Deltaedri

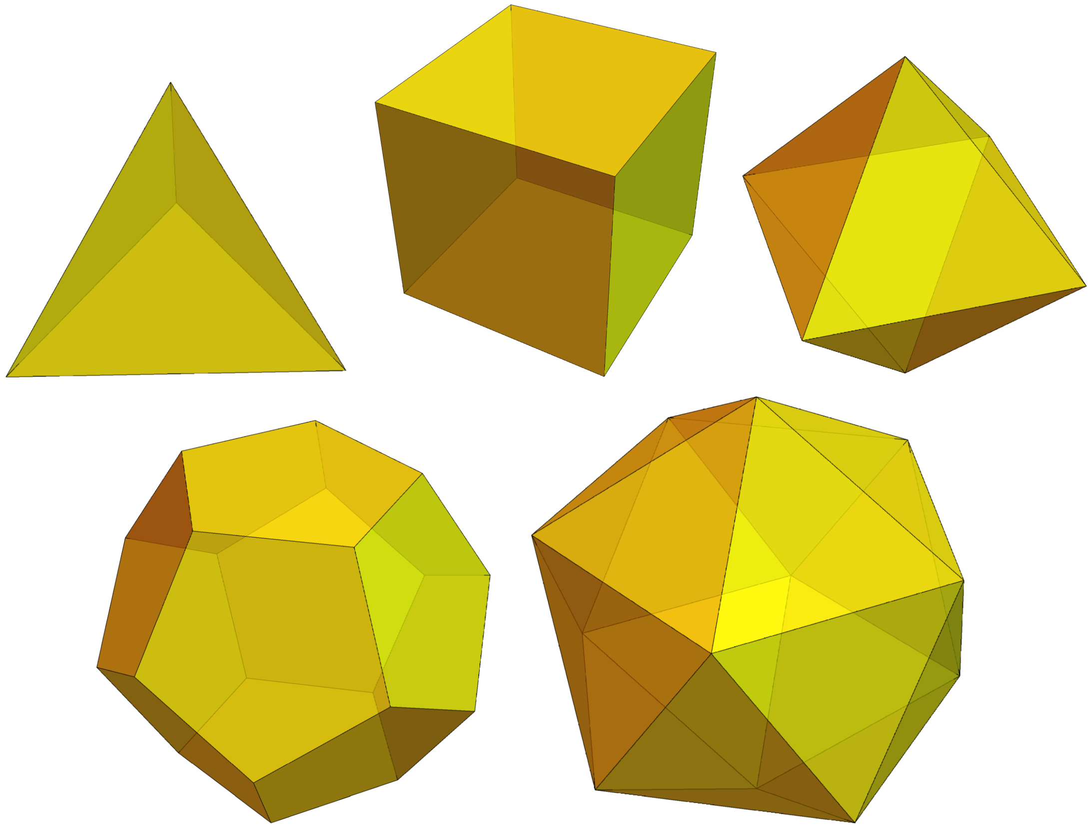
Dražen Lovrić
drazen.lovric@student.math.hr
Tomislav Pejković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
pejkovic@math.hr

Poliedre se može definirati na različite načine koji nisu u svemu ekvivalentni. Mi ćemo se baviti samo *konveksnim poliedrima*, a njih definiramo kao presjek konačno mnogo zatvorenih poluprostora. Zatvoreni poluprostor određen je ravninom u euklidskom trodimenzionalnom prostoru i sadrži tu ravninu. Pri tome od poliedra još tražimo da je omeđen i ne leži čitav u jednoj ravnini. Na drugi, ali ekvivalentan način, konveksni poliedar možemo promatrati kao konveksnu ljusku konačnog skupa točaka u prostoru koje ne leže sve u istoj ravnini. Konveksna ljuska je najmanji konveksni skup koji sadrži dane točke. Prisjetimo se da je skup konveksan ako za svake dvije svoje točke sadrži i dužinu koja spaja te točke.

Neki od najpoznatijih poliedara su *pravilni poliedri* ili *Platonova tijela*. Kod njih se oko svakog vrha poliedra nalazi isti broj sukladnih pravilnih mnogokuta. Ima ih pet: tetraedar, heksaedar (kocka), oktaedar, dodekaedar i ikosaedar.

Imena su dobili po grčkim riječima za broj njihovih strana. Tako je tetraedar omeđen sa četiri jednakostranična trokuta, kocka sa šest kvadrata, oktaedar s osam jednakostraničnih trokuta, dodekaedar s dvanaest pravilnih peterokuta, a ikosaedar s dvadeset jednakostraničnih trokuta.

Primjećujemo da tri od tih poliedara imaju strane koje su jednakostranični trokuti. No ima i drugih konveksnih poliedara kojima su sve strane jednakostranični trokuti. Takvo geometrijsko tijelo zovemo *deltaedar* jer strana tog poliedra izgleda kao veliko slovo Δ (delta) grčkog alfabeta. Za razliku od Platonovog tijela, ovdje ne tražimo da oko svakog vrha poliedra bude isti broj strana.



Slika 1: Platonova tijela, u gornjem redu tetraedar, kocka i oktaedar, u donjem redu dodekaedar i ikosaedar

U ovom članku odredit ćemo sve konveksne deltaedre. Za njihovu karakterizaciju trebaju nam dva važna teorema koji nose imena poznatog švicarskog matematičara Leonharda Eulera (1707.-1783.) i francuskog matematičara Augustin-Louisa Cauchyja (1789.-1857.).

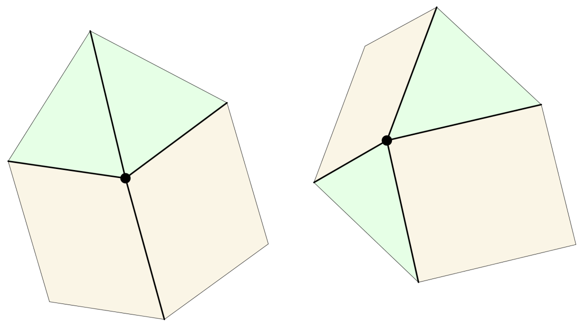
Teorem (Eulerova formula)**.** *Za svaki konveksan poliedar u kojemu je V broj vrhova, B broj bridova i S broj strana, vrijedi $V - B + S = 2$.*

Jedna od najpoznatijih primjena Eulerove formule je dokaz da Platonovih tijela ima točno pet.

Teorem (Cauchyjev teorem o krutosti)**.** *Neka su dana dva konveksna poliedra i bijekcija koja skup strana jednog poliedra preslikava u skup strana drugog tako da su odgovarajuće strane sukladne i jednako raspoređene. Tada su ta dva poliedra sukladni, tj. postoji izometrija prostora koja jedan od njih preslikava na drugi.*

Pojasnimo što mislimo pod time da su strane u dvama poliedrima jednako raspoređene. To znači da se navedena bijekcija među stranama može proširiti do bijekcije među skupovima vrhova i bijekcije među skupovima bridova tako da su sve incidencije očuvane.

Stoga ne može biti da, primjerice, oko jednog vrha imamo raspoređene strane trokut-trokut-kvadrat-kvadrat, a oko njemu pridruženog vrha trokut-kvadrat-trokut-kvadrat kao na Slici 2.



Slika 2: Različiti rasporedi trokuta i kvadrata oko dva vrha

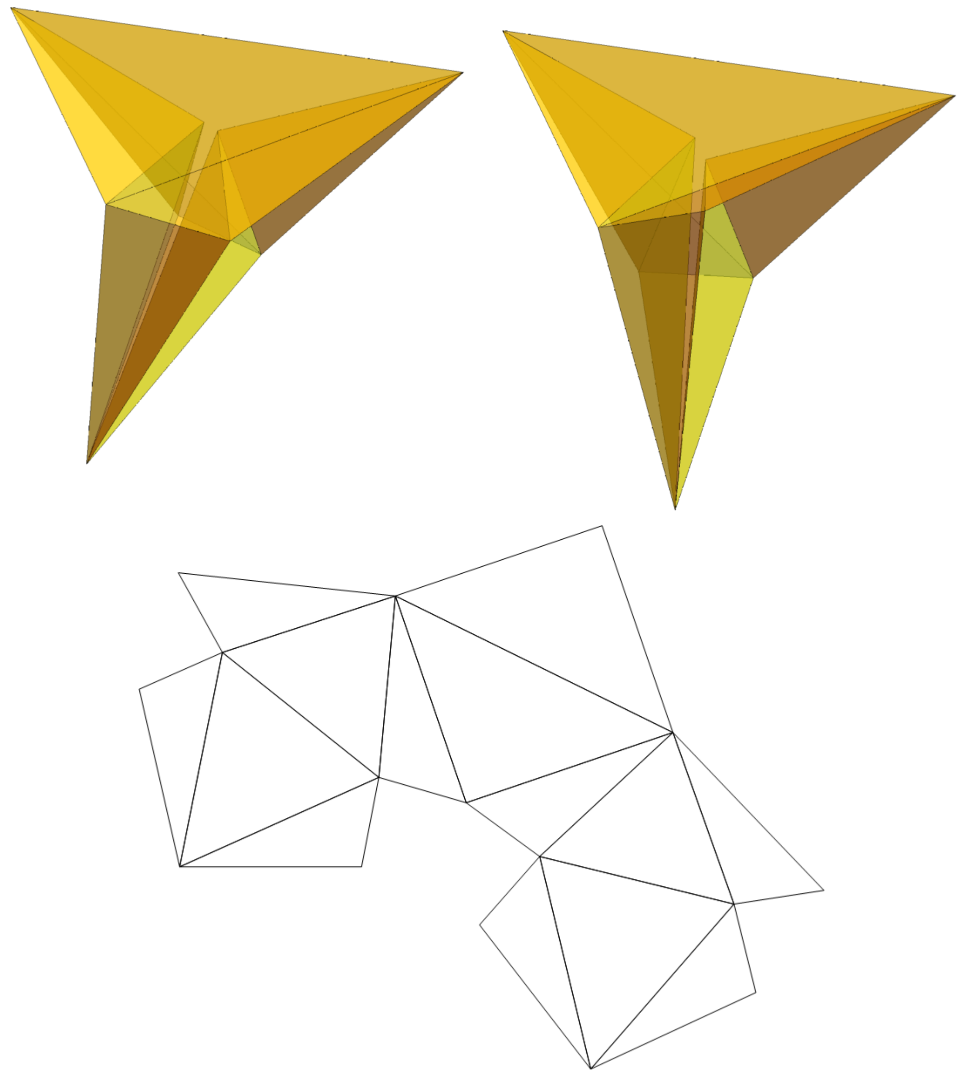
Spomenimo još zašto se u nazivu ovog teorema pojavljuje riječ krutost (rigidnost). Cauchyjev teorem osigurava da se nijednom konveksnom poliedru kutovi između susjednih strana (diedralni kutovi) ne mogu mijenjati, a da same strane (pa tako i bridovi) ostanu nepromijenjene. Možemo zamisliti da su strane poliedra izrađene od nekog čvrstog materijala, npr. čelične ploče, i na mjestu brida između svake dvije susjedne strane nalazi se šarka (baglama, pant ili zglobnica). Cauchyjev teorem kaže da se takav konveksni poliedar kad ga pritisnemo rukama, neće nimalo deformirati. Iznenađujuće je otkriće da postoje i fleksibilni poliedri kod kojih su deformacije moguće. Takvi poliedri, naravno, ne mogu biti konveksni, ali im mogu sve strane biti trokuti kao što su u Steffenovu poliedru (Slika 3) otkrivenu 1978. godine koji ima 14 strana. Mrežu ovog poliedra lako je otisnuti na tvrđi papir i sastavivši poliedar provjeriti da je zaista fleksibilan. Ipak, još uvijek je neriješeno pitanje postoji li fleksibilni (nekonveksni) deltaedar.

Vratimo se sada klasifikaciji konveksnih deltaedara. Dokazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem. *Postoji točno osam konveksnih poliedara kojima su sve strane jednakostranični trokuti. Svaki od njih je, do na izometriju, jedinstveno određen zadavanjem duljine brida.*

Pogledajmo kutove strana pri jednom vrhu nekog konveksnog poliedra kojemu su sve strane sukladni pravilni mnogokuti. Primjerice, za tetraedar ćemo imati tri kuta od $\pi/3$ radijana, pa je suma tih kutova π. Za kocku će tri prava kuta u sumi davati $3\pi/2$ radijana. Zbog konveksnosti suma kutova pri jednom vrhu mora biti manja od punog kuta, tj. 2π. S obzirom da oko svakog vrha poliedra leže barem tri strane, lako vidimo da su jedine mogućnosti one u kojima oko jednog vrha imamo tri, četiri ili pet trokuta, tri kvadrata ili tri peterokuta.

Nas zanimaju samo deltaedri, pa označimo sa a, b, c broj vrhova promatranog poliedra u kojima se sastaje $3, 4, 5$ trokuta, tim redom. Takve vrhove kratko ćemo zvati 3-vrh, 4-vrh i 5-vrh. Tada su a, b i c nenegativni cijeli brojevi. Prebrojimo li vrhove, bridove i



Slika 3: Steffenov poliedar u dva položaja i mreža tog poliedra

strane poliedra na dva načina, odmah dobivamo

$$\begin{aligned} V &= a + b + c, \\ 2B &= 3a + 4b + 5c, \\ 3S &= 3a + 4b + 5c. \end{aligned}$$

Ovdje smo uzeli u obzir da svaki brid spaja točno dva vrha i da je svaka strana incidentna s točno tri vrha poliedra. Iskoristimo li sada Eulerovu formulu, dobivamo

$$\begin{aligned} 2 &= V - B + S \\ &= (a + b + c) - \frac{1}{2}(3a + 4b + 5c) + \frac{1}{3}(3a + 4b + 5c) \\ &= \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c, \end{aligned}$$

odnosno

$$3a + 2b + c = 12.$$

Ova jednadžba ima konačan broj rješenja (a, b, c) u nenegativnim cijelim brojevima. Zato ćemo ispitati postojanje poliedara koji odgovaraju mogućim rješenjima te dobiti potpunu klasifikaciju konveksnih deltaedara.

a	b	c	Ime ili oznaka	V	B	S
4	0	0	tetraedar	4	6	4
3	1	1	(2)			
3	0	3	(2)			
2	3	0	trokutna bipiramida	5	9	6
2	2	2	(2)			
2	1	4	(2)			
2	0	6	(1)			
1	4	1	(2)			
1	3	3	(3)			
1	2	5	(1)			
1	1	7	(1)			
1	0	9	(1)			
0	6	0	oktaedar	6	12	8
0	5	2	peterokutna bipiramida	7	15	10
0	4	4	skošeni disfenoid	8	18	12
0	3	6	triaugmentirana trokutna prizma	9	21	14
0	2	8	biaugmentirana kvadratna antiprizma	10	24	16
0	1	10	(4)			
0	0	12	ikosaedar	12	30	20

Tablica 1: Oznake uvjeta

(1) $a > 0 \;\Rightarrow\; a + b \geqslant 4$

(2) $c > 0 \;\Rightarrow\; b + c \geqslant 6$

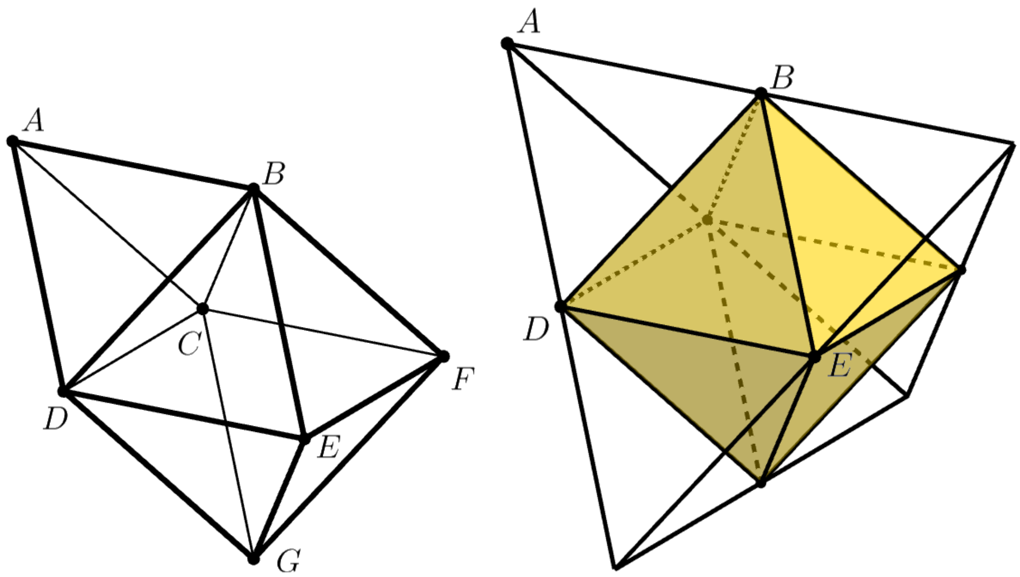
(3) $a \neq 1$

(4) $a = 0 \;\Rightarrow\; b \neq 1$

U tablici su prikazana sva rješenja (a, b, c) dobivene jednadžbe, a u četvrtom stupcu je oznaka koja pokazuje zašto za tu trojku ne postoji poliedar ili je naveden naziv dobivenog poliedra. Objasnimo sada sve oznake i nazive.

Tetraedar, *oktaedar* i *ikosaedar* već smo upoznali kada su spomenuti pravilni poliedri. Pokažimo dalje da neke kombinacije a, b, c uopće nisu moguće u konstrukciji deltaedra.

Najprije tvrdimo da ne možemo imati vrh uz tri strane (3-vrh) susjedan vrhu uz pet strana (5-vrhu). Pogledajmo zašto. Jedan 3-vrh povezan bridom s 5 vrhom dobivamo položivši tetraedar uz oktaedar tako da im se jedna strana podudara. Na Slici 4 lijevo vidimo tetraedar $ABCD$ položen na oktaedar $BCDEFG$ te su uz vrh A tri jednakostranična trokuta, a uz B pet trokuta. No, budući da su kut među stranama tetraedra i kut među stranama oktaedra suplementarni kutovi, strane ABD tetraedra i BDE oktaedra zapravo leže u istoj ravnini, tj. $ABED$ je četverokutna strana novog spojenog poliedra koji zato nije deltaedar. Slično i točke A, B, F, C leže u jednoj ravnini. Ako bismo sada, fiksirajući duljinu bridova, pogurali točku E prema točki C tako da $\overline{BD}$ zaista postane izbočeni brid poliedra, onda bi se i točka F pomaknula te bi $\overline{BC}$ postao udubljeni brid, tj. poliedar više ne bi bio konveksan.

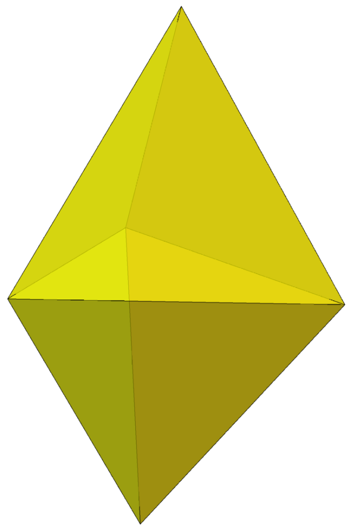


Slika 4: Tetraedar i oktaedar imaju suplementarne diedralne kutove

Tvrdnju da je suma diedralnog kuta tetraedra i diedralnog kuta oktaedra jednaka π, možemo dokazati tako da presiječemo ta dva tijela na Slici 4 lijevo ravninom određenom točkama A, C, E i promatramo kutove u dobivenom jednakokračnom trokutu i rombu. Još lakše ćemo to vidjeti ako u tetraedru dvostruko veće duljine brida spojimo polovišta svih susjednih bridova te tako dobijemo četiri manja tetraedra i jedan oktaedar u sredini (Slika 4 desno).

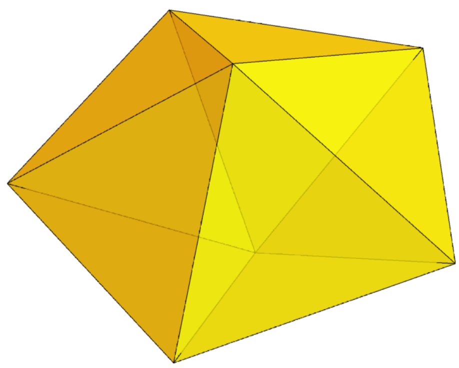
Dakle, pokazali smo da u konveksnom deltaedru 3-vrh može biti susjedan samo s 3-vrhom ili 4-vrhom, a 5-vrh može biti susjedan samo s 4-vrhom ili 5-vrhom. Ako je $a > 0$, to znači da postoji bar jedan 3-vrh, a budući da nijedan od tri njemu susjedna vrha ne smije biti 5-vrh, vrijedi $a + b \geqslant 4$. Analogno zaključujemo da iz $c > 0$ slijedi $b + c \geqslant 6$. Prvi uvjet eliminira sve kombinacije a, b, c u tablici koje su označene s (1), a drugi uvjet eliminira trojke označene s (2).

Pretpostavimo da postoji samo jedan 3-vrh. Njemu susjedna tri vrha su 4-vrhovi te se potom poliedar zatvara još jednim 3-vrhom. Ovaj poliedar sastavljen od šest jednakostraničnih trokuta zove se *trokutna bipiramida*. Ovim smo odmah pokazali da ne postoji slučaj kod kojega je $a = 1$, što je u tablici označeno s (3).



Slika 5: Trokutna bipiramida

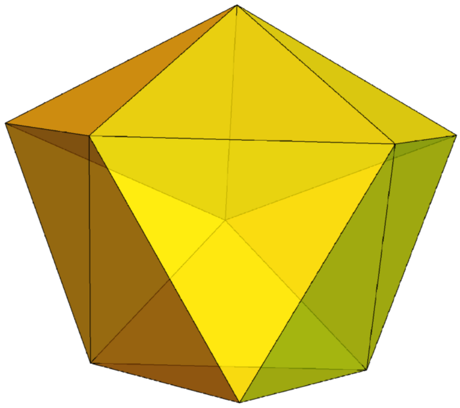
Poliedar za $(a, b, c) = (0, 5, 2)$ dobijemo tako da dvije pravilne peterostrane piramide zalijepimo duž njihovih baza, a zove se *peterokutna bipiramida*.



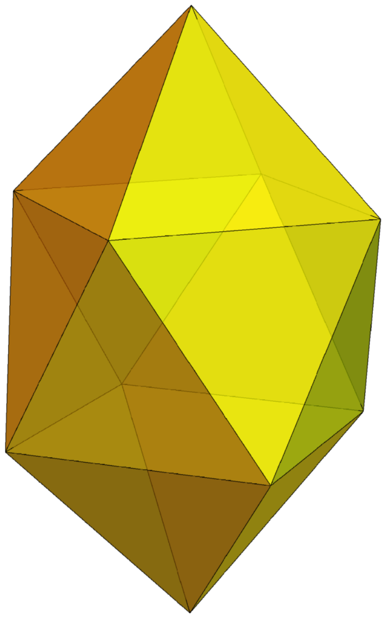
Slika 6: Peterokutna bipiramida

Poliedar za $(a, b, c) = (0, 3, 6)$ zove se *triaugmentirana trokutna prizma*, a konstruiramo ga na sljedeći način. Započnemo s pravilnom trostranom prizmom (dva jednakostranična trokuta u paralelnim ravninama spojena s tri kvadrata) te na svaki kvadrat pobočja prizme položimo pravilnu četverostranu piramidu.

Poliedar za $(a, b, c) = (0, 2, 8)$ zovemo *biaugmentirana kvadratna antiprizma*. Kvadratna antiprizma sastoji se od dva kvadrata u paralelnim ravninama, koji su najprije bili poravnati, a zatim smo jednoga zarotirali oko zajedničke osi za $\pi/4$ i potom ih oba spojili pomoću osam jednakostraničnih trokuta. Preostaje samo na kvadrate koji čine baze položiti pravilne četverostrane piramide.



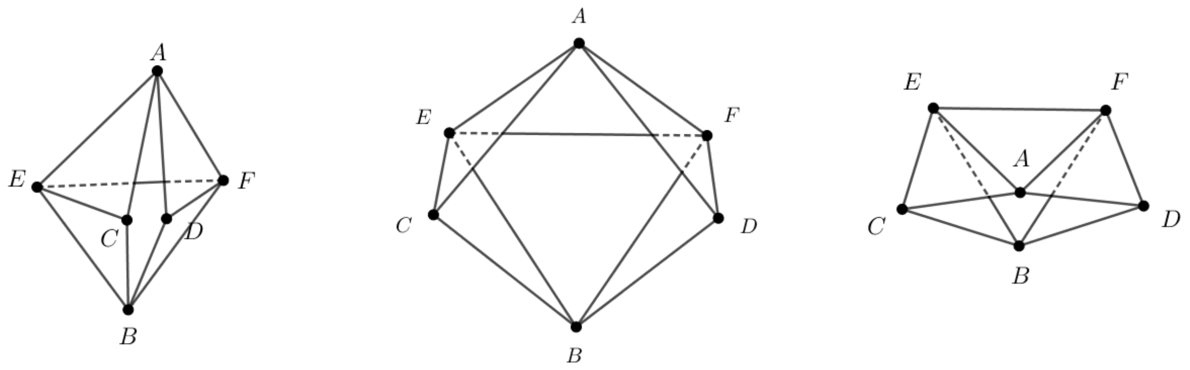
Slika 7: Triaugmentirana trokutna prizma



Slika 8: Biaugmentirana kvadratna antiprizma

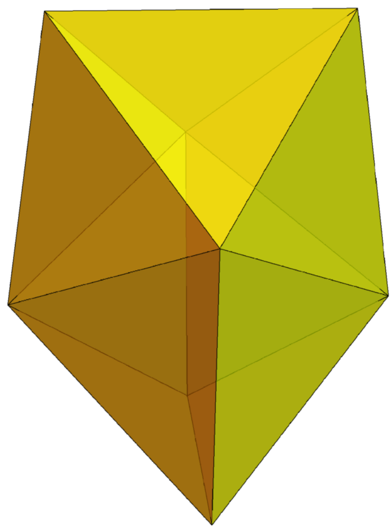
Nadalje, pokažimo da ne postoji poliedar s trojkom $(a, b, c) = (0, 1, 10)$. Poliedar sadrži samo jedan 4-vrh pa krenimo od njega. Njemu susjedna četiri vrha moraju biti 5-vrhovi, pa se poliedar dalje formira u obliku prethodnog $(0, 2, 8)$ te time neizbježno nastaje drugi 4-vrh. U tablici označavamo ovaj slučaj sa (4) .

Zadnja nam preostaje trojka $(a, b, c) = (0, 4, 4)$ i uvjerit ćemo se da postoji takav konveksni poliedar. Zovemo ga *skošeni disfenoid* ili trokutni dodekaedar ili sijamski dodekaedar. Započinjemo s trokutnom bipiramidom, tako da ju rastvorimo duž dva brida, od gornjeg vrha A do donjeg vrha B. Sada zamislimo da guramo A i B jedan prema drugome, pri čemu se rascijepljeni vrh razdvaja u vrhovima C i D, a duljine svih bridova ostaju fiksne. Kako se AB smanjuje, a CD povećava, zasigurno će u nekom trenutku te dvije duljine biti jednake (Bolzanov teorem), pa su onda jednaki i svi kutovi neravninskog četverokuta $ACBD$. Stvorimo još jednu takvu plohu, ali vrhove koje smo



Slika 9: Formiranje skošenog disfenoida

na prvoj plohi označili s A i B sada označimo s C i D te obratno. Spajanjem dviju ploha duž $ACBD$, dobivamo traženi poliedar.



Slika 10: Skošeni disfenoid

Može se pokazati da se svi navedeni poliedri osim skošenog disfenoida mogu konstruirati koristeći samo ravnalo i šestar, pri čemu te instrumente koristimo u proizvoljnim ravninama. Kod njega se konstruktivna zadaća, uz jediničnu duljinu brida, svodi na konstrukciju dužine čija je duljina korijen ireducibilnog kubnog polinoma s cjelobrojnim koeficijentima, što nije moguće samo ravnalom i šestarom.

Iz tablice vidimo da za svaki od ukupnih brojeva strana S poliedra postoji samo jedna moguća trojka (a, b, c) koja jednoznačno određuje raspored strana, pa iz Cauchyjeva teorema slijedi jedinstvenost konveksnih deltaedara, do na fiksiranje duljine brida i na izometrije.

Sada možemo ukratko ponoviti kako dobivamo sve konveksne deltaedre:

- Pravilna trostrana piramida.
- Zalijepimo baze dviju pravilnih piramida: trostranih, četverostranih ili peterostranih.
- Na baze četverokutne ili peterokutne antiprizme zalijepimo baze odgovarajućih pravilnih piramida.
- Na pobočke pravilne trostrane prizme zalijepimo tri pravilne četverostrane piramide.
- Preostaje još skošeni disfenoid koji je poseban.

Literatura

[1] M. S. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from The Book*, sixth edition, Springer, Berlin, 2018.

[2] H. Freudenthal, B. L. van der Waerden, On an assertion of Euclid, Simon Stevin **25** (1947), 115–121.

[3] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2000.

[4] M. McClure, I. Hafner, *Steffen's Flexible Polyhedron*, Wolfram Demonstrations Project, 2007.

Slike su nacrtane u programima Wolfram Mathematica i GeoGebra.