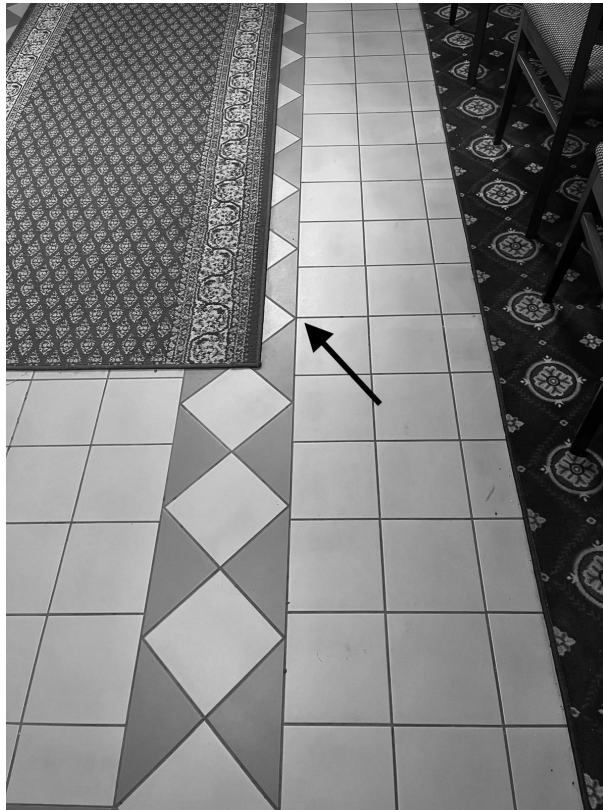


Jedna fotografija poda

Tomislav Pejković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
pejkovic@math.hr

Nedavno sam prisustvovao liturgiji u grkokatoličkoj crkvi svetih Ćirila i Metoda na zagrebačkom Gornjem gradu. Spustivši pogled s lijepog ikonostasa, uočio sam poprilično uobičajen crkveni pod prekriven keramičkim pločicama. Pažnju mi je privukla naizgled nevažna činjenica da se na jednom mjestu poklapaju vrhovi tamnih trokutastih pločica i svijetlih kvadratnih pločica. Izbrojao sam pločice do idućeg poklapanja i na brzinu uslikao iduću fotografiju.



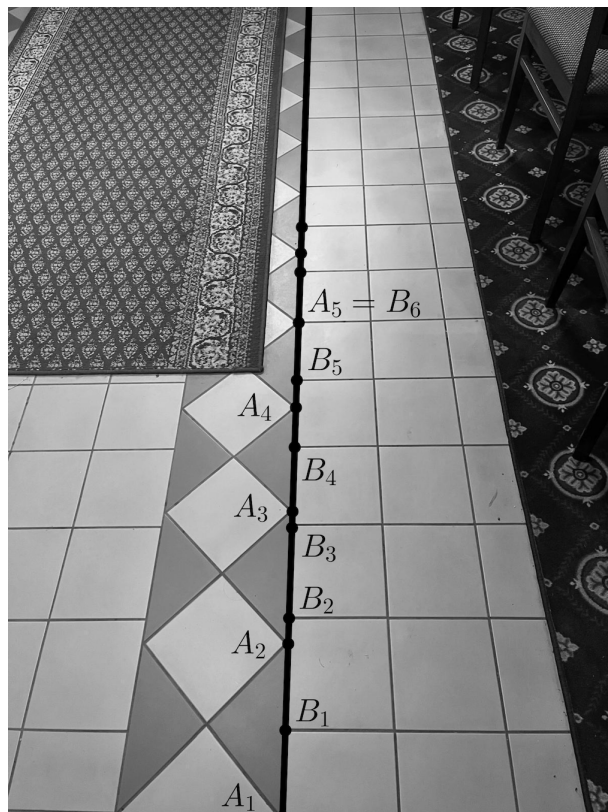
Slika 1: Fotografija poda i naznačeno podudaranje vrhova pločica

Vrativši se kući, pogledao sam fotografiju i primijetio da sam u brzini fotografijom obuhvatio samo prvo poklapanje vrhova (na Slici 1 istaknuto strelicom). Ako sam dobro zapamtio, do idućeg takvog podudaranja bilo je 12 tamnih trokutastih pločica, odnosno 17 svijetlih kvadratnih pločica. Prvo pitanje koje sam si postavio bilo je mogu li te brojeve nekako grafički i numerički potvrditi iz same slike.

1 Rekonstrukcija točaka izvan slike

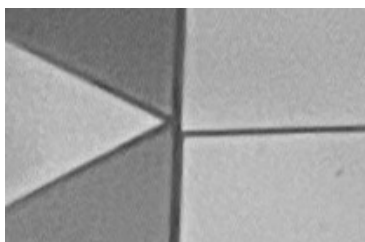
Kako bismo ovaj problem malo preciznije matematički modelirali, pretpostavljamo sada i u nastavku da su sve svijetle pločice kvadratne i istih dimenzija. Iz bordure u kojoj se pojavljuju, možemo vidjeti da je svaka tamna pločica dobivena kao polovica takvog kvadrata prerezana jednom dijagonalom. Također ćemo zanemariti uske fuge među pločicama jer ih možemo uzdužno podijeliti popola i pridodati pločicama između kojih se nalaze.

Označimo vrhove uz stranice tamnih trokuta redom $A_1, A_2, A_3 \dots$ kao na Slici 2. Na istoj slici, označeni su i odgovarajući vrhovi svijetlih četverokuta s $B_1, B_2, B_3, \dots$



Slika 2: Fotografija poda na kojoj su označeni pojedini čvorovi

Ako pretpostavimo da je $A_5 = B_6$, je li zaista A_{17} tako blizu B_{23} da bi, promatrajući u stvarnosti ili na fotografiji, izgledalo kao da se te dvije točke podudaraju? Primijetimo da iz malih dimenzija fotografije, na Slici 2 može izgledati kao da su A_{10} i B_{13} ista točka, no u stvarnosti, ili povećavši taj dio fotografije kao na Slici 3, vidimo da su ti vrhovi samo dosta blizu, ali očito različiti. Takvu situaciju u kojoj su fuge blizu, ali se ne poklapaju, pokušavaju svi keramičari izbjeći, no ovdje je zbog izbora uzorka bila neizbježna.



Slika 3: Uvećani dio fotografije na kojemu se vidi da se vrhovi A_{10} i B_{13} ne podudaraju

Možemo li, dakle, nekako iz same fotografije na Slici 2 rekonstruirati položaj točaka A_{17} i B_{23} ? Kako bismo to učinili, pitamo se što je ostalo isto na fotografiji u odnosu na stvarni pod crkve. Jasno je da udaljenosti nisu sačuvane jer je jedna pločica u stvarnosti veća od čitave fotografije otisnute na stranici časopisa. Također ne možemo reći ni da su udaljenosti jednoliko smanjene u nekom mjerilu (primjerice da 30 cm u stvarnosti odgovara 1 cm na fotografiji) jer bi tada sve svijetle pločice na fotografiji bile kvadrati. Nije ostao očuvan ni omjer u kojemu točka dijeli dužinu kojoj pripada. To vidimo primjerice iz toga što A_2 nije polovište $\overline{A_1A_3}$ i B_2 nije polovište $\overline{B_1B_3}$. No, premda nisu ostale sačuvane duljine ni djelišni omjeri, začuđujuća, ali vrlo važna činjenica je da su ostali sačuvani omjeri djelišnih omjera četiriju kolinearnih točaka. Prije preciznije definicije, primijetimo još jedno svojstvo koje smo zbog očiglednosti preskočili, ali bez njega ne bismo mogli ni započeti ovu diskusiju. Naime, pravci u stvarnosti ostali su pravci i na fotografiji, tj. bilo koje tri kolinearne točke preslikale su se u kolinearne točke.

Za četiri kolinearne točke A, B, C, D , njihov *dvoomjer* se definira kao

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD},$$

gdje su AC, BD, BC, AD orijentirane duljine, tj. odaberemo po volji jedan smjer na pravcu AB kao pozitivan, a drugi je onda negativan te je npr. $AC = -CA$.

Označimo s X' točku na podu crkve koja odgovara točki X na fotografiji. Očito je $B'_1B'_2 = B'_2B'_3 = B'_3B'_4$, pa je

$$(B'_1B'_2B'_3B'_4) = \frac{B'_1B'_3 \cdot B'_2B'_4}{B'_2B'_3 \cdot B'_1B'_4} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{4}{3} = 1.333 \dots$$

Izmjerite sada sami s pomoću ravnala udaljenosti odgovarajućih točaka na Slici 2 i izračunajte $(B_1B_2B_3B_4)$. Ja ću koristiti udaljenosti koje sam dobio ubacivši fotografiju u program Geogebra u kojemu su (do)crtane sve slike u ovom članku. Dobivamo

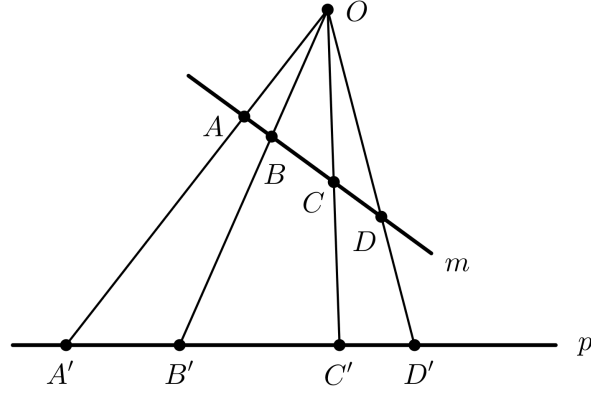
$$(B_1B_2B_3B_4) = \frac{B_1B_3 \cdot B_2B_4}{B_2B_3 \cdot B_1B_4} = \frac{4.84 \cdot 4.03}{2.19 \cdot 6.67} = 1.335 \dots$$

I uz greške zbog idealizacije situacije i pogreške mjerenja, ovo se čini kao dosta uvjerljiv poticaj da pokušamo dokazati tvrdnju o očuvanju dvoomjera. Tko želi, može ponoviti račun za neku drugu četvorku kolinearnih točaka na fotografiji.

Teorem (Pappus). *Ako su A, B, C, D četiri točke na pravcu m , a A', B', C', D' točke pravca p takve da pravci AA', BB', CC', DD' svi prolaze istom točkom O , onda je $(ABCD) = (A'B'C'D')$.*

Možemo zamišljati da na Slici 4 pravac p predstavlja popločani pod, m ekran mobitela, a O naše oko (ili, malo realističnije, m paralelu s mobitelom, a O objektiv mobitela kojim je uslikana fotografija).

Dokaz. Označimo s v udaljenost točke O od pravca m . Za trokute ACO, BCO, ADO, BDO površinu prikažemo na dva različita načina: polovica umnoška duljina stranice i visine ili polovica umnoška duljina stranica i sinusa kuta između njih. Slično napravimo



Slika 4: Ilustracija Papusova teorema

i za trokute $A'C'O$, $B'C'O$, $A'D'O$, $B'D'O$ te dobivamo

$$\begin{aligned}
 (ABCD) &= \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot v \cdot \frac{1}{2}BD \cdot v}{\frac{1}{2}BC \cdot v \cdot \frac{1}{2}AD \cdot v} = \frac{P(ACO) P(BDO)}{P(BCO) P(ADO)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}AO \cdot CO \sin \angle AOC \cdot \frac{1}{2}BO \cdot DO \sin \angle BOD}{\frac{1}{2}BO \cdot CO \sin \angle BOC \cdot \frac{1}{2}AO \cdot DO \sin \angle AOD} \\
 &= \frac{\sin \angle AOC \cdot \sin \angle BOD}{\sin \angle BOC \cdot \sin \angle AOD} = \frac{\sin \angle A'OC' \cdot \sin \angle B'OD'}{\sin \angle B'OC' \cdot \sin \angle A'OD'} \\
 &= \frac{P(A'C'O) P(B'D'O)}{P(B'C'O) P(A'D'O)} = \frac{A'C' \cdot B'D'}{B'C' \cdot A'D'} = (A'B'C'D'). \quad \square
 \end{aligned}$$

Primijenimo li sada Papusov teorem primjerice za točke A_1, A_3, A_5, A_{17} , dobivamo iz

$$\begin{aligned}
 (A_1 A_3 A_5 A_{17}) &= \frac{A_1 A_5 \cdot A_3 A_{17}}{A_3 A_5 \cdot A_1 A_{17}} = \frac{A_1 A_5 (A_3 A_5 + A_5 A_{17})}{A_3 A_5 (A_1 A_5 + A_5 A_{17})} = \frac{11.69(4.45 + A_5 A_{17})}{4.45(11.69 + A_5 A_{17})} \\
 (A'_1 A'_3 A'_5 A'_{17}) &= \frac{A'_1 A'_5 \cdot A'_3 A'_{17}}{A'_3 A'_5 \cdot A'_1 A'_{17}} = \frac{4 \cdot 14}{2 \cdot 16} = \frac{7}{4} = 1.75
 \end{aligned}$$

da je $A_5 A_{17} (= 9.998) = 3.79 B_1 B_2$.

Slično, za točke $B_1, B_3, B_6 = A_5, B_{23}$ vrijedi

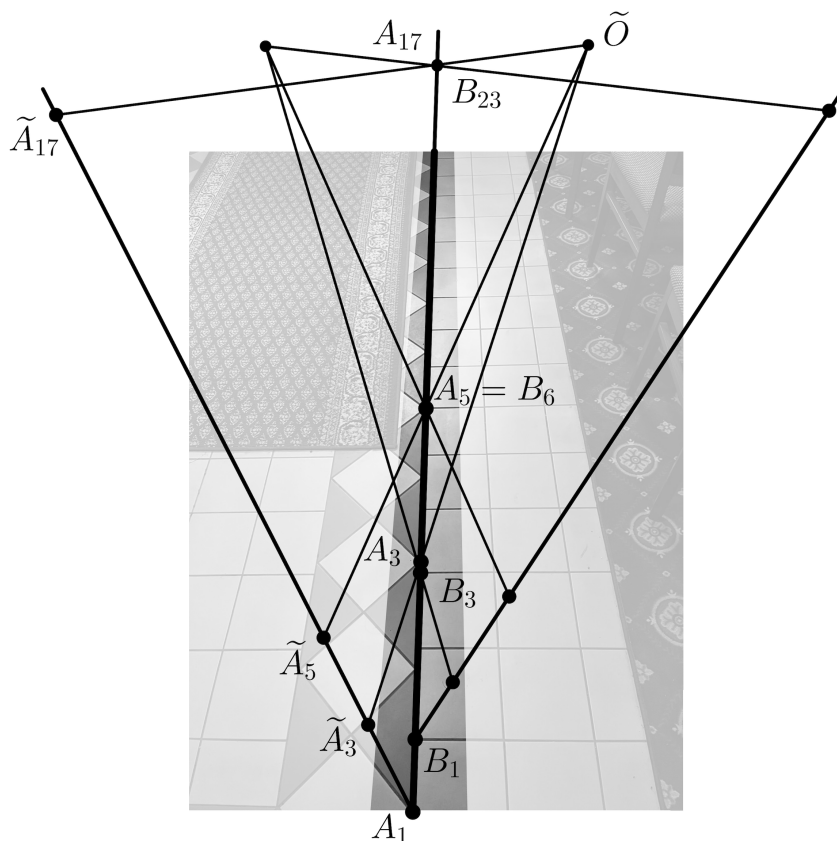
$$\begin{aligned}
 (B_1 B_3 B_6 B_{23}) &= \frac{B_1 B_6 (B_3 B_6 + B_6 B_{23})}{B_3 B_6 (B_1 B_6 + B_6 B_{23})} = \frac{9.6(4.77 + B_6 B_{23})}{4.77(9.6 + B_6 B_{23})} \\
 (B'_1 B'_3 B'_6 B'_{23}) &= \frac{B'_1 B'_6 \cdot B'_3 B'_{23}}{B'_3 B'_6 \cdot B'_1 B'_{23}} = \frac{5 \cdot 20}{3 \cdot 22} = 1.515 \dots,
 \end{aligned}$$

pa je $B_6 B_{23} = A_5 B_{23} (= 9.942) = 3.77 B_1 B_2$. Zato je

$$A_{17} B_{23} = -A_5 A_{17} + A_5 B_{23} = -0.02 B_1 B_2.$$

Osim numeričke potvrde da su točke A_{17} i B_{23} blizu, u to se možemo uvjeriti i geometrijski. Koristeći Papusov teorem, konstruiramo iz točaka A_1, A_3, A_5 točku A_{17} . Najprije na nekom polupravcu iz A_1 različitom od $A_1 A_2$ odredimo neke točke $\tilde{A}_3, \tilde{A}_5, \tilde{A}_{17}$ takve da je

$$A_1 \tilde{A}_3 : \tilde{A}_3 \tilde{A}_5 : \tilde{A}_5 \tilde{A}_{17} = 2 : 2 : 12.$$



Slika 5: Konstrukcija točaka A_{17} i B_{23} (neki dijelovi fotografije posvijetljeni su radi preglednosti)

Sjecište pravaca $A_3\tilde{A}_3$ i $A_5\tilde{A}_5$ nazovemo $\tilde{O}$, pa je presjek $\tilde{O}\tilde{A}_{17}$ i A_1A_2 točka A_{17} . Slično iz B_1, B_3, B_6 konstruiramo B_{23} . Na Slici 5 ponovno vidimo da su točke A_{17} i B_{23} blizu.

Prikazana metoda je korisna jer pomoću nje možemo izvući različite informacije s fotografije (vidi npr. [3] za općenitije rezultate i neke primjene), pa i nadopuniti dijelove koji nedostaju, kao što smo se upravo uvjerali. Ipak, za provjeru da su točke A_{17} i B_{23} blizu, nije nam uopće trebala fotografija.

2 Racionalne aproksimacije broja $\sqrt{2}$

Označimo li s a duljinu stranice kvadratne pločice u stvarnosti, vidimo da je $B'_k B'_\ell = (\ell - k)a$ za prirodne brojeve k i ℓ .

Iz pruge na Slici 1 vidimo da dvije tamne trokutaste pločice i dvije polovice svijetlog kvadrata čine kvadrat sa stranicom duljine $A'_1 A'_2$. Izjednačavanjem površina, slijedi $A'_1 A'_2 = a\sqrt{2}$, pa smo ovako i geometrijski pokazali Pitagorin teorem u ovom posebnom slučaju jednakokračnog pravokutnog trokuta. Dobivamo da je $A'_k A'_\ell = (\ell - k)a\sqrt{2}$.

Sada vidimo da uz pretpostavku $A'_5 = B'_6$, tvrdnja da je A'_{17} blizu B'_{23} zapravo kaže da je $12a\sqrt{2}$ približno jednako $17a$, tj. da je $\frac{17}{12}$ dobra aproksimacija broja $\sqrt{2}$. Zaista, $\sqrt{2} = 1.41421\dots$, dok je $\frac{17}{12} = 1.41666\dots$.

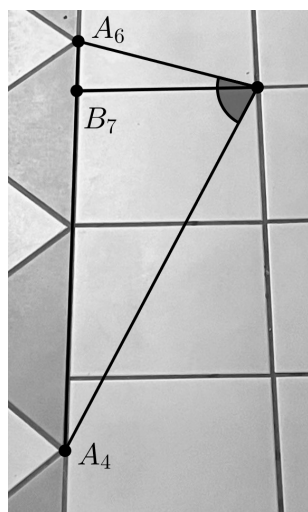
Broj $\sqrt{2}$ je iracionalan, pa je $A'_k \neq B'_\ell$ za $(k, \ell) \neq (5, 6)$. Možemo naći racionalne brojeve po volji blizu $\sqrt{2}$. Primjerice, $\frac{707}{500} = \frac{1414}{1000} = 1.414$ je bliže $\sqrt{2}$, nego što je to $\frac{17}{12}$, no nazivnik drugog razlomka je puno manji uz ipak poprilično dobru kvalitetu aproksimacije.

Za određivanje dobrih racionalnih aproksimacija iracionalnim brojevima koristimo verižne razlomke. *Jednostavni verižni razlomak* realnog broja α je izraz oblika

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

koji obično pišemo u obliku $[a_0, a_1, a_2, a_3, \dots]$ jer tako zauzima manje mjesta. Ovdje je a_0 cijeli broj, dok su $a_1, a_2, a_3, \dots$ prirodni brojevi. Verižni razlomak može biti konačan ili beskonačan. Uzmemo li samo konačan početni dio, dobivamo takozvane *konvergente* $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, racionalne brojeve za koje se pokazuje da su vrlo blizu početnom broju α . Zainteresirane čitatelje upućujemo da o teoriji verižnih razlomaka pročitaju više u [1, §8], te se informiraju o primjenama u kriptografiji [1, §9.3], kalendaru [2] i glazbi [5].

Mi ćemo se usredotočiti samo na razvoj u verižni razlomak broja $\sqrt{2}$ jer će nam to pomoći da bolje razumijemo zašto je primjerice $\frac{17}{12}$ dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$, a $\frac{707}{500}$ nije. Za razvoj od $\sqrt{2}$ u verižni razlomak, poslužit će nam jednostavna jednakost $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ koju pomoću Euklidovog teorema o visini na hipotenuzu, ili direktno iz sličnosti nekih trokuta, možemo geometrijski interpretirati kao tvrdnju da je kut naznačen na Slici 6 u stvarnosti (tj. na podu, a ne na fotografiji) pravi kut.



Slika 6: Geometrijska interpretacija jednakosti $(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1^2$

Odmah imamo da je

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \sqrt{2} - 1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}} = [2, 2, 2, \dots],$$

tj. $\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots]$.

Označimo li s

$$\frac{p_n}{q_n} = [1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n \text{ dvojki}}] \quad \text{za } n \geq 0,$$

konvergente od $\sqrt{2}$, vidimo da su konvergente od $1 + \sqrt{2}$ dane s $\frac{p_n}{q_n} + 1 = \frac{p_n + q_n}{q_n}$ za $n \geq 0$. Lako je pokazati da niz $(q_n)_{n \geq 0}$ zadovoljava rekurziju

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{za } n \geq 2, \quad (2.1)$$

uz početne vrijednosti $q_0 = 1$, $q_1 = 2$. Naime, uzmemo li da je niz zapravo zadan tom rekurzivnom relacijom, imamo

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = 2 + \frac{1}{\frac{q_n}{q_{n-1}}} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}}} = \dots = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{q_1}{q_0}}}}} = \underbrace{[2, 2, \dots, 2]}_{n+1},$$

pa je to zaista konvergenta od $1 + \sqrt{2}$. Zato, primijetivši da su razlomci skraćeni, imamo

$$q_{n+1} = p_n + q_n, \quad \text{tj.} \quad p_n = q_{n+1} - q_n.$$

Dakle, niz $(q_n)_{n \geq 0}$ počinje s 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, ... i zove se Pellov niz. Ime Johna Pella, engleskog matematičara iz 17. stoljeća, susretat ćemo i u nastavku ovog članka. Iako Pell nije doprinio definiranju ili otkrivanju svojstava tih pojmova, zasluge mu je pogrešno pripisao veliki švicarski matematičar Leonhard Euler, a nazivi su ostali uvriježeni do danas.

Iz prethodnog vidimo da niz $(\frac{q_{n+1}-q_n}{q_n})_{n \geq 0}$ konvergenti od $\sqrt{2}$ započinje s

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \dots$$

Kažemo da je racionalan broj $\frac{a}{b}$, $b > 0$, *dobra aproksimacija* iracionalnog broja α ako vrijedi

$$\left| \alpha - \frac{a}{b} \right| = \min \left\{ \left| \alpha - \frac{x}{y} \right| : x, y \in \mathbb{Z}, 0 < y \leq b \right\}.$$

Drugim riječima, nijedan racionalan broj s manjim nazivnikom nema manju pogrešku aproksimacije nego što je ona razlomka $\frac{a}{b}$.

Pokazat ćemo da su sve dobre aproksimacije od $\sqrt{2}$ u skupu konvergenti i sekundarnih konvergenti tog broja. Ovdje su sekundarne konvergente razlomci oblika $\frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}}$ za $n \geq 1$. Zbog jednostavnosti ćemo raditi s $\alpha = 1 + \sqrt{2}$, ali odmah vidimo da to ne mijenja tvrdnju jer je $\frac{a}{b}$ dobra aproksimacija od $1 + \sqrt{2}$ ako i samo ako je $\frac{a}{b} - 1 = \frac{a-b}{b}$ dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$. Konvergente od $1 + \sqrt{2}$ su $\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} + 1$, a sekundarne konvergente su

$$\frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} = \frac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} + 1.$$

Kako bismo pokazali da su sve dobre aproksimacije od $1 + \sqrt{2}$ u uniji nizova

$$\left(\frac{q_{n+1}}{q_n} \right)_{n \geq 0} \quad \text{i} \quad \left(\frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} \right)_{n \geq 1},$$

moramo najprije proučiti kako ti nizovi rastu i padaju u skupu realnih brojeva.

Koristeći rekurziju (2.1) za q_n , imamo da je za $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} q_n q_{n-2} - q_{n-1}^2 &= (2q_{n-1} + q_{n-2})q_{n-2} - (2q_{n-2} + q_{n-3})q_{n-1} = (-1)(q_{n-1}q_{n-3} - q_{n-2}^2) \\ &= \dots = (-1)^{n-2}(q_2 q_0 - q_1^2) = (-1)^{n-2}(5 \cdot 1 - 2^2) = (-1)^n \end{aligned} \quad (2.2)$$

i slično

$$q_{n+1}q_{n-2} - q_n q_{n-1} = 2(-1)^n. \quad (2.3)$$

Dodefiniramo li $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$, vidimo da rekurzija za q_n te prethodna dva identiteta vrijede za $n \geq 0$. Sada iz (2.2) imamo

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = \frac{q_n q_{n-2} - q_{n-1}^2}{q_{n-1} q_{n-2}} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_{n-2}},$$

a analogno dobivamo i

$$\begin{aligned} \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{(-1)^{n+1}}{(q_n + q_{n-1})q_{n-1}}, \\ \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} - \frac{q_{n+1}}{q_n} &= \frac{(-1)^n}{(q_n + q_{n-1})q_n}, \\ \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} - \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} &= \frac{(-1)^n}{(q_n + q_{n-1})q_{n+1}}. \end{aligned}$$

Stoga za paran n vrijedi

$$\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} < \frac{q_n + q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}} < \frac{q_{n+1}}{q_n} < \frac{q_{n+2}}{q_{n+1}} < \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} < \frac{q_n}{q_{n-1}}$$

i razlika svaka dva susjedna razlomka $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ je najmanja moguća, tj. $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{db}$. Pogledajmo kako to izgleda za prvih nekoliko članova niza konvergenti i sekundarnih konvergenti od $1 + \sqrt{2}$:

$$\frac{2}{1} < \frac{7}{3} < \frac{12}{5} < \frac{41}{17} < \frac{70}{29} < \frac{239}{99} < \frac{408}{169} < \dots < \frac{169}{70} < \frac{99}{41} < \frac{29}{12} < \frac{17}{7} < \frac{5}{2}.$$

Odredimo udaljenosti konvergenti i sekundarnih konvergenti od broja za čiji su verižni razlomak definirane. Pomoću rekurzije za članove niza $(q_n)_{n \geq 0}$, lako se provjeri da je

$$1 + \sqrt{2} = \frac{(1 + \sqrt{2})q_{n+1} + q_n}{(1 + \sqrt{2})q_n + q_{n-1}},$$

a zatim, koristeći (2.2), dobivamo

$$(1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1}}{q_n} = \sqrt{2} - \frac{q_n + q_{n-1}}{q_n} = \frac{(-1)^n}{((1 + \sqrt{2})q_n + q_{n-1})q_n}, \quad (2.4)$$

$$(1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} = \sqrt{2} - \frac{2q_n}{q_n + q_{n-1}} = \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{((1 + \sqrt{2})q_n + q_{n-1})(q_n + q_{n-1})}. \quad (2.5)$$

Vidimo da se niz konvergenti približava $1 + \sqrt{2}$ naizmjenično odozdo i odozgo, a svaka je konvergenta bliža $1 + \sqrt{2}$, nego što je to bila prethodna konvergenta. Isto vrijedi i za niz sekundarnih konvergenti.

Pretpostavimo sada da je $\frac{a}{b}$ dobra aproksimacija od $1 + \sqrt{2}$ koja nije ni konvergenta ni sekundarna konvergenta od $1 + \sqrt{2}$. Uzmimo da je $\frac{a}{b} > 1 + \sqrt{2}$, a drugi slučaj se promatra potpuno analogno. Tada postoje uzastopne (obične ili sekundarne) konvergente $\frac{P}{Q}$ i $\frac{P'}{Q'}$ od $1 + \sqrt{2}$ takve da je

$$1 + \sqrt{2} < \frac{P}{Q} < \frac{a}{b} < \frac{P'}{Q'} \quad \text{i} \quad P'Q - PQ' = 1.$$

Sada je

$$\frac{1}{Q'b} \leq \frac{P'}{Q'} - \frac{a}{b} < \frac{P'}{Q'} - \frac{P}{Q} = \frac{1}{Q'Q}$$

te smo dobili da je $Q < b$ i $|1 + \sqrt{2} - \frac{P}{Q}| < |1 + \sqrt{2} - \frac{a}{b}|$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\frac{a}{b}$ dobra aproksimacija od $1 + \sqrt{2}$.

Pokazali smo da su sve dobre aproksimacije od $1 + \sqrt{2}$ u nizu običnih i sekundarnih konvergenti toga broja. Kako bismo odredili koji od članova tih dvaju nizova zaista jesu dobre aproksimacije, iskoristit ćemo formule (2.4) i (2.5) za njihove udaljenosti od $1 + \sqrt{2}$. Iz tih formula odmah vidimo da je konvergenta $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ bliža $1 + \sqrt{2}$, nego sve konvergente i sekundarne konvergente s manjim nazivnikom. Dovoljno je provjeriti

$$\left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| < \left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_n}{q_{n-1}} \right| \quad \text{i} \quad \left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| < \left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_n + q_{n-1}}{q_{n-1} + q_{n-2}} \right|,$$

što vrijedi jer je niz $(q_n)_{n \geq -1}$ rastući.

S druge strane, sekundarna konvergenta $\frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}}$ bit će dobra aproksimacija od $1 + \sqrt{2}$ ako i samo ako je bliža tome broju nego što je konvergenta s najvećim nazivnikom manjim od $q_n + q_{n-1}$, tj. ako i samo ako je

$$\begin{aligned} \left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1} + q_n}{q_n + q_{n-1}} \right| &\leq \left| (1 + \sqrt{2}) - \frac{q_{n+1}}{q_n} \right| \\ \frac{\sqrt{2}}{((1 + \sqrt{2})q_n + q_{n-1})(q_n + q_{n-1})} &\leq \frac{1}{((1 + \sqrt{2})q_n + q_{n-1})q_n} \\ q_n \sqrt{2} &\leq q_n + q_{n-1} \\ \frac{q_n}{q_{n-1}} &\leq 1 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

a to prema (2.4) vrijedi ako i samo ako je n neparan.

Zato su sve konvergente i svaka druga sekundarna konvergenta (svaka manja od $1 + \sqrt{2}$) dobre aproksimacije od $1 + \sqrt{2}$. Stoga su dobre aproksimacije od $\sqrt{2}$ upravo oblika

$$\frac{q_{n+1} - q_n}{q_n} \text{ za sve } n \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{q_{n+1} - q_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} \text{ za } n \text{ neparan.}$$

Niz dobrih aproksimacija od $\sqrt{2}$ započinje s

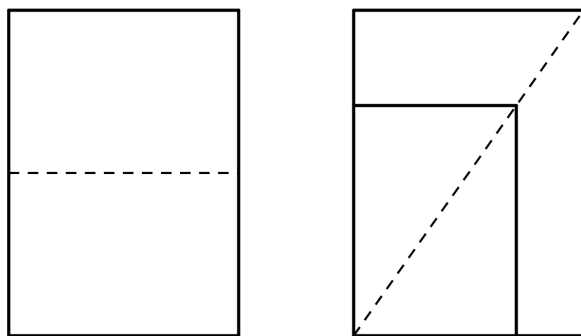
$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{24}{17}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{140}{99}, \frac{239}{169}, \dots$$

Razlomak $\frac{17}{12} = \frac{p_3}{q_3}$ s kojim smo započeli ovu priču je konvergenta i dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$. Iz (2.4) imamo

$$\sqrt{2} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{-1}{((1 + \sqrt{2})q_3 + q_2)q_3} = \frac{-1}{(17 + 12\sqrt{2})12} = -0.0024\dots$$

Činjenica da se $i \frac{7}{5}$ pojavljuje u nizu dobrih aproksimacija, objašnjava nam situaciju opisanu uz Sliku 3.

Razlomak $\frac{99}{70} = \frac{p_5}{q_5}$ za koji je $|\sqrt{2} - \frac{99}{70}| < 10^{-4}$ ne javlja se u promatranoj crkvi na podu koji je za to prekratak. Ipak, često ga susrećemo u svakodnevicu. Naime, dimenzije papira formata A4 su 210×297 mm. Kako je $\frac{297}{210} = \frac{99}{70}$, vidimo da je za sve praktične svrhe, omjer visine i širine takvog lista papira upravo $\sqrt{2} : 1$. U to se lako možete uvjeriti tako da preklopite jedan list papira formata A4 na pola paralelno s kraćom stranicom i taj preklopljeni papir postavite u kut drugog papira koji niste savili tako da im se rubovi kod jednog vrha poklapaju (Slika 7). Dijagonale će im se također poklopiti što nije teško provjeriti, primjerice, presavijanjem po dijagonali većeg papira. Dakle, uzevši da se duljine stranica papira odnose u omjeru $x : 1$, iz sličnosti velikog i malog pravokutnika dobivamo $x : 1 = 1 : \frac{x}{2}$, tj. $x^2 = 2$ i $x = \sqrt{2}$.



Slika 7: Presavijanjem papira formata A4 popola, dobivamo papir formata A5 koji mu je sličan

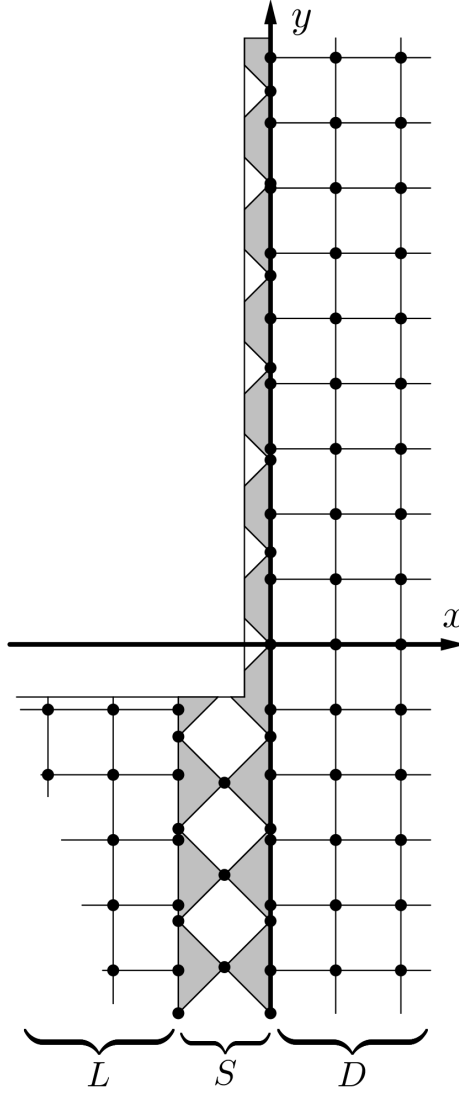
3 Cjelobrojne udaljenosti čvorova

Pogledajmo sada jedan naizgled nepovezani problem koji si također možemo prirodno postaviti promatramo li našu fotografiju poda (Slika 1). Uzmemo li da je duljina stranice kvadratne pločice jednaka 1, koji se čvorovi (sjecišta fuga) na dijelu poda vidljivom na fotografiji nalaze na cjelobrojnoj udaljenosti?

Situacija je prikazana na Slici 8. Radi lakšeg označavanja čvorova, uvodimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je točka A'_5 , tj. B'_6 ishodište, pa primjerice B'_7 ima koordinate $(0, 1)$.

Odmah vidimo da postoji mnogo parova čvorova koji su trivijalno na cjelobrojnoj udaljenosti, npr. $(1, 1)$ i $(1, -3)$ ili $(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$ i $(0, -\sqrt{2})$. To su čvorovi koji leže na istoj fugi među pločicama. Zato će nas u nastavku zanimati samo *netrivijalni parovi čvorova*, tj. oni koji se ne nalaze uzduž iste fuge i udaljenost im je cijeli broj. Razmotrit ćemo ovaj problem kroz više slučajeva u ovisnosti o području na kojemu se nalaze traženi čvorovi.

Sve vidljive čvorove možemo rasporediti u sljedeće skupove (koristimo vizualno grupi-



Slika 8: Prikaz poda i čvorova vidljivih na fotografiji

ranje u desne, lijeve i srednje točke):

$$D = \{(x, y) : x \in \{0, 1, 2\}, y \in \{-5, -4, \dots, 9\}\},$$

$$L = \{(-2 - \sqrt{2}, -2), (-2 - \sqrt{2}, -1)\} \cup$$

$$\{(x, y) : x \in \{-1 - \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}, y \in \{-5, -4, \dots, -1\}\},$$

$$S = S_L \cup S_S \cup S_D,$$

$$S_L = \{(-\sqrt{2}, u\sqrt{2}) : u \in \{-4, -3, -2, -1\}\},$$

$$S_S = \{(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + u\sqrt{2}) : u \in \{-3, -2, -1\}\},$$

$$S_D = \{(0, u\sqrt{2}) : u \in \{-4, -3, \dots, 6\}\}.$$

Slučaj 1. Pretpostavimo da su oba čvora (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u D ili da su oba u L . Iz Pitagorinog teorema znamo da je kvadrat udaljenosti tih dviju točaka jednak $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$, pa treba riješiti jednadžbe $1 + y^2 = z^2$ i $4 + y^2 = z^2$ u skupu prirodnih brojeva. Za $y \geq 2$ je $y^2 < y^2 + 1 < y^2 + 4 < (y + 1)^2$ te odmah vidimo da navedene jednadžbe nemaju rješenja u prirodnim brojevima.

Slučaj 2. Slučaj kada je jedan čvor u L , a jedan u S , zbog simetrije s obzirom na pravac $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, možemo uključiti u slučaj kada je jedan čvor u D , a jedan u S , pa sada promatramo tu mogućnost. Neka je čvor (x, y) iz D .

Podslučaj 2.1. Neka je drugi čvor $(0, u\sqrt{2})$ u S_D . Budući da tražimo netrivialne parove, mora biti $x = 1$ ili $x = 2$, pa dobivamo jednačbe $1 + (y - u\sqrt{2})^2 = z^2$ i $4 + (y - u\sqrt{2})^2 = z^2$. Zbog iracionalnosti od $\sqrt{2}$, odmah vidimo da je $u = 0$ ili $y = 0$. No, za $u = 0$, dobivamo upravo Slučaj 1 koji smo već obradili, pa možemo uzeti da je $y = 0$. Dobili smo jednačbe $1 + 2u^2 = z^2$ i $4 + 2u^2 = z^2$.

Jednačba $4 + 2u^2 = z^2$ povlači najprije da je z paran te stavimo $z = 2w$, a zatim i da je u paran, pa uzmemo $u = 2v$. Nakon dijeljenja te jednačbe s 4, dobivamo $1 + 2v^2 = w^2$ što je istog tipa kao i prva jednačba. Dakle, dovoljno je promatrati $1 + 2u^2 = z^2$, tj. $z^2 - 2u^2 = 1$.

Ovo je takozvana *Pellova jednačba* i odmah vidimo da je usko vezana uz problem bliskih aproksimacija broja $\sqrt{2}$ koji smo netom proučavali. Naime, $z^2 - 2u^2 = 1$ možemo zapisati kao

$$\frac{z}{u} - \sqrt{2} = \frac{1}{u(z + u\sqrt{2})}. \quad (3.1)$$

Nije smanjenje općenitosti uzeti da su z i u pozitivni, u protivnom ih se može zamijeniti s njima suprotnim brojevima koji također zadovoljavaju početnu Pellovu jednačbu. Iz (3.1) vidimo da je $\frac{z}{u}$ vrlo blizu $\sqrt{2}$. Štoviše, pokažimo da je $\frac{z}{u}$ dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji neki racionalan broj $\frac{X}{Y}$ takav da je $1 \leq Y \leq u$ i $|\sqrt{2} - \frac{X}{Y}| < \frac{z}{u} - \sqrt{2}$. Ne može biti $Y = u$ jer bi zbog $\frac{X}{Y} \neq \frac{z}{u}$ imali

$$\begin{aligned} \frac{1}{Y} &\leq \left| \frac{X}{Y} - \frac{z}{u} \right| = \left| \left(\frac{X}{Y} - \sqrt{2} \right) + \left(\sqrt{2} - \frac{z}{u} \right) \right| \\ &\leq \left| \sqrt{2} - \frac{X}{Y} \right| + \left| \sqrt{2} - \frac{z}{u} \right| < \frac{2}{u(z + u\sqrt{2})} < \frac{1}{u} = \frac{1}{Y}, \end{aligned}$$

što je nemoguće. Dakle, $Y + 1 \leq u$ te imamo

$$\begin{aligned} |X - Y\sqrt{2}| &< Y \left| \frac{z}{u} - \sqrt{2} \right| = \frac{Y}{u(z + u\sqrt{2})} < \frac{1}{z + u\sqrt{2}} < \frac{1}{2}, \\ |X + Y\sqrt{2}| &\leq |X - Y\sqrt{2}| + 2Y\sqrt{2} < 2Y\sqrt{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

pa stoga vrijedi

$$\begin{aligned} |X^2 - 2Y^2| &= |(X - Y\sqrt{2})(X + Y\sqrt{2})| < \frac{Y(2Y\sqrt{2} + \frac{1}{2})}{u(z + u\sqrt{2})} \\ &< \frac{Y(2Y\sqrt{2} + \frac{1}{2})}{u \cdot 2u\sqrt{2}} \leq \frac{2Y^2\sqrt{2} + \frac{1}{2}Y}{2(Y + 1)^2\sqrt{2}} < 1. \end{aligned}$$

Odavde bi slijedilo $X^2 - 2Y^2 = 0$, što zbog $Y \neq 0$ i iracionalnosti od $\sqrt{2}$ nije moguće.

Pokazali smo da je $\frac{z}{u}$ dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$, pa po prethodno dokazanim rezultatima slijedi da je $\frac{z}{u}$ konvergenta ili sekundarna konvergenta u razvoju $\sqrt{2}$ u verižni razlomak. No, uspoređujući (3.1) s formulama (2.4) i (2.5), vidimo da samo za konvergente veće od $\sqrt{2}$ vrijedi (3.1), pa su pozitivna rješenja od $z^2 - 2u^2 = 1$ parovi $(z, u) \in \{(3, 2), (17, 12), (99, 70), \dots\}$. Nije teško pokazati, primjerice koristeći rekursiju (2.1) za q_n , da ta rješenja imaju oblik $z + u\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^{2k}$ za k prirodan broj.

Uz ograničenja na koordinate elemenata iz D i S_D , to nam daje sljedeće netrivialne parove čvorova s cjelobrojnim udaljenostima:

$$\{(1, 0), (0, -2\sqrt{2})\}, \{(1, 0), (0, 2\sqrt{2})\}, \{(2, 0), (0, -4\sqrt{2})\}, \{(2, 0), (0, 4\sqrt{2})\}.$$

Za čvor iz L i čvor iz S_L očito nema traženih parova.

Podslučaj 2.2. Čvor (x, y) je u D , a uzmimo sada da je drugi čvor $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + u\sqrt{2})$ u S_S . Dobivamo jednadžbu

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{2}}{2} - u\sqrt{2}\right)^2 &= z^2, \\ (x^2 + y^2 + 2u^2 - 2u + 1) + (x + y - 2yu)\sqrt{2} &= z^2. \end{aligned}$$

Budući da je $\sqrt{2}$ iracionalan, imamo $x + y - 2yu = 0$, tj. $y = \frac{x}{2u-1}$. Prisjetimo se da je ovdje $x \in \{0, 1, 2\}$, $u \in \{-3, -2, -1\}$.

Za $x = 0$ je $y = 0$ i množenjem jednadžbe $2u^2 - 2u + 1 = z^2$ s 2, dobivamo $(2u - 1)^2 - 2z^2 = -1$. Uskoro ćemo prokomentirati ovakvu jednadžbu, ali za sada je dovoljno provjeriti da za $u \in \{-3, -2, -1\}$ dobivamo $2u^2 - 2u + 1 \in \{25, 13, 5\}$, što je kvadrat samo za $u = -3$. Dobili smo netrivialni par čvorova $(0, 0)$ i $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{2})$ na udaljenosti 5.

Za $u \in \{-3, -2, -1\}$, broj $2u - 1 \in \{-7, -5, -3\}$ ne dijeli $x \in \{1, 2\}$, pa nema rješenja jednadžbe. Primijetimo da bi za $u = 0$ imali da su $x = 2$, $y = -2$, $z = 3$ cijeli brojevi, pa je udaljenost čvorova $(2, -2)$ i $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ cjelobrojna. Nažalost, druga točka nije vidljiva jer je pokrivena samim kutom tepiha.

Za L i S_S nema zadovoljavajućih parova čvorova.

Podslučaj 2.3. Kao i prije, prvi čvor (x, y) je u D , a drugi čvor $(-\sqrt{2}, u\sqrt{2})$ je sada u S_L . Imamo jednadžbu

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{2})^2 + (y - u\sqrt{2})^2 &= z^2 \\ (x^2 + y^2 + 2u^2 + 2) + 2(x - yu)\sqrt{2} &= z^2. \end{aligned}$$

Zbog iracionalnosti broja $\sqrt{2}$, mora biti $x - yu = 0$, pa je $x^2 + y^2 + 2u^2 + 2 = z^2$, odnosno $y^2u^2 + y^2 + 2u^2 + 2 = z^2$, tj. $(y^2 + 2)(u^2 + 1) = z^2$.

Za $x = 2$ je $(y, u) \in \{(-2, -1), (2, 1), (-1, -2), (1, 2)\}$, no nijedan od tih parova ne daje cijeli broj z .

Za $x = 1$ je $(y, u) \in \{(-1, -1), (1, 1)\}$, ali ponovno z nije cijeli.

Za $x = 0$ je $y = 0$ ili $u = 0$. Uvjet $u = 0$ povlači $y^2 + 2 = z^2$, što nema cjelobrojnih rješenja, pa preostaje promatrati slučaj $y = 0$. Dobivamo jednadžbu $2(u^2 + 1) = z^2$, odnosno, nakon supstitucije $z = 2w$, jednadžbu $u^2 - 2w^2 = -1$. Ovo je takozvana *pellovska jednadžba* i potpuno analogno kao kod Pellove jednadžbe koja se pojavila u Podslučaju 2.1, pokazuje se (uzmemo li $|u|$ i $|w|$ umjesto u i w) da je $\frac{u}{w}$ dobra aproksimacija od $\sqrt{2}$ za koju je

$$\frac{u}{w} - \sqrt{2} = \frac{-1}{w(u + w\sqrt{2})},$$

te usporedbom s formulama (2.4) i (2.5), zaključujemo da je $\frac{u}{w}$ konvergenta manja od $\sqrt{2}$, tj. $(|u|, |w|) \in \{(1, 1), (7, 5), (41, 29), \dots\}$. Slično kao i za Pellovu jednadžbu, lako se vidi da su rješenja generirana s $(1 + \sqrt{2})^{2k-1}$ za k prirodan broj. Mnogo više o općenitim Pellovim i pellovskim jednadžbama možete naći u [1, §§10.3, 10.5].

U našoj situaciji, u obzir dolazi samo $u = -1$, no točke $(0, 0)$ i $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ leže na istoj fugi, pa nam taj par nije zanimljiv.

Budući da točka $(-\sqrt{2}, 0)$ simetrična točki $(0, 0)$ s obzirom na pravac $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ uopće nije vidljiva, ne postoji ni netrivialni par traženih točaka od kojih je jedna iz L , a druga iz S_D .

Slučaj 3. Za jedan čvor iz L i jedan čvor iz D , dobivamo jednadžbu oblika $(x + \sqrt{2})^2 + y^2 = z^2$. Ponovno iz iracionalnosti od $\sqrt{2}$ slijedi da je $x = 0$, ali $y^2 + 2 = z^2$, tj. $(z - y)(z + y) = 2$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Slučaj 4. Neka su sada oba čvora u S . Zbog simetrije s obzirom na pravac $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, možemo pretpostaviti da je jedan čvor u S_D , pa imamo dva podslučaja.

Podslučaj 4.1. Pretpostavimo da je drugi čvor u S_L . Promatramo jednadžbu $(\sqrt{2})^2 + (u\sqrt{2})^2 = z^2$, tj. $2 + 2u^2 = z^2$. Nakon supstitucije $z = 2w$, dobivamo $u^2 - 2w^2 = -1$, a ovu pellovsku jednadžbu već smo riješili u Podslučaju 2.3. Vidimo da ovdje dolaze u obzir samo rješenja $(1, 1)$ i $(7, 5)$. Prvo daje trivijalne parove čvorova, a drugo odgovara parovima čvorova oblika $\{(-\sqrt{2}, t\sqrt{2}), (0, (t + 7)\sqrt{2})\}$, gdje je $t \in \{-4, -3, -2, -1\}$.

Podslučaj 4.2. Uzmimo sada da je drugi čvor u S_S . Jednadžba

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + u\sqrt{2}\right)^2 = z^2$$

ekvivalentna je $(2u + 1)^2 - 2z^2 = -1$ što nam daje rješenja $u = 0$ i $u = 3$. Za $u = 0$ dobivamo trivijalne parove čvorova, a za $u = 3$ parove čvorova oblika

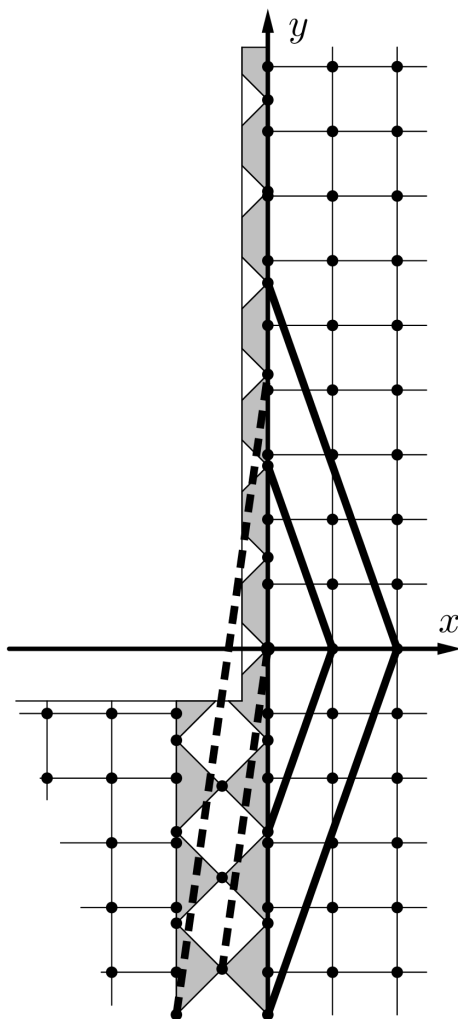
$$\left\{ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} + t\sqrt{2} \right), (0, (t + 3)\sqrt{2}) \right\}, \quad \text{gdje je } t \in \{-3, -2, -1\}.$$

Ovi parovi bili su očekivani jer su njihove spojnice srednjice u odgovarajućim trokutima kojima je jedna stranica dobivena spajanjem parova iz prethodnog podslučaja.

Ovim smo završili potragu za čvorovima s cjelobrojnim udaljenostima. Za sve pronađene netrivialne parove čvorova, podebljano smo na Slici 9 naznačili dužine koje ih spajaju. Za iscrtkane dužine postoje još po dvije ili tri dužine koje se iz njih dobivaju translacijom za višekratnik vektora $(0, \sqrt{2})$ i koje radi preglednosti nisu prikazane na toj slici.

Na fotografiji poda (Slika 1) koja je bila glavni poticaj za pisanje ovog članka, nalaze se još mnogi detalji koji bi mogli poslužiti kao polazišta za zanimljiva i bogata istraživanja dostupna i učenicima. Primjerice, s geometrijskog gledišta, mogli bismo proučavati elipse u koje su se preslikale kružnice na desnom tepihu ili pak modificiranu Pickovu formulu za rešetku na lijevom tepihu. S aspekta teorije brojeva, prirodno se javljaju rezultati poput teorema o tri udaljenosti iz područja diofantskih aproksimacija. Ne bi bilo teško naći ni materijala za pitanja iz kombinatorike, npr. prebrojavanja odgovarajućih putova u cjelobrojnoj mreži.

Ipak, ovdje ćemo priču za sada završiti. Čitatelje koji će šetati Gričem pozivam da bar nakratko uđu u crkvu svetih Ćirila i Metoda. Nemojte svoju pažnju zaustaviti samo na podu crkve, koji uostalom nije posebno značajan, nego podignite pogled i promotrite vrlo lijepi ikonostas. Na njemu, osim umjetničkih i vjerskih tema, također možete uočiti neke matematičke motive i probleme. Ali to je već neka druga priča.



Slika 9: Podebljano su prikazane netrivialne dužine cjelobrojne duljine

Literatura

- [1] A. Dujella, *Teorija brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.
- [2] A. Dujella, Verižni razlomci i problem kalendara, *Matematika i škola* **1** (1999), no. 2, 74–77.
- [3] I. Garić, *Evesov teorem o projektivnim invarijantama*, diplomski rad, PMF, Zagreb, 2018., dostupno na <https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A5939>
- [4] D. Palman, *Projektivna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.
- [5] Z. Šikić, Dvanaest veličanstvenih (Zašto oktava ima 12 polutonova), *Poučak* **100** (2024), 9–26.