

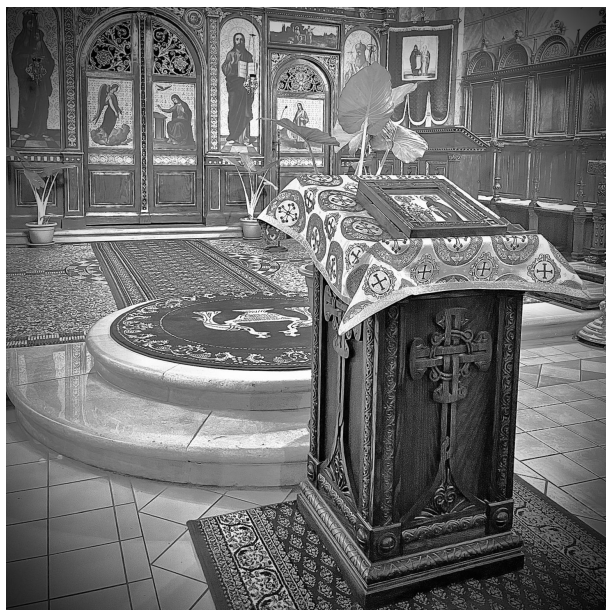
Stereometrija u konkatedrali

Tomislav Pejković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
pejkovic@math.hr

U zagrebačkoj grkokatoličkoj crkvi svetih Ćirila i Metoda možemo razabrati različite matematičke ideje. U ovom članku proučit ćemo nekoliko zadataka vezanih uz volumene i udaljenosti u prostoru. Ti su problemi inspirirani onim što pronalazimo u navedenoj crkvi, ali smo situaciju redovito idealizirali, pojednostavnili i dijelom poopćili. Takve modifikacije donekle smanjuju realističnost naših modela, ali nam i omogućuju primjenu osnovnih geometrijskih formula i teorema.

1 Volumeni predmeta i šupljina

Tetrapod ili *analoj* je četveronožni stolić s nakošenom gornjom plohom na koju se polaže ikona, tj. slika nekog blagdana ili svetca.

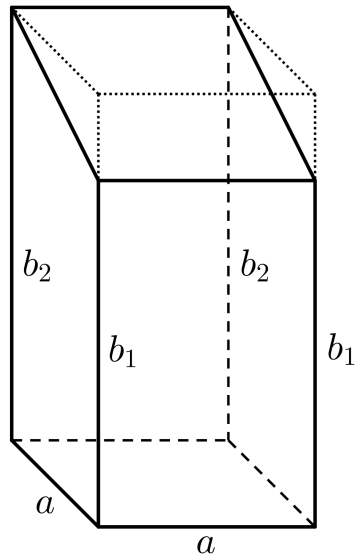


Slika 1: Tetrapod iza kojega je ambon

Tetrapod u grkokatoličkoj konkatedrali možemo promatrati kao kvadar s kvadratnom bazom kojemu je odozgo odrezan jedan dio, vidi Sliku 2.

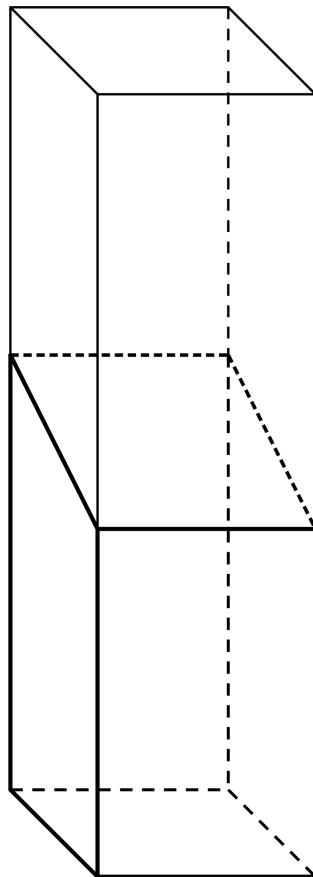
Volumen tetrapoda lako dobijemo tako da od volumena kvadra oduzmemo volumen uspravne trostrane prizme kojoj je baza pravokutni trokut s katetama a i $b_2 - b_1$ te visina na tu bazu a . Dakle, traženi volumen je

$$a^2 b_2 - \frac{1}{2} a (b_2 - b_1) a = a^2 \frac{b_1 + b_2}{2}.$$



Slika 2

Brže smo ovaj rezultat mogli dobiti tako da uzmemo još jedan takav tetrapod, okrenemo ga naopako i položimo na prvo tijelo kao na Slici 3.

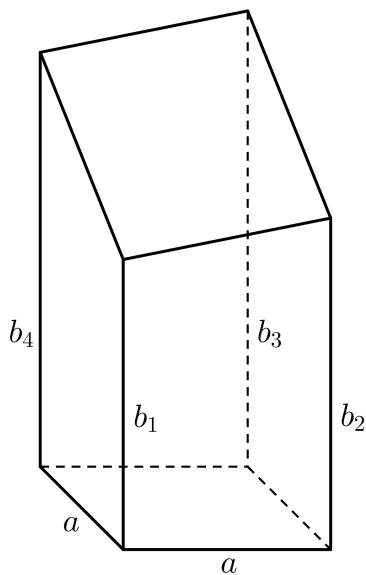


Slika 3

U uniji dvaju tijela dobivamo kvadar s bridovima duljina a , a , $b_1 + b_2$ i traženi volumen je polovica volumena toga kvadra.

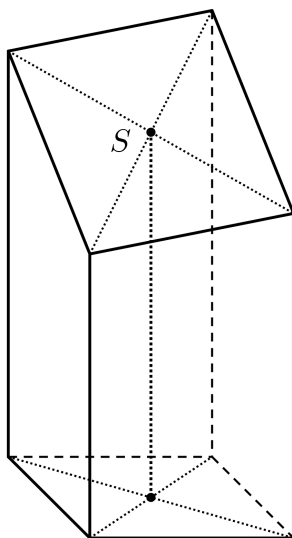
Zamislamo sada nepravilni tetrapod na Slici 4 kojemu su bočni bridovi i dalje okomiti

na bazu, ali imaju različite duljine b_1, b_2, b_3, b_4 . Tražimo da gornja ploha i dalje leži u jednoj ravnini tako da se na nju može položiti ikona. Koliki je volumen takvog tijela?



Slika 4

Presiječemo li dvije paralelne ravnine nekom trećom ravninom, dobit ćemo par paralelnih pravaca. Zato su na gornjoj strani promatranog tijela nasuprotne stranice paralelne, pa je ta strana paralelogram.

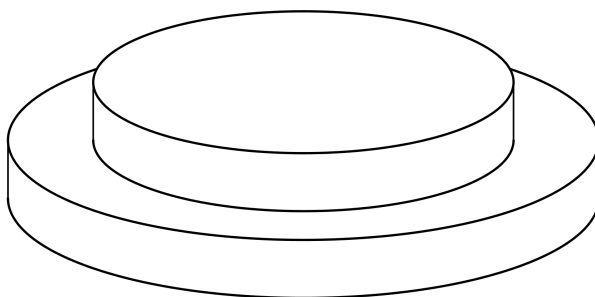


Slika 5

Označimo sjecište dijagonala tog paralelograma sa S . U paralelogramu se dijagonale raspolavljaju, pa gledajući srednjicu trapeza s bazama b_1 i b_3 i srednjicu trapeza s bazama b_2 i b_4 (Slika 5) dobivamo da je $\frac{b_1+b_3}{2} = \frac{b_2+b_4}{2}$. Sada primijenimo isti trik kao maloprije. Dano tijelo zajedno sa slikom toga tijela po centralnoj simetriji s obzirom na točku S čini jedan kvadar s bazom površine a^2 i bočnim bridom duljine $b_1 + b_3 = b_2 + b_4$. Stoga je volumen nepravilnog tetrapoda jednak $\frac{1}{2}a^2(b_1 + b_3)$.

Iza tetrapoda nalazi se *ambon* (Slika 1). Ovdje su to dvije stube kružnog tlocrta. Mjerenjem smo dobili da je svaka od stuba visine 15 cm, promjer gornjeg kruga je 159 cm, a

gazište, tj. dubina donje stube je 33 cm pri čemu je istureni dio gazišta stuba zanemaren. Odredimo najprije ukupni volumen ambona. Računamo ga kao zbroj volumena dvaju valjaka (Slika 6).



Slika 6

Volumen valjka jednak je umnošku visine, kvadrata promjera baze i konstante $\frac{\pi}{4}$. Dobivamo

$$15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (159^2 + (159 + 2 \cdot 33)^2) \approx 894\,246.5 \text{ cm}^3.$$

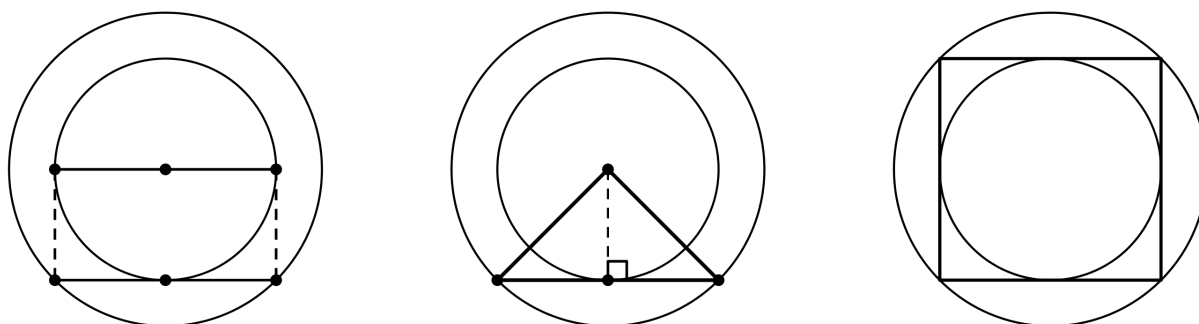
Koliko najviše stuba možemo dodati na ambon zadržavajući isti nagib stubišta? Koji je omjer volumena nadodanih stuba i volumena postojećeg ambona?

Iduća stuba je valjak širine $159 - 2 \cdot 33 = 93$ cm, a ona na njoj je širine $93 - 2 \cdot 33 = 27$ cm. Stoga možemo dodati još najviše dvije stube i omjer volumena novih stuba i starog ambona je

$$\frac{15 \cdot \frac{\pi}{4} (93^2 + 27^2)}{15 \cdot \frac{\pi}{4} (225^2 + 159^2)} \approx 0.124.$$

Primijetimo da nam za odgovore na zadnja dva pitanja uopće nije bila potrebna točna visina stuba, bilo je dovoljno znati da su sve stube iste visine.

Prilikom mjerenja navedenih dimenzija ambona, zamijetili smo jednu zanimljivu činjenicu. Položimo li razvučenu traku metra na donju stubu i privučemo je skroz do čela iduće stube, izmjerena širina gotovo je potpuno jednaka promjeru gornjeg kruga. Drugim riječima, pogledamo li ambon odozgo kao na Slici 7 lijevo, u većoj kružnici tetiva koja ujedno dodiruje manju kružnicu ima istu duljinu kao promjer te manje kružnice.

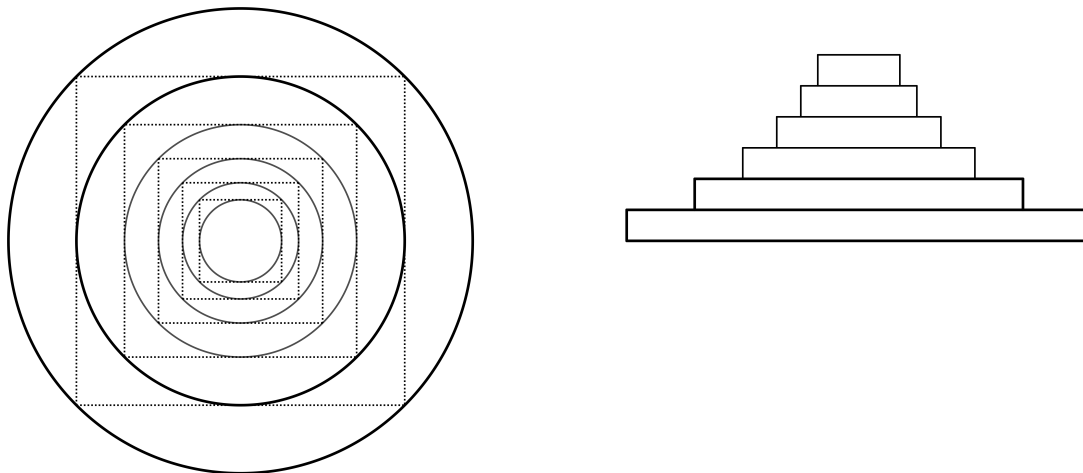


Slika 7

Odmah dobivamo da je trokut istaknut u sredini Slike 7 pravokutan, odnosno kvadrat upisan velikoj kružnici, opisan je maloj kružnici kako vidimo na desnom dijelu iste slike.

Možemo to provjeriti i numerički. Omjer promjera je $\frac{225}{159} = 1.41509\dots$, što je vrlo blizu $\sqrt{2} = 1.41421\dots$, omjeru duljina dijagonale i stranice kvadrata.

Ovo otkriće daje nam ideju kako na drugi način možemo nadograditi ambon. Zadržavajući jednaku visinu stuba, svaku iduću upišemo u kvadrat upisan zadnjoj konstruiranoj stubi. Tlocrt i nacrt dviju starih i prvih četiriju novih stuba prikazan je na Slici 8



Slika 8

Promjer n -te nove stuba za $n = 1, 2, 3, \dots$ je $159/(\sqrt{2})^n$, a njihov ukupni volumen je

$$15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 159^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots \right) = 15 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 159^2 \text{ cm}^3,$$

tj. jednak je volumenu gornje stuba postojećeg ambona. Ovdje smo iskoristili da je

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots = 1$$

što odmah slijedi iz činjenice da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Dakle, za izgradnju ovakvog stubišta u nebo (ili kule babilonske?), prepreka nam sigurno nije utrošak materijala.

U blizini ambona nailazimo na stalak za svijeće prikazan na Slici 9 lijevo.

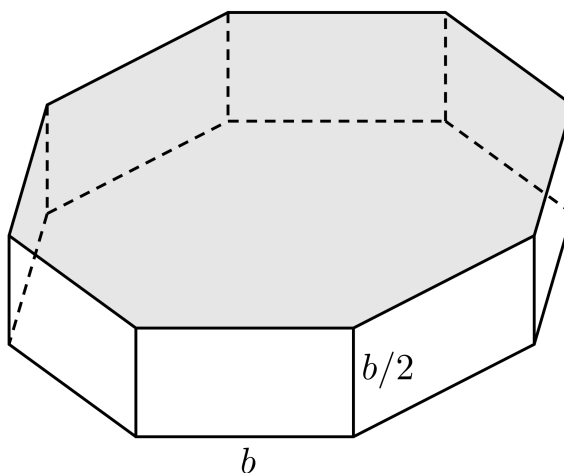
Posuda s pijeskom u koji se zatiču svijeće je uspravna osmerostrana prizma visine $b/2$. Duljina jedne stranice pravilne osmerokutne baze je b , vidi Sliku 9 desno. Koliko pijeska može stati u tu posudu ako je napunimo ravno do vrha?

Površinu pravilnog osmerokuta izračunat ćemo tako da ga smjestimo u kvadrat kao na Slici 10.

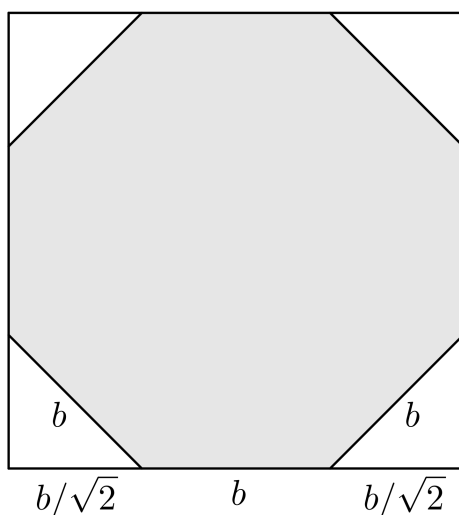
Dakle, površina osmerokuta je

$$(b/\sqrt{2} + b + b/\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} (b/\sqrt{2})^2 = b^2(1 + \sqrt{2})^2 - b^2 = 2(1 + \sqrt{2})b^2.$$

Volumen posude je površina baze pomnožena s visinom, tj. $(1 + \sqrt{2})b^3$.



Slika 9



Slika 10

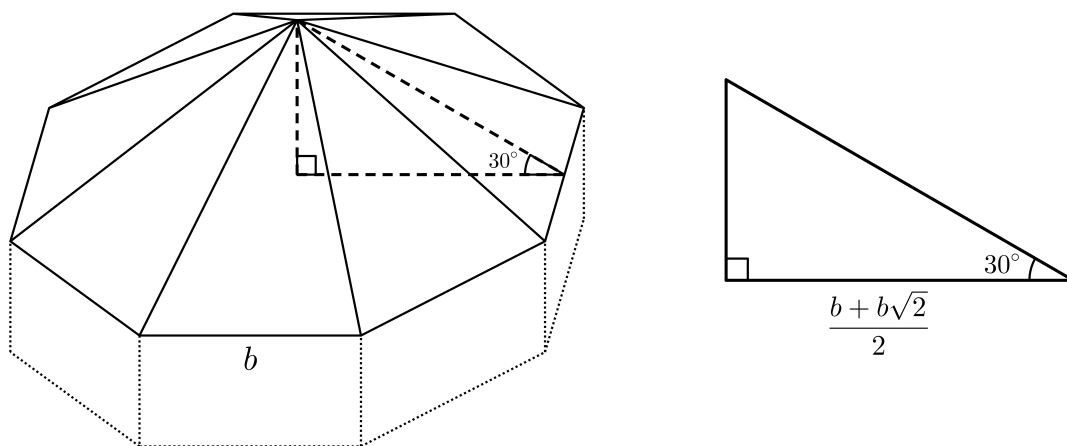
Što ako pijesak smijemo usipati i iznad razine ruba posude, ali tako da nagib površine pijeska prema horizontalnoj ravnini ne bude veći od 30° jer će u protivnom doći do osipanja pijeska koji će ispadati iz posude?

U tom slučaju dobivenom volumenu treba još pribrojiti volumen uspravne osmerostrane piramide kojoj je baza promatrani osmerokut, a kut između bočne strane i baze je 30° . Situacija je prikazana na Slici 11 na kojoj smo dodatno naznačili i izdvojili pravokutni trokut pomoću kojega određujemo visinu piramide.

Jedna kateta u naznačenom pravokutnom trokutu jednaka je polovici stranice kvadrata sa Slike 10. Budući da je taj pravokutni trokut polovica jednakostraničnog trokuta, odmah dobivamo da je druga njegova kateta duljine $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b+b\sqrt{2}}{2}$. Stoga je traženi volumen osmerostrane piramide jednak

$$\frac{1}{3} \cdot 2(1 + \sqrt{2})b^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{b + b\sqrt{2}}{2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} b^3.$$

Idući problem inspiriran je kasetiranim stropom ulaznog dijela crkve ispod kora. Na



Slika 11

Slici 12 lijevo je fotografija tog drvenog stropa, a desno je skica u tlocrtu.



Slika 12

Zanima nas koja mora biti širina greda u ovisnosti o a tako da je ukupni volumen svih rupa tri puta veći od volumena svih greda zajedno.

Neka je d širina grede. Budući da je visina grede ista kao visina, odnosno dubina udubljenja u stropu, zaključujemo da je za omjere volumena ta veličina nebitna. Zadani uvjet na omjer volumena rupa i volumena greda bit će ispunjen ako je površina koju zauzimaju rupe na Slici 12 desno jednaka $\frac{3}{4}$ ukupne površine, tj.

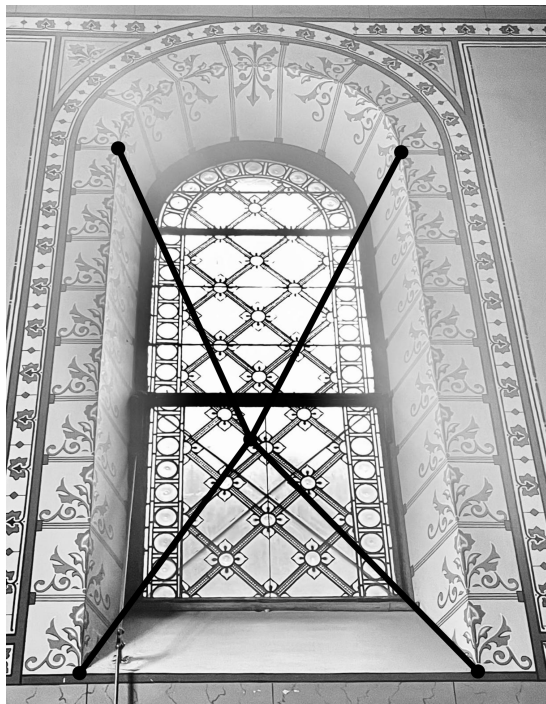
$$\begin{aligned}
 3 \cdot 4 \cdot \frac{a - 2d}{3} \cdot \frac{\frac{2}{3}a - 4d}{4} &= \frac{3}{4} \cdot a \cdot \frac{2}{3}a \\
 (a - 2d) \left(\frac{1}{3}a - 2d \right) &= \frac{1}{4}a^2 \\
 \left(\frac{2}{3}a - 2d \right)^2 - \left(\frac{1}{3}a \right)^2 &= \frac{1}{4}a^2 \\
 \left(\frac{2}{3}a - 2d \right)^2 &= \left(\frac{\sqrt{13}}{6}a \right)^2.
 \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{2}{3}a - 2d = -\frac{\sqrt{13}}{6}a \quad \text{ili} \quad \frac{2}{3}a - 2d = \frac{\sqrt{13}}{6}a.$$

Odmah vidimo da prva opcija otpada jer bi bilo $2d > a$. Stoga je $d = \left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{13}}{12}\right)a \approx 0.0329a$.

Pogledajmo sada prozor na bočnom zidu ove crkve.



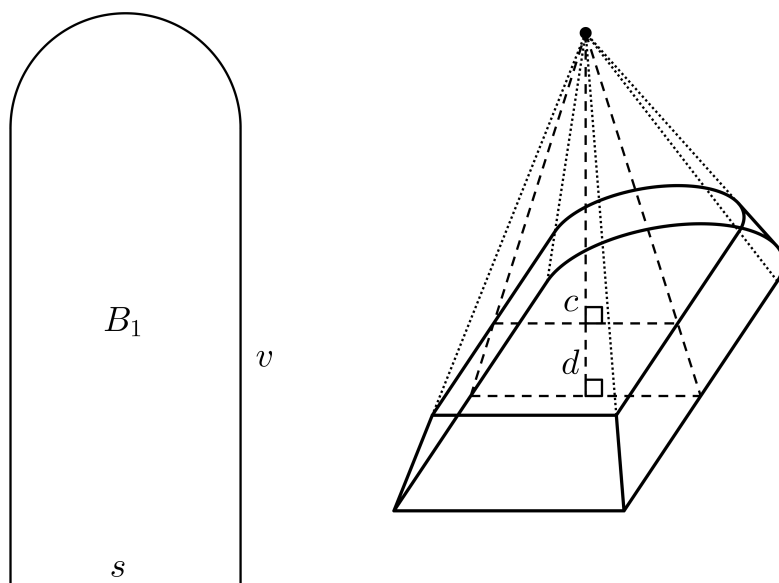
Slika 13

Na Slici 13 vidimo da su unutrašnji i vanjski otvor rupe u zidu slični likovi koje dobijemo spajanjem pravokutnika i polukruga. Neka je kao na Slici 14 lijevo s širina unutrašnjeg otvora, v visina pravokutnog dijela tog otvora i d debljina zida. Vanjski otvor sličan je unutrašnjem s koeficijentom sličnosti $k < 1$, pa mu je širina ks , a visina pravokutnog dijela kv . Zanima nas koji volumen zauzima taj prozor, odnosno rupa u zidu. Drugim riječima, da želimo potpuno zazidati taj prozor, koliki bi volumen materijala trebalo utrošiti?

Traženi volumen dobit ćemo kao volumen krnjeg stošca nepravilne baze, vidi Sliku 14 desno. S te slike iz sličnosti odgovarajućih trokuta, odmah dobivamo $\frac{c}{c+d} = k$ iz čega je $c + d = \frac{d}{1-k}$ i $c = \frac{kd}{1-k}$. Označimo s B_1 površinu unutrašnjeg otvora, a s B_2 površinu vanjskog otvora. Volumen krnjeg stošca dobivamo kao razliku volumena V_1 većeg i V_2 manjeg stošca, odnosno

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \frac{1}{3}(c+d)B_1 - \frac{1}{3}cB_2 \\ &= \frac{1}{3} \frac{d}{1-k} B_1 - \frac{1}{3} \frac{kd}{1-k} k^2 B_1 \\ &= \frac{1}{3} \frac{1-k^3}{1-k} d \left(sv + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{2} \right)^2 \pi \right) \\ &= \frac{1+k+k^2}{3} ds \left(v + \frac{\pi}{8} s \right). \end{aligned}$$

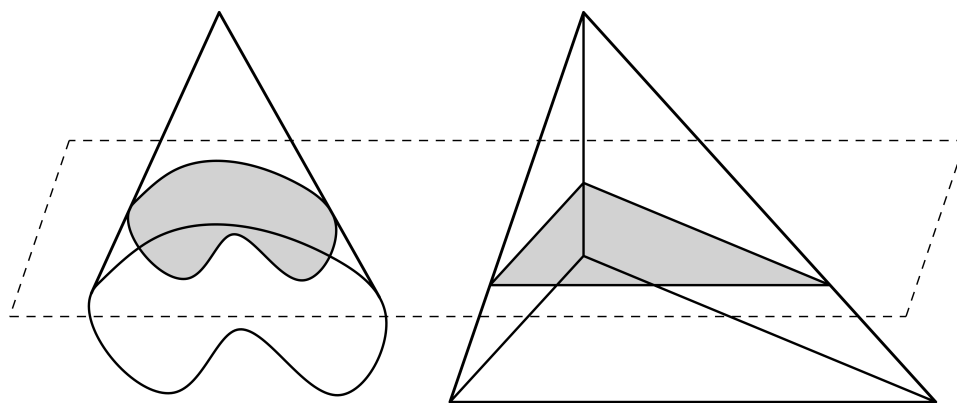
Objasnilo bi još zašto smo za volumen nepravilnog stošca smjeli koristiti istu formulu kao za volumen kružnog stošca ili piramide, tj. jednu trećinu umnoška površine baze i duljine visine na tu bazu. To slijedi iz *Cavalierijeva principa* koji kaže:



Slika 14

Ako se dva geometrijska tijela mogu postaviti na način da svaka ravnina paralelna zadanoj ravnini siječe tijela tako da presjeci imaju jednake površine, tada ta dva tijela imaju jednake volumene.

Ilustracija ovog principa za slučaj jednog stošca nepravilne baze i jedne trostrane piramide dana je na Slici 15.

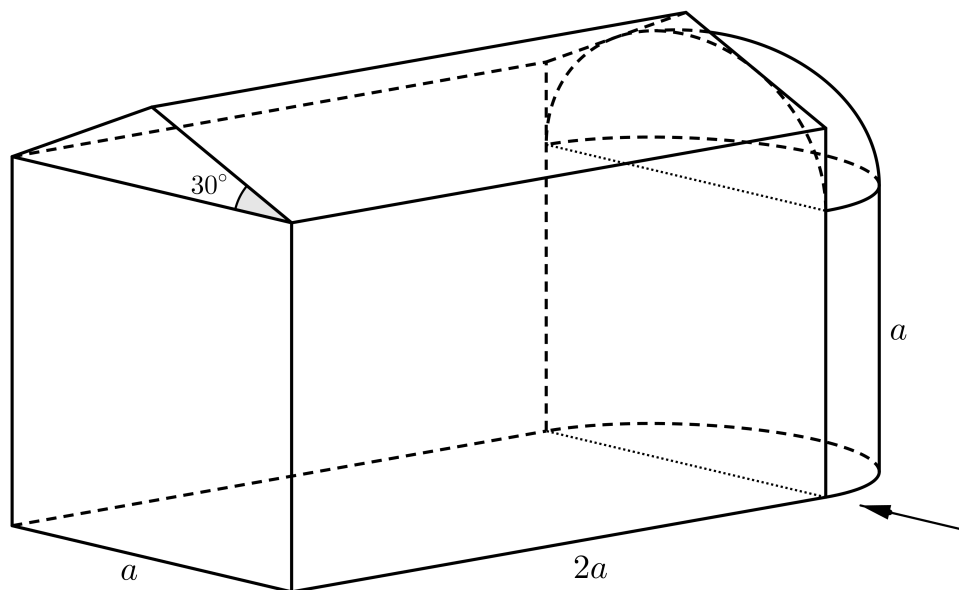


Slika 15

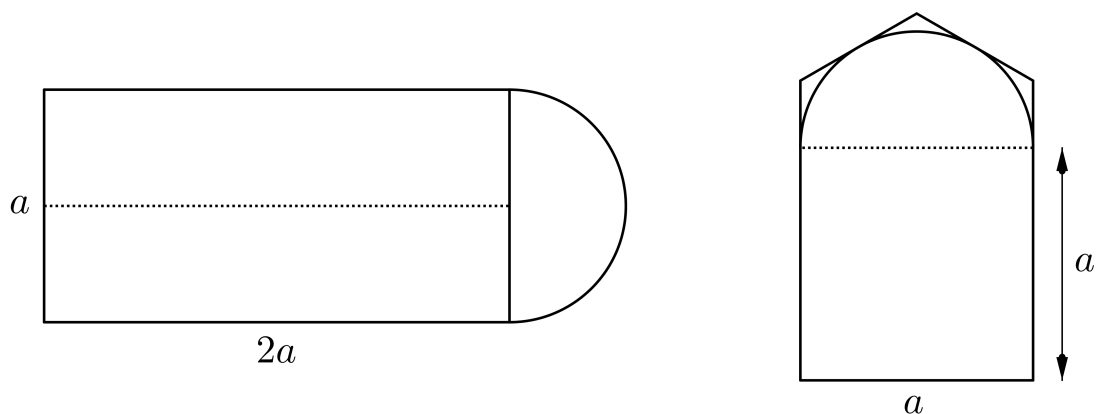
Razmislite kako biste pristupili analognom problemu u kojemu za unutrašnji i vanjski otvor prozora nemamo isto smanjivanje u horizontalnom i vertikalnom smjeru, tj. spojivši odgovarajuće točke, ne dobivamo kao na Slici 13 jednu točku presjeka, a dobiveno tijelo nije stožac, nego “klin”.

2 Obujam unutrašnjosti crkve

Konačno je došao na red izračun obujma čitave unutrašnjosti crkve. Na Slici 16 je donekle pojednostavljeni crtež crkve, a na Slici 17 prikazani su tlocrt crkve i vertikalni presjek na mjestu naznačenom strelicom (ravnina ikonostasa).



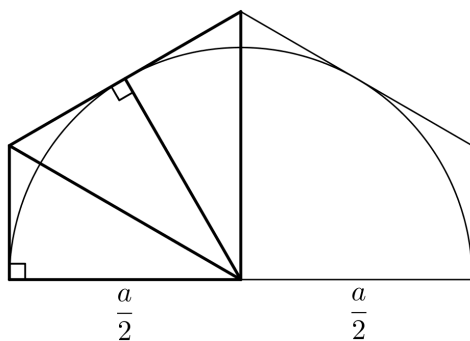
Slika 16



Slika 17

Kao osnovna veličina uzeta je širina crkve označena s a . Prema njoj su naznačene i neke od ostalih duljina u skladu sa stvarnim dimenzijama crkve. Nagib stropa, tj. unutrašnjeg dijela krova, približno je 30° u odnosu na horizontalnu ravninu. Apsidu u stražnjem dijelu crkve aproksimirali smo polovicom valjka iznad kojega je četvrtina kugle.

Na Slici 18 izdvojili smo samo gornji dio presjeka sa Slike 17 desno.

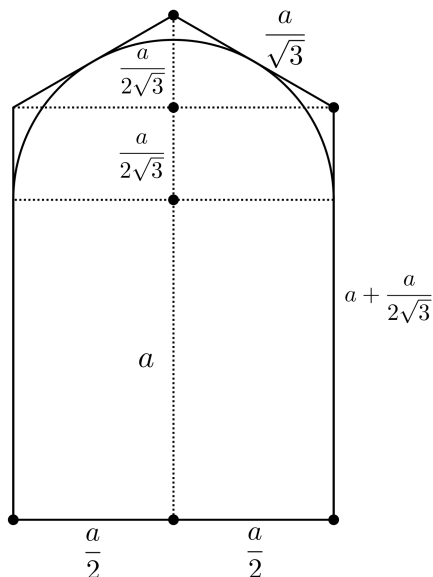


Slika 18

Tri trokuta istaknuta na Slici 18 su pravokutni trokuti s jednom katetom duljine $\frac{a}{2}$ i kutom nasuprot te katete jednakim

$$\frac{1}{2}(90^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2 \cdot 30^\circ) = 60^\circ.$$

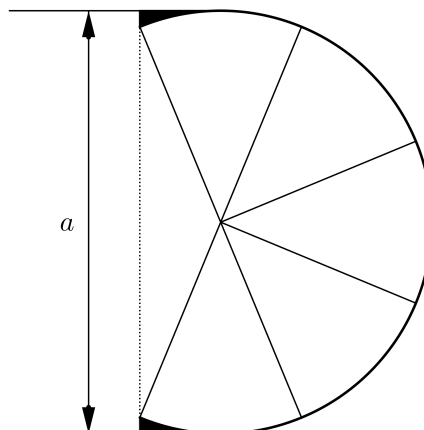
Dakle, hipotenuza im je $\frac{a}{\sqrt{3}}$, a druga kateta $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. Ponovimo još jednom isti presjek crkve, ali ovaj puta sa svim udaljenostima naznačenim na Slici 19.



Slika 19

Rastavimo unutrašnjost ove građevine na uniju kvadra, trostrane prizme, polovice valjka i četvrtine kugle. Dobivamo da je ukupni volumen jednak

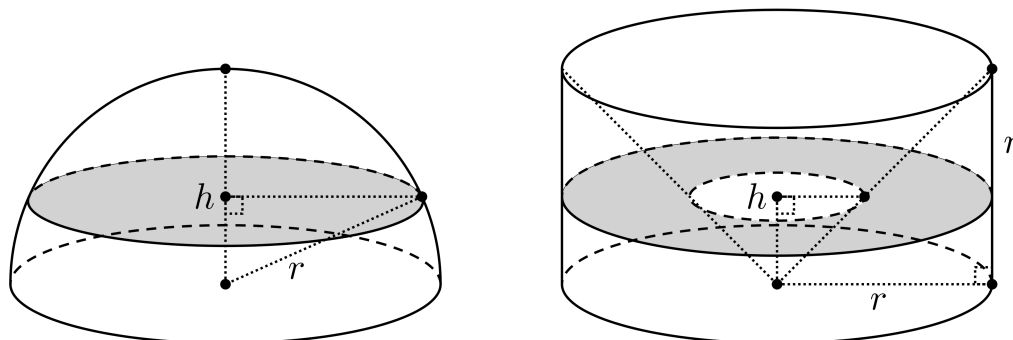
$$\begin{aligned} 2a^2\left(a + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}a \cdot \frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot 2a + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \cdot a + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 \pi \\ = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right)a^3 \approx 3.3896a^3. \end{aligned}$$



Slika 20

Ipak, mogli smo apsidu malo bolje modelirati. Na Slici 20 lijevo je prikazana fotografija svoda apside, a desno nešto točniji tlocrt svetišta crkve.

Vidimo da umjesto polovice valjka i četvrtine kugle trebamo uzeti dijelove kojima je odgovarajući središnji kut jednak $\frac{5}{8}$ punog kuta. Zato će nam biti potrebna formula za volumen kugline kapice koju možemo i sami brzo izvesti.



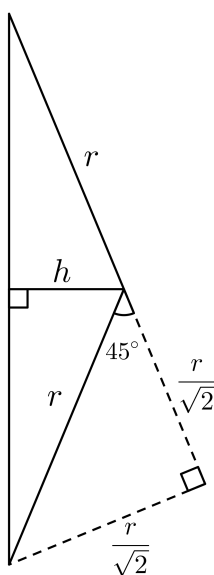
Slika 21

Na Slici 21 lijevo je polukugla polumjera r , a desno valjak kojemu su polumjer baze i visina također r . Iz tog valjka uklonjen je stožac s istom osi okrenut tako da mu je baza gornja ploha valjka, a vrh središte donje plohe valjka.

Presiječemo li polukuglu i izdubljeni valjak ravninom na proizvoljnoj visini h , $0 \leq h \leq r$, dobit ćemo istu površinu presjeka $(r^2 - h^2)\pi = r^2\pi - h^2\pi$. Već spomenuti Cavalierijev princip povlači da su volumeni dijelova ta dva tijela koji leže iznad bilo koje ravnine paralelne s bazom nužno jednaki. Uzmemo li istu ravninu na visini h koja je prikazana na slici, dobivamo da je volumen njome određene kugline kapice jednak volumenu gornjeg dijela valjka iz kojega smo uklonili krnji stožac, odnosno

$$r^2\pi(r - h) - \frac{1}{3}(r^2\pi \cdot r - h^2\pi \cdot h) = \frac{\pi}{3}(2r^3 - 3r^2h + h^3).$$

Treba nam još visina h izražena preko radijusa r koji je kod nas jednak $\frac{a}{2}$.

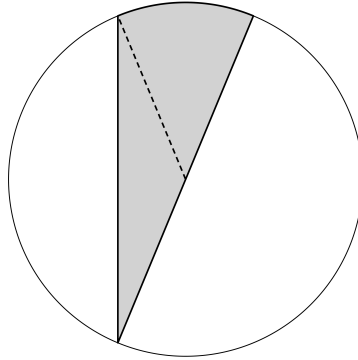


Slika 22

Na Slici 22 izdvojili smo relevantni jednakokračni trokut s kutom nasuprot osnovice jednakim $\frac{3}{8} \cdot 360^\circ = 135^\circ$. Iz sličnosti dvaju pravokutnih trokuta s jednim kutom 22.5° , dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{h}{\sqrt{r^2 - h^2}} &= \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{r + \frac{r}{\sqrt{2}}} \\ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 r^2 h^2 &= \frac{1}{2} r^2 (r^2 - h^2) \\ (4 + 2\sqrt{2})h^2 &= r^2 \\ h &= \frac{r}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} r \approx 0.3827r.\end{aligned}$$

Da bismo dobili točniji volumen apside, trebamo prijašnjem volumenu koji smo računali za polovicu valjka i četvrtinu kugle dodati volumen dijelova valjka i polukugle koji leže iznad krivolinijskog "trokuta" naznačenog na Slici 23.



Slika 23

Površinu tog lika dobivamo kao zbroj površina jednakokračnog trokuta s krakovima duljine r i kutom među njima 135° koja je prema Slici 22 jednaka $\frac{1}{2} r \frac{r}{\sqrt{2}}$ i površine kružnog isječka sa središnjim kutom 45° koja je $\frac{1}{8} r^2 \pi$. Dakle, dodatni volumen dijela valjka je

$$a \left(\frac{r^2}{2\sqrt{2}} + \frac{r^2 \pi}{8} \right) = \frac{2\sqrt{2} + \pi}{32} a^3 \approx 0.1866a^3.$$

Za dodatni dio unutar polukugle volumen računamo tako da iz četvrtine kugle uklonimo polovicu kugline kapice, pa dobivamo

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} r^3 \pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} (2r^3 - 3r^2 h + h^3) = \frac{\pi}{6} (3r^2 h - h^3) = \frac{\pi(10 + \sqrt{2})\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{384} a^3 \approx 0.0715a^3$$

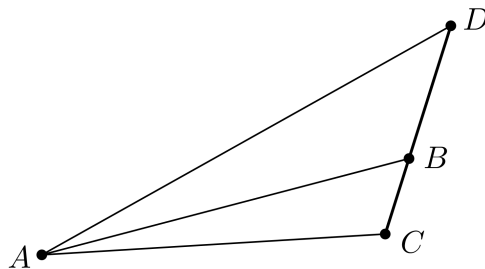
U nastavku ćemo ponovno koristiti stari model crkve u kojemu je pod svetišta polovica kruga.

3 Najveća udaljenost i najkraći put

Prijedimo za kraj s problema određivanja volumena na računanje udaljenosti točaka. Točnije, zanima nas koji par točaka u našem modelu crkve ima najveću udaljenost. Pri

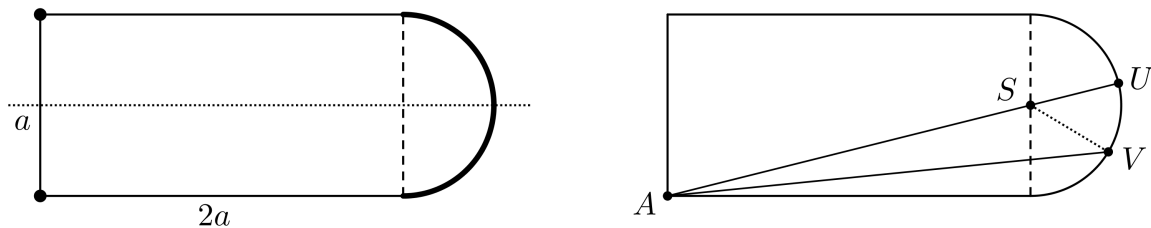
tome uzimamo u obzir točke u unutrašnjosti i na rubu, tj. na plohama koje tu unutrašnjost omeđuju. Naravno, ovdje i u nastavku zanemarujemo sve prepreke i zanima nas samo duljina dužine koja spaja određeni par točaka.

Jednostavna, ali korisna pomoćna tvrdnja kaže da točke A i B ne mogu biti na maksimalnoj udaljenosti ako je bar jedna od tih točaka sadržana unutar dužine kojoj su oba kraja u promatranoj crkvi. Naime, ako je kao na Slici 24 točka B u unutrašnjosti dužine $\overline{CD}$, onda je barem jedan od kutova $\angle ABC$ i $\angle ABD$ veći ili jednak od pravog kuta, pa je $|AC|$ ili $|AD|$ strogo veće od $|AB|$.



Slika 24

Kao blagi uvod u naš zadatak, riješimo najprije poseban slučaj kada zahtijevamo da su obje točke na podu.



Slika 25

Zbog pomoćne tvrdnje, moraju obje točke čija je udaljenost najveća moguća biti u skupu koji se sastoji od dva izdvojena vrha i točaka polukružnice podebljanih na Slici 25 lijevo.

Udaljenost dviju točaka te polukružnice je najviše a . Zbog simetrije je dovoljno promotriti maksimalnu udaljenost točke A na Slici 25 desno od točaka na polukružnici. Neka je S središte te polukružnice, točka U sjecište pravca AS s polukružnicom i V bilo koja druga točka polukružnice. Tada je zbog nejednakosti trokuta

$$|AV| < |AS| + |SV| = |AS| + |SU| = |AU|.$$

Stoga je maksimalna udaljenost dviju točaka na podu jednaka

$$\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} a.$$

Vratimo se sada općenitom problemu. Iz pomoćne tvrdnje odmah slijedi da točke za koje se postiže maksimalna udaljenost moraju biti iz skupa $V \cup k \cup \ell$, gdje smo s k označili četvrtinu sfere, s ℓ polukružnicu, a $V = \{A, A', B, B', C, D, D', E, E', F\}$ kao na Slici 26.

a pravci AD , BE , CF okomiti su na tu ravninu. Zato je za svaku točku X iz $k \cup \ell$

$$|AX| > |DX|, \quad |BX| > |EX|, \quad |CX| > |FX|.$$

Dakle, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je točka iz V u skupu $\{A, B, C\}$.

Neka je X po volji točka iz ℓ , a Y po volji točka iz k . Pomoću nejednakosti trokuta i Pitagorinog teorema pokazujemo da vrijedi

$$|AX| \leq |AS| + \frac{a}{2} = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} a \approx 2.56a,$$

$$|AY| \leq |AT| + \frac{a}{2} = \sqrt{(2a)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} a \approx 2.79a,$$

$$|BX| < |BS| + \frac{a}{2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(a + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} \approx 2.93a,$$

$$|BY| < |BT| + \frac{a}{2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2} \approx 2.58a,$$

$$|CY| < |CT| + \frac{a}{2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{a}{2} \approx 2.58a,$$

$$|PX| \stackrel{(*)}{\leq} |PS| + \frac{a}{2} = \frac{5}{2} a,$$

$$|CX| = \sqrt{|CP|^2 + |PX|^2} = \sqrt{\left(a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + |PX|^2} \stackrel{(*)}{\leq} \sqrt{\left(a + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} \approx 2.96a.$$

Jednakost u $(*)$ postiže se samo za točku X koja raspolavlja luk ℓ .

Usporedbom dobivenih ograda, zaključujemo da je najveća udaljenost između točke C i polovišta luka ℓ i ta udaljenost iznosi otprilike $2.96a$. Nema drugih parova točaka na toj udaljenosti.

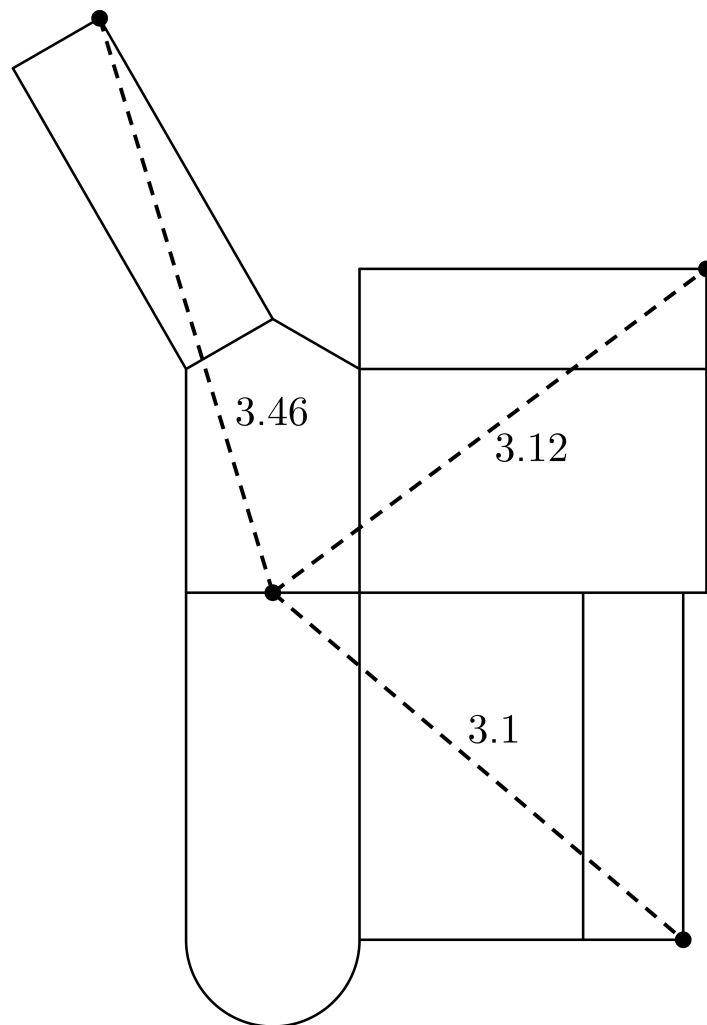
Završimo ovu priču jednim zabavnim problemom. Mrav je ušao u crkvu na vrata što je točka P na Slici 26 i želi se popeti do točke F na istoj slici. Mrav ne može letjeti, ali može hodati po podu, zidovima i svodu. Koji je najkraći put kojim mrav treba ići i koliko je taj put dug?

Radi jednostavnosti zapisa, uzmimo ovdje da je $a = 1$. Razvijmo model crkve kao mrežu u ravnini pri čemu apsidalni zid i svod zasad zanemarujemo.

Na Slici 27 vidimo dobivenu mrežu. Napomenimo da se ista strana koja omeđuje unutrašnjost crkve može na toj slici pojaviti više puta.

Koristimo temeljnu činjenicu da je najkraći put između dviju točaka ravnine dužina koja spaja te točke. Zajedno s nejednakošću trokuta, to povlači da ćemo najkraći put za mrava dobiti samo u slučaju kada se njegova putanja preslika na odgovarajućem dijelu naše mreže u dužinu. Postoje tri opcije puta kojim mrav može ići:

- (1) prednji zid uključujući trokutasti zabat, pa strop,
- (2) prednji zid, bočni zid, pa strop,
- (3) pod, bočni zid, pa strop.



Slika 27

Iako bismo lako mogli egzaktno zapisati duljinu odgovarajuće dužine u mreži u svakom od ta tri slučaja, odlučili smo naprosto ovu mrežu nacrtati u GeoGebri (u kojoj su nastali svi crteži iz ovog članka). Tada je lako očitati da je najkraća opcija za mrava ona pod brojem 3 koju smo ucrtali na Slici 28.

Premda se intuitivno čini jasnim, obrazložimo još, gledajući Sliku 26, zašto se mrav u svom najkraćem putu neće doticati zida i svoda apside.

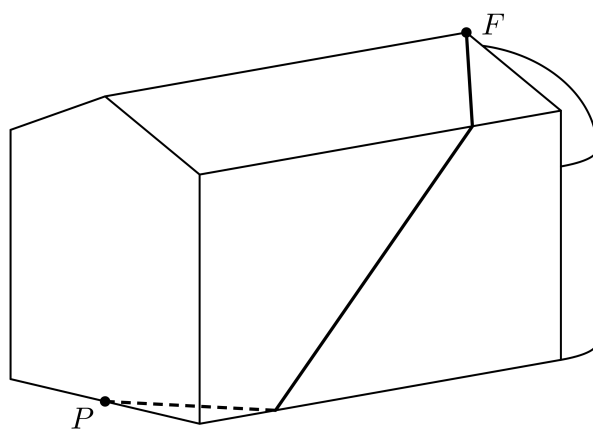
Za proizvoljnu točku X polukružnice ℓ imamo

$$|PX| + |FX| \geq |PD| + |FD| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} > 3.71,$$

pa bi bilo koji mravov put koji bi uključivao točku iz ℓ morao biti još dulji i zato ne može biti minimalan.

Slično, iz mreže crkve vidimo da je najkraći mravov put koji ide od P do donjeg ruba polukupole k onaj koji završava u krajevima te polukružnice i duljine je veće od $\min\{2.69, 2.5\}$. No, svaka točka te polukružnice udaljena je od F za $\sqrt{(1/\sqrt{3})^2 + (1/2)^2} > 0.76$ i $2.5 + 0.76 > 3.2$, pa opet vidimo da nijedan mravov put minimalne duljine ne može tuda prolaziti.

Ni točke na prednjem rubu polukupole, tj. luku iznad ikonostasa, mrav neće posjetiti. To najlakše vidimo tako da pridodamo presjek sa Slike 17 desno na odgovarajuća mjesta u našoj mreži na Slici 27.



Slika 28