B})] = \det(A+B) \prod_{1 \leq j \leq m} |\det(A - z_j B)|^2 \geq 0.$$

Rješenja zadataka s izbornog natjecanje za Vojtěch Jarník

29.02.2008.

II. kategorija

1. Stavimo $n := 2008$ i označimo sa $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathcal{P}_n$ izomorfizam vektorskih prostora definiran formulom

$$\Phi(\vec{a})(x) := a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n+1} x^n, \quad \text{za sve } \ \vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Trebamo dokazati da postoji konstanta $C > 0$ takva da za svaki vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ vrijedi

$$|\Phi(\vec{a})(1)\Phi(\vec{a})'(1) - \Phi(\vec{a})(-1)\Phi(\vec{a})'(-1)| \leq C \int_{-1}^{1} \Phi(\vec{a})(x)^2 \, dx.$$

Neka je $\vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ proizvoljan vektor. Ako je $\vec{a} = 0$ tvrdnja je trivijalno zadovoljena za svaku konstantu $C > 0$. Ako je $\vec{a} \neq 0$ stavimo

$$F(\vec{a}) := \frac{|\Phi(\vec{a})(1)\Phi(\vec{a})'(1) - \Phi(\vec{a})(-1)\Phi(\vec{a})'(-1)|}{\int_{-1}^{1} \Phi(\vec{a})(x)^2 \, dx}.$$

Budući da za svaki polinom P vrijedi

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 \, dx = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P = 0,$$

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to [0, +\infty\rangle, \quad F : \vec{a} \mapsto F(\vec{a})$$

je dobro definirana neprekidna funkcija.

Nadalje, F je homogena funkcija stupnja nula, tj. vrijedi

$$F(t\vec{a}) = F(\vec{a}), \quad \text{za sve } \ \vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \ \text{ i } \ t > 0. \tag{2}$$

Budući da je jedinična sfera S^n kompaktan podskup od $\mathbb{R}^{n+1}$, te kako je restrikcija $F\,|_{S^n}$ neprekidna funkcija, možemo naći konstantu $C > 0$ takvu da je $F(\vec{a}) \leq C$ za sve $\vec{a} \in S^n$. Konačno, zbog (2) je i

$$F(\vec{a}) \leq C, \quad \text{za sve } \ \vec{a} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\},$$

čime je tvrdnja zadatka u potpunosti dokazana.

2. Takva funkcija f ne postoji. U protivnom, ako takva funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ postoji, tada za sve $q \in \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{N}$ možemo naći otvoreni interval $I_{q,n}$ oko q takav da vrijedi

$$|f(x)| > n, \quad \text{za sve } x \in I_{q,n} \setminus \{q\}. \tag{3}$$

Stavimo

$$U := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} I_{q,n}.$$

U je G_δ-skup budući da je svaki od skupova $U_n := \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} I_{q,n}$ otvoren, kao unija otvorenih intervala.

Tvrdimo da je $U = \mathbb{Q}$. Očito je $\mathbb{Q} \subset U$. Kada bi postojao $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap U$, prema (3) i definiciji skupa U, vrijedilo bi

$$|f(x)| > n, \quad \text{za svako} \;\; n \in \mathbb{N},$$

što je nemoguće, jer je prema pretpostavci domena od f čitav skup $\mathbb{R}$.

Odavde slijedi da je skup $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva G_δ-skup što je u kontradikciji sa **Baire-ovim teoremom o kategoriji**:

Teorem 2 (Baire) *Neka je (X, d) potpun metrički prostor i pretpostavimo da je $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija otvorenih i gustih podskupova od X. Tada je i presijek $O := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ gust podskup od X.*

Naime, pretpostavimo da $\mathbb{Q}$ zaista jest G_δ-skup,

$$\mathbb{Q} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

gdje su $U_n \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni podskupovi od $\mathbb{R}$. Također primijetimo da je skup iracionalnih brojeva $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ očito G_δ-skup, jer uz oznaku $W_q := \mathbb{R} \setminus \{q\}$, za sve $q \in \mathbb{Q}$, imamo

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}} W_q.$$

Kako je svaki od skupova $U_n \cap W_q$ otvoren i gust u $\mathbb{R}$, te kako je $\mathbb{R}$ sa standardnom euklidskom metrikom potpun metrički prostor, Baireov teorem o kategoriji povlači da je presijek

$$O := \bigcap_{(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} (U_n \cap W_q)$$

gust podskup od $\mathbb{R}$, što je nemoguće, budući da je $O = \emptyset$.

3. Najprije primijetimo da je R polje. Budući da je prsten R komutativan, dovoljno je dokazati da svaki ne-nul element iz R ima desni inverz u R.

   Zaista, za proizvoljan $x \in R \setminus \{0\}$ možemo naći prirodne brojeve $m, n \in \mathbb{N}$ takve da je $(x^m + 1)^n = x$. Koristeći binomni teorem, imamo

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{mj} = x \quad \Longrightarrow \quad x\left(1 - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{mj-1}\right) = 1.$$

   Dakle, x je invertibilan s inverzom $x^{-1} = 1 - \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} x^{mj-1}$.

   Uzmimo sada proizvoljan $\varphi \in \mathrm{End}(R) \setminus \{0\}$. Trebamo pokazati da je φ bijekcija.

   Injektivnost od φ slijedi trivijalno, jer je $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$. Naime, prema dokazanom R je polje, a u polju nema pravih ideala. Kako je $\varphi \neq 0$, mora biti $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$.

   Dokažimo da je φ surjekcija. Neka je $y \in R \setminus \{0\}$. Tada postoje $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $(y^m + 1)^n = y$. Neka je $P(X) \in R[X]$ polinom definiran formulom

$$P(X) := (X^m + 1)^n - X.$$

Kako je R polje, skup nultočaka $N(P)$ polinoma $P(X)$ u R je konačan. Također, $\mathrm{N}(P)$ je invarijantan obzirom na φ, tj. vrijedi

$$\varphi(\mathrm{N}(P)) \subseteq \mathrm{N}(P).$$

Naime, kako je R polje, imamo $\varphi(1) = 1$. Nadalje, za $x \in \mathrm{N}(P)$ imamo $P(x) = 0$, što povlači

$$P(\varphi(x)) = (\varphi(x)^m + 1)^n - \varphi(x) = \varphi((x^m + 1)^n - x) = \varphi(P(x)) = \varphi(0) = 0.$$

Dakle, restrikcija $\varphi\mid_{\mathrm{N}(P)}\colon \mathrm{N}(P) \to \mathrm{N}(P)$ je injekcija, a kako je $\mathrm{N}(P)$ konačan skup, $\varphi\mid_{\mathrm{N}(P)}\colon \mathrm{N}(P) \to \mathrm{N}(P)$ je bijekcija. Budući da je $y \in \mathrm{N}(P)$, slijedi da možemo naći $z \in \mathrm{N}(P)$ takav da je $y = \varphi(z)$. Dakle, $y \in \operatorname{Im}\varphi$, tj. φ je surjekcija.

4. Rješenje zadatka izložit ćemo u tri koraka.
1.) Pokažimo da ako zabranimo transformacije trojke x_n, x_1, x_2, možemo izvršiti samo konačan broj transformacija. Pogledajmo kako će se mijenjati brojevi $S_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_i$ $(1 \le i \le n)$. Kada izvodimo transformaciju na trojci x_{k-1}, x_k, x_{k+1} imamo sljedeće:
ako je $1 < k < n$, onda je transformacija dopuštena samo ako je $S_k < S_{k-1}$ i nakon transformacije dolazi do zamjene S_{k-1} i S_k;
ako je $k = n$, onda je transformacija dopuštena samo ako je $S_n < S_{n-1}$ i u tom slučaju se n-torka $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ mijenja u $(S_1 + x_n, S_2 + x_n, \ldots, S_{n-2} + x_n, S_n + x_n, S_{n-1} + x_n)$.
Dakle, svaka transformacija trojke x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, gdje je $1 < k \le n$, smanjuje *broj inverzija* u n-torci $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$, tj. broj parova indeksā (i, j) takvih da je $1 \le i < j \le n$ i $S_i > S_j$. Ovo dokazuje tvrdnju o konačnosti broja transformacija u slučaju kada je indeks $k = 1$ zabranjen.
2.) Pronađimo padajuću nenegativnu valuacijsku funkciju, tj. funkciju koja će svakoj n-torci $(x_1, \ldots, x_n)$ pridružiti nenegativan realan broj i vrijednost funkcije će strogo opadati nakon svake transformacije iz zadatka. Funkciju (poučeni prethodnim iskustvima) tražimo u obliku:

$$J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x_1 x_{1+k} + x_2 x_{2+k} + \cdots + x_n x_{n+k}),$$

(gdje je $x_{n+j} = x_j$ za $j = 1, 2, \ldots, n-1$) s konstantama $p_k = p_{n-k}$. Imamo

$$\begin{aligned} J(x_1 + x_2, -x_2, x_3 + x_2, x_4, \ldots, x_n) - J(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = 2x_2\big((p_0 - 2p_1 + p_2)(x_1 + x_2 + x_3) + (p_3 - 2p_2 + p_1)x_4 \\ + (p_4 - 2p_3 + p_2)x_5 + \cdots + (p_{n-1} - 2p_{n-2} + p_{n-3})x_n\big) \\ = 2x_2 c \cdot S, \quad (4) \end{aligned}$$

ako je $c = p_2 - 2p_1 + p_0 = p_3 - 2p_2 + p_1 = \cdots = p_{n-1} - 2p_{n-2} + p_{n-3}$. (S obzirom na simetriju, nije potrebno promatrati ostale transformacije.) Prethodni niz identiteta vrijedi ako i samo ako je niz $p_1 - p_0$, $p_2 - p_1$, $\ldots$, $p_{n-1} - p_{n-2}$ aritmetički niz s razlikom c, tj. $p_k - p_{k-1} = p_1 - p_0 + (k-1)c$ $(1 \le k \le n-1)$, iz čega sumiranjem dobivamo

$$p_k = p_0 - k(p_0 - p_1) + \frac{k(k-1)}{2}c \quad (0 \le k \le n-1).$$

Uvrštavanjem $p_1 = p_{n-1}$, dobivamo $p_0 - p_1 = \frac{n-1}{2}c$, pa je

$$p_k = p_0 - \frac{k(n-k)}{2}c \quad (0 \le k \le n-1).$$

Provjerite da p_k definirani prethodnom formulom zadovoljavaju sva trazena svojstva. Ako izaberemo proizvoljni $p_0 \in \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}_+$, tada uvrštavanjem u definicijsku formulu vidimo da dobivamo padajuću valuacijsku funkciju J. Pitamo se još je li J nenegativna funkcija za neki par p_0, c. Primjerice, ako stavimo

$$p_0 = \frac{n^2+n}{2} \quad \text{i} \quad c = 2, \quad \text{onda je} \quad p_k = \binom{n-k+1}{2} + \binom{k+1}{2} \text{ za sve } k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

i

$$J = S_1 + S_2 + \cdots + S_n, \quad \text{pri čemu je} \quad S_j = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{i+1} + \cdots + x_{i+j-1})^2 \geq 0 \text{ za } 1 \leq j \leq n.$$

3.) Pretpostavimo da tvrdnja zadatka ne vrijedi, tj. da postoji beskonačan iteracijski niz. Iz koraka 2. slijedi da pripadni beskonačni niz valuacija n-torki našeg iteracijskog niza opada i ograničen je, pa konvergira broju L. Dakle, možemo odabrati iteracijski član sa valuacijom J_0 koja zadovoljava $L < J_0 < L + \frac{4S^2}{n}$ i izbaciti sve prethodne članove. Zato bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da ove nejednakosti zadovoljava već početna n-torka $(x_1, \ldots, x_n)$. Iz jednakosti (4) slijedi da beskonačni niz koji se sastoji od negativnih centralnih članova x_k, x'_k, x''_k, ... svih transformiranih trojki zadovoljava

$$(-x_k) + (-x'_k) + (-x''_k) + \cdots = \frac{1}{4S}(J_0 - L) < \frac{S}{n}. \tag{5}$$

Najveći od brojeva $x_1, \ldots, x_n$ u početnoj n-torci nije manji od $\frac{S}{n}$; neka je, primjerice, $x_1 \geq \frac{S}{n}$. Iz (5) vidimo da će na mjestu od x_1 u svakom trenutku biti nenegativan broj. Zato je indeks $k = 1$ zabranjen u smislu prvog koraka ovog rješenja, pa nužno moramo imati konačan broj transformacija, što je kontradikcija.