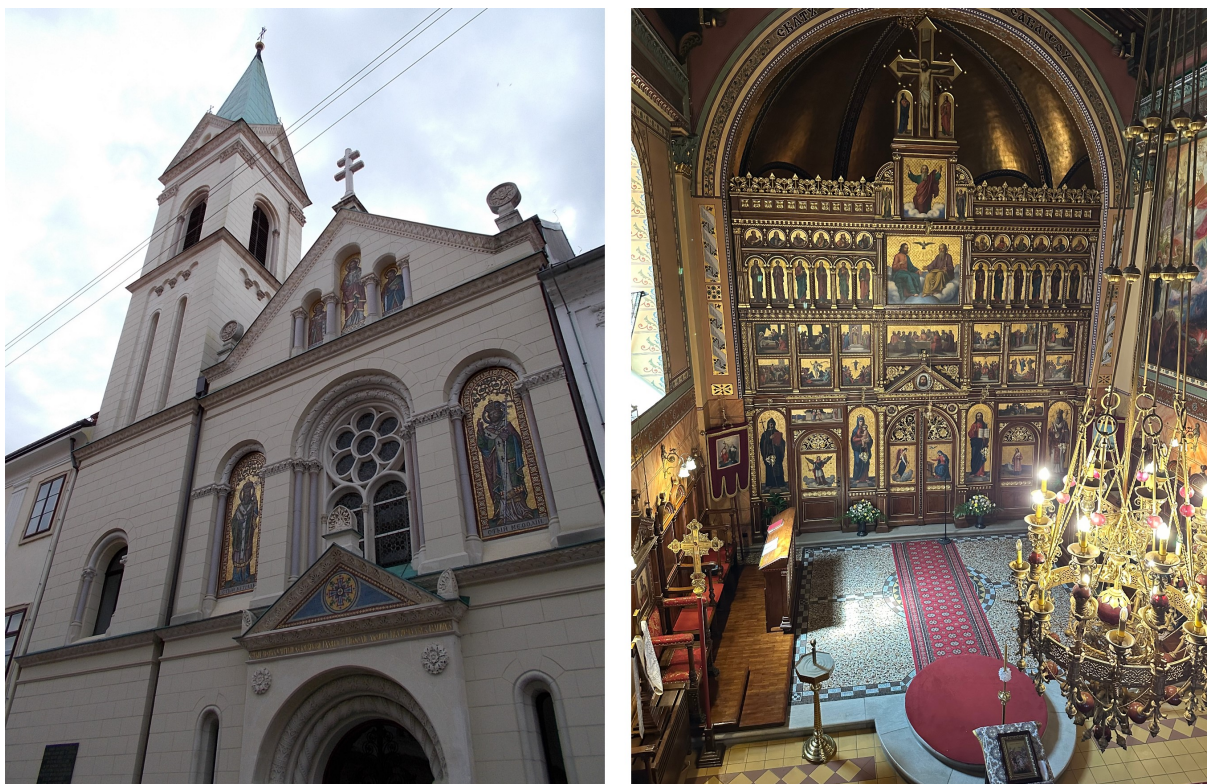


Kružnice u konkatedrali

Tomislav Pejković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
pejkovic@math.hr

Grkokatolička konkatedrala svetih Ćirila i Metoda na zagrebačkom Gornjem Gradu sa sjemeništem čini dio kompleksa koji potječe iz druge polovine 18. stoljeća. Sadašnja crkva izgrađena je nakon potresa 1880. prema projektu Hermanna Bolléa. Isti je arhitekt projektirao i ikonostas, najvažniji dio namještaja sakralne građevine kršćana bizantskog obreda. Ikonostas je oslikana pregrada koja odjeljuje svetište crkve od prostora za vjernike.

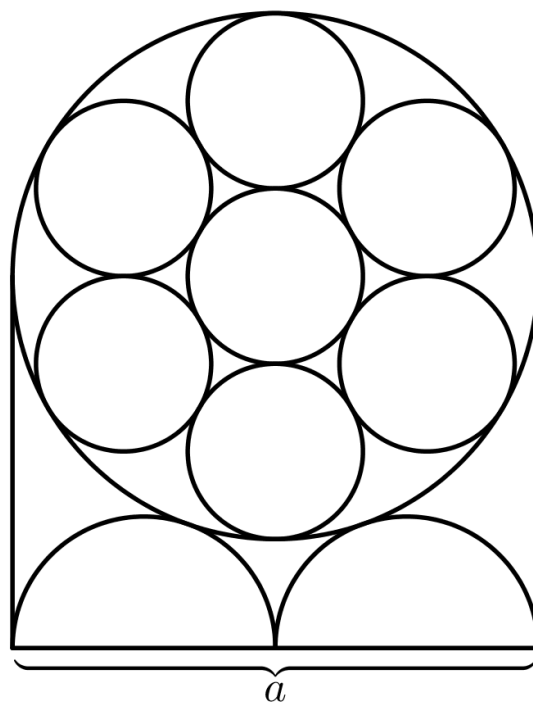


Slika 1: Grkokatolička konkatedrala u Zagrebu

Proučit ćemo dvije teme inspirirane arhitekturom i unutrašnjim uređenjem crkve svetih Ćirila i Metoda. U ovom ćemo radu promatrati neke geometrijske probleme povezane s upisanim kružnicama. U idućem članku klasificirat ćemo tipove frizova, tj. ornamenata na traci koji ostaju nepromijenjeni pri uzdužnom pomicanju te trake. Izdvojit ćemo primjere frizova koje prepoznamo na podu, zidovima, svodu i ikonostasu ove crkve.

1 Jednostavniji problemi

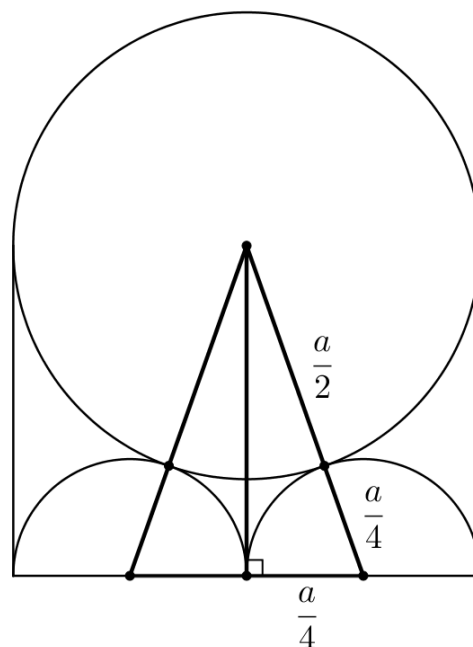
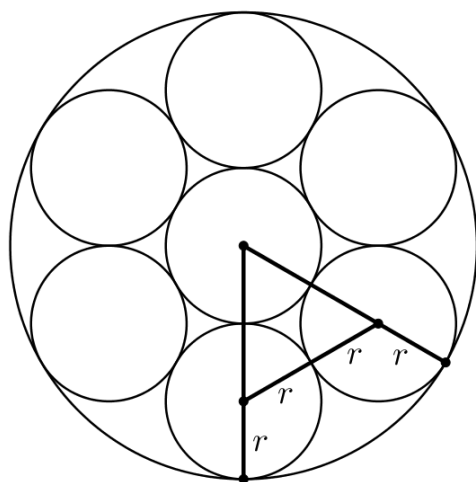
Za početak promotrimo jedan zadatak inspiriran rozetom na pročelju crkve. Na Slici 2 lijevo je fotografija te rozete iznutra, dok je desno pojednostavljeni geometrijski prikaz.



Slika 2: Fotografija i skica rozete

Ako je širina prozora a , treba odrediti visinu prikazanog dijela prozora te polumjere svih kružnica koje se pojavljuju na slici.

Očito je da je polumjer polukružnica jednak $\frac{a}{4}$, a polumjer velike kružnice $\frac{a}{2}$. Svaka od šest kružnica koje dodiruju veliku kružnicu ima isti radijus koji označimo r .



Slika 3

Trokut istaknut na Slici 3 lijevo je jednakokračan, a središnji kut, tj. kut nasuprot osnovici, jednak je $\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. Stoga je taj trokut jednakostraničan te vrijedi $\frac{a}{2} - r = 2r$, pa dobivamo da je radijus svake od sedam malih kružnica jednak $\frac{a}{6}$.

Primijenimo li Pitagorin teorem na pravokutni trokut na Slici 3 desno, vidimo da je visina tog dijela prozora jednaka

$$\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2} = a \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Prijedimo sada na kružnice koje susrećemo na ikonostasu. Naglasimo da su naši problemi inspirirani onim što vidimo na ikonostasu, ali smo situaciju pojednostavnili. Primjerice, zanemarujemo širine rubova i okvira. Čitatelji koji to žele, lako će dodavanjem takvih elemenata dobiti nešto realističnije, ali ne nužno i kompliciranije zadatke za vježbu.

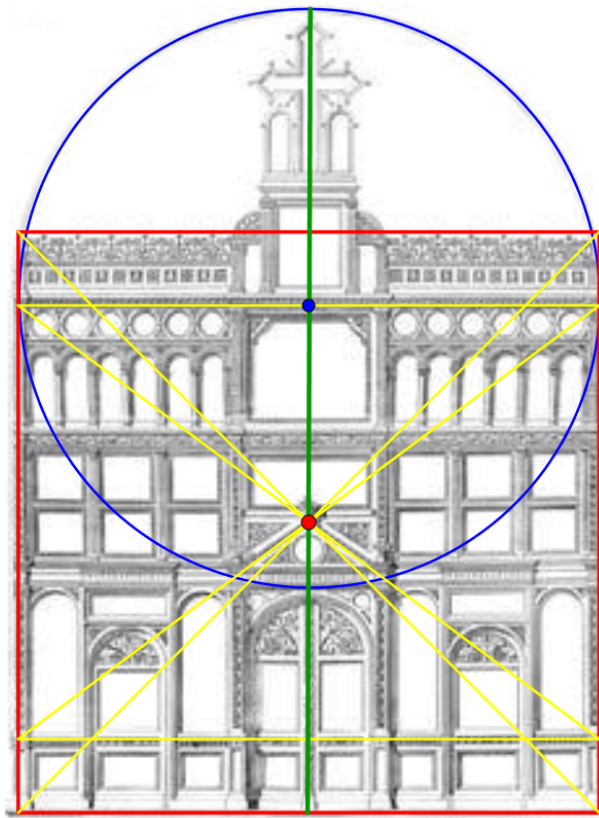


Slika 4: Ikonostas grkokatoličke konkatedrale

Prije naših problema, promotrimo na Slici 4 ikonostas koji je oslikao Epaminondas Buczewski. Nas trenutno zanima samo arhitektura ikonostasa koju je, kako smo rekli, osmislio Bollé.

U njegov originalni nacrt [2] na Slici 5 ucrtali smo crveni kvadrat koji obuhvaća glavni dio ikonostasa i njegovo središte te plavu kružnicu koja je određena lukom iznad ikonostasa. Os simetrije ucrtana je zelenom bojom, a ostale pomoćne dužine žutom. Ove dužine

vjerojatno su i Bolléu poslužile da odredi ključne točke za raščlambu pojedinih dijelova ikonostasa.



Slika 5: Bolléov nacrt ikonostasa na kojemu smo bojom označili najvažnije linije

Jedan od najvećih protivnika Bolléovih projekata u Hrvatskoj (pogotovo obnove stare zagrebačke katedrale) bio je povjesničar Gjuro Szabo koji u [6] ironično komentira Bolléa: “Pa uzmi lineale i šablone i udri restauriraj...!” Ostavljamo drugim strukama da prosude tko je u tom sukobu bio u pravu, a mi samo primjećujemo da Szabo nije bio sasvim korektan jer je Bollé u svom radu osim ravnalom, često baratao i šestarom. Barem za geometrijske zadaće koje mi promatramo, to je vrlo pogodno.

Na Slici 6 je isječak ikonostasa koji obuhvaća gornji dio središnjih vrata, tzv. carskih dveri, te zabat iznad njih. Na istoj slici prikazan je i raspored geometrijskih likova motiviran tim centralnim dijelom ikonostasa.

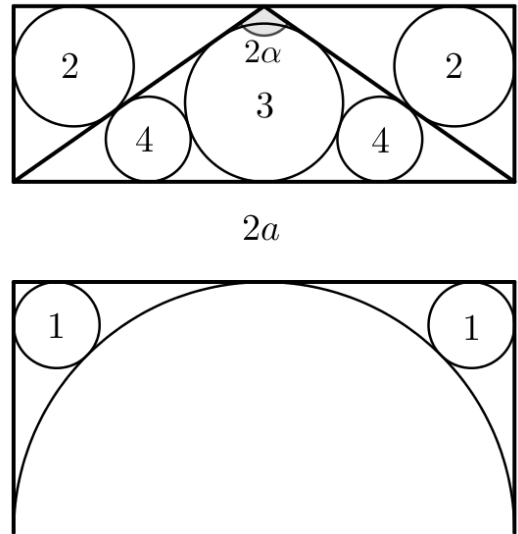
Zadana je duljina $2a$ koja predstavlja širinu carskih dveri i zabatni kut mjere 2α koja je u stvarnosti oko 110° . Treba odrediti polumjere kružnica označenih s 1, 2, 3 i 4 pri čemu je odmah uzeta u obzir osnosimetričnost slike. Označimo s r_i radijus kružnice i za $i = 1, 2, 3, 4$.

Na Slici 7 uočavamo kvadrate sa stranicama duljine r_1 i a , pa vrijedi

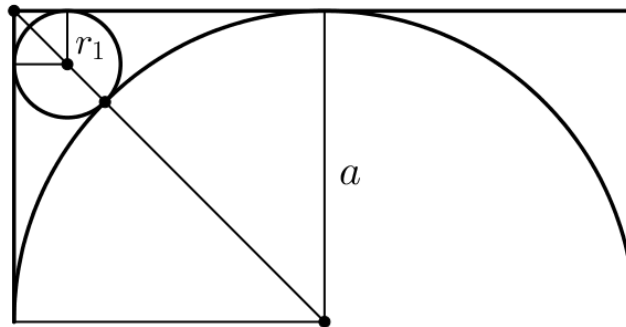
$$r_1\sqrt{2} + r_1 + a = a\sqrt{2},$$

$$r_1 = a \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} = a(3 - 2\sqrt{2}) \approx 0.17a.$$

Za određivanje r_2 i r_3 poslužimo se formulom koja kaže da je polumjer upisane kružnice trokuta jednak kvocijentu površine i poluopsega tog trokuta. Treba nam još visina



Slika 6: Isječak iz središnjeg dijela ikonostasa

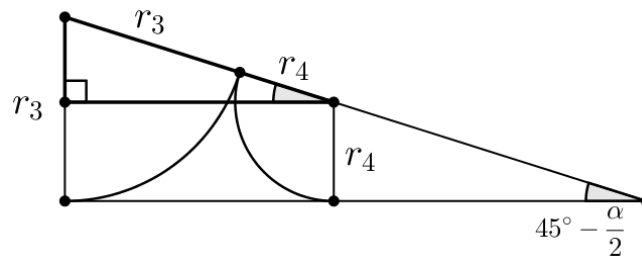


Slika 7

pravokutnika u kojemu su kružnice 2, 3 i 4, a ona je $a \operatorname{ctg} \alpha$. Zato je

$$r_2 = \frac{(a \cdot a \operatorname{ctg} \alpha)/2}{(a + a \operatorname{ctg} \alpha + a/\sin \alpha)/2} = \frac{a \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1},$$

$$r_3 = \frac{(2a \cdot a \operatorname{ctg} \alpha)/2}{(2a + 2a/\sin \alpha)/2} = \frac{a \cos \alpha}{\sin \alpha + 1}.$$



Slika 8

Sa Slike 8 vidimo da je

$$\frac{r_3 - r_4}{r_3 + r_4} = \sin \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right),$$

pa dobivamo

$$r_4 = r_3 \frac{1 - \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{1 + \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})} = \frac{a \cos \alpha}{\sin \alpha + 1} \frac{1 - \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}{1 + \sin(45^\circ - \frac{\alpha}{2})}.$$

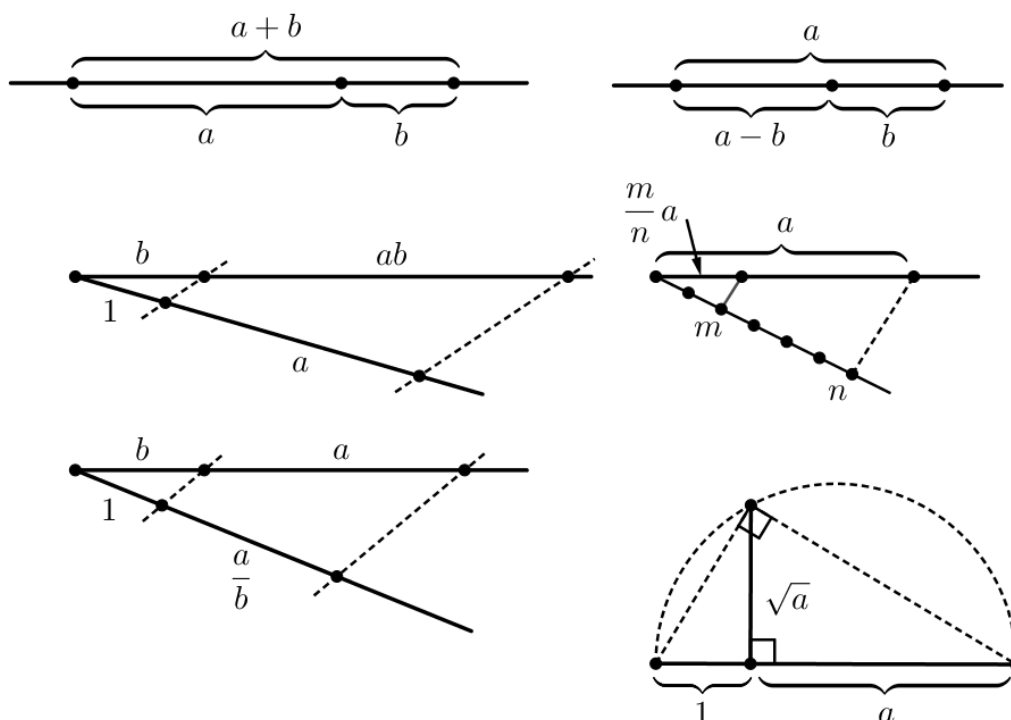
2 Konstruktibilnost i napredniji problemi

U svim prethodnim zadacima mogli smo pomoću ravnala i šestara iz danih veličina lako konstruirati polumjer tražene kružnice, pa onda i samu kružnicu. U tim zadacima moglo se dati i čisto geometrijsko rješenje (probajte sami). Ipak, algebarska metoda u kojoj najprije izrazimo tražene veličine preko zadanih, a zatim nizom standardnih koraka konstruiramo traženu duljinu ili kut, omogućuje nam da razumijemo koje su konstruktivne zadaće uopće rješive ravnalom i šestarom. Takve zadaće nazivamo *elementarno rješivima* i sada ćemo reći nešto više o njima.

Radi jednostavnijeg zapisa, u nastavku ćemo pretpostaviti da nam je dana dužina jedinične duljine, ali to ne predstavlja nikakvo smanjenje općenitosti. Ako su nam dane dužine duljina a i b te prirodni brojevi m i n , onda možemo ravnalom i šestarom konstruirati dužine sljedećih duljina

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}, \quad ma, \quad \frac{m}{n}a, \quad \sqrt{a}.$$

Konstrukcije su prikazane na Slici 9, a čitateljima ostavljamo da dopune detalje i dokažu ispravnost.



Slika 9: Primjena osnovnih operacija za dane duljine a i b .

Uvedemo li u ravninu Kartezijev koordinatni sustav, koristeći jednadžbe pravaca i kružnica, nije se teško uvjeriti (vidi npr. [4, §6]) da se ravnalom i šestarom mogu konstruirati samo duljine, tj. brojevi koji se iz zadanih brojeva dobivaju konačnim nizom

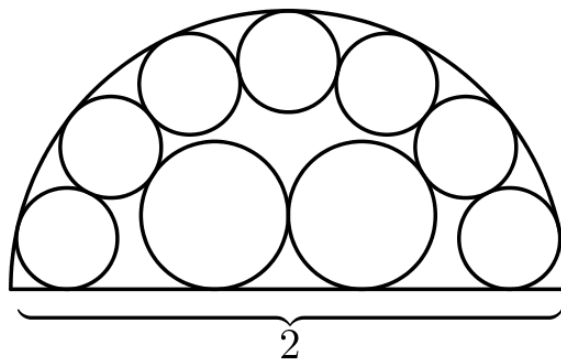
sljedećih operacija: zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i uzimanje kvadratnog korijena. Započnemo li samo s danim brojem 1, sve brojeve koje možemo dobiti zovemo *konstruktibilnima*. Napomenimo da negativan broj smatramo konstruktibilnim ako je njemu suprotan pozitivan broj konstruktibilan.

Uskoro ćemo promatrati i konstruktibilne kompleksne brojeve što samo znači da su i realni i imaginarni dio tog broja konstruktibilni realni brojevi. Za vježbu pokažite da i za kompleksne brojeve možemo ravnalom i šestarom izvesti sve prije spomenute operacije. Primjerice, drugi korijeni kompleksnog broja $a + bi$, gdje su a i b realni, oblika su $c + di$ pri čemu je

$$c = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, \quad d = \frac{b}{2c},$$

pa uz dane a i b , očito možemo konstruirati c i d .

Pogledajmo sada sljedeći konstrukcijski problem na Slici 10 potaknut gornjim dijelom malih vrata na ikonostasu (đakonske dveri).



Slika 10: Gornji dio manjih vrata na ikonostasu

Neka je polumjer polukruga jednak 1. Treba naći polumjer sedam manjih sukladnih kružnica i polumjer dviju velikih. Označimo tražene polumjere redom r i R .

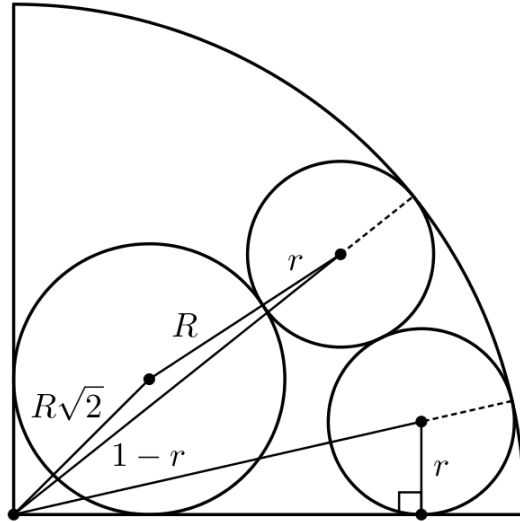
Na Slici 11 uočavamo pravokutni trokut s hipotenuzom duljine $1 - r$ i katetom duljine r nasuprot koje je kut mjere $\frac{1}{2} \cdot \frac{180^\circ}{7} = \frac{90^\circ}{7}$. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{r}{1-r} &= \sin \frac{90^\circ}{7} \\ r &= \frac{\sin \frac{90^\circ}{7}}{1 + \sin \frac{90^\circ}{7}}. \end{aligned}$$

Stoga duljinu r možemo konstruirati ako i samo ako možemo konstruirati kut mjere $\frac{90^\circ}{7}$.

Na istoj Slici 11 vidimo i trokut sa stranicama duljina $R\sqrt{2}$, $1 - r$, $R + r$ te kutom nasuprot stranice duljine $R + r$ jednakim $45^\circ - \frac{3}{2} \frac{180^\circ}{7} = \frac{45^\circ}{7}$. Teorem o kosinusu za taj trokut daje

$$\begin{aligned} (R + r)^2 &= (R\sqrt{2})^2 + (1 - r)^2 - 2R\sqrt{2}(1 - r) \cos \frac{45^\circ}{7}, \quad \text{tj.} \\ R^2 - 2R \left(r + (1 - r)\sqrt{2} \cos \frac{45^\circ}{7} \right) + 1 - 2r &= 0, \end{aligned}$$



Slika 11: Uvećana desna polovica polukruga s bitnim kružnicama

pa R možemo konstruirati ako možemo konstruirati dužinu duljine r i kut mjere $\frac{45^\circ}{7} = \frac{1}{2} \frac{90^\circ}{7}$. Zaključujemo da su r i R oba konstruktibilni brojevi ako i samo ako možemo konstruirati kut $\frac{90^\circ}{7}$, a budući da svaki kut znamo raspoloviti i udvostručiti, to je ekvivalentno uvjetu da se može konstruirati kut veličine $\frac{360^\circ}{7}$. Zato se naš problem svodi na pitanje konstruktibilnosti $\cos \frac{360^\circ}{7}$ ili, ekvivalentno, konstruktibilnosti od $\sin \frac{360^\circ}{7}$.

Označimo $x = 2 \cos \frac{360^\circ}{7}$ i $z = \cos \frac{360^\circ}{7} + i \sin \frac{360^\circ}{7}$. Imamo $x = z + \bar{z} = z + \frac{1}{z}$, pa je x konstruktibilan ako i samo ako je konstruktibilan z . Prema de Moivreovoj formuli je $z^7 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$ iz čega zbog $z \neq 1$ i $z \neq 0$ redom dobivamo

$$\begin{aligned} z^7 - 1 &= 0 \\ (z - 1)(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) &= 0 \\ z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 &= 0 \\ z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} &= 0. \end{aligned}$$

Iz $x = z + \frac{1}{z}$, slijedi

$$\begin{aligned} x^2 &= z^2 + \frac{1}{z^2} + 2, \\ x^3 &= z^3 + 3z + 3\frac{1}{z} + \frac{1}{z^3} = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3x, \end{aligned}$$

pa uvrštavanjem u zadnju jednadžbu za z , dobivamo

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + x^2 - 2 + x + 1 &= 0, \\ x^3 + x^2 - 2x - 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sada ćemo iskoristiti sljedeći teorem o konstruktibilnosti rješenja kubne jednadžbe koji se može dokazati i korištenjem samo elementarnih algebarskih činjenica, vidi npr. [4, Teorem 6.3].

Teorem (o konstruktibilnosti rješenja kubne jednadžbe). *Kubna jednadžba s racionalnim koeficijentima ima konstruktibilna rješenja ako i samo ako ima rješenje koje je racionalan broj.*

Jedini kandidati za racionalno rješenje (2.1) su djelitelji slobodnog člana, tj. -1 i 1 . Uvrštavanjem odmah vidimo da to nisu rješenja, pa iz prethodnog teorema zaključujemo da $2 \cos \frac{360^\circ}{7}$ nije konstruktibilan, pa nisu konstruktibilni ni r i R .

Budući da je $\frac{360^\circ}{7}$ središnji kut nad stranicom pravilnog sedmerokuta upisanog u kružnicu, ovim smo pokazali i da ravnalom i šestarom nije moguće konstruirati pravilni sedmerokut ako nam je dan polumjer opisane kružnice. Zbog jednostavne primjene homotetije, očito je da isto vrijedi i ako nam je dan samo polumjer upisane kružnice ili samo duljina stranice tog sedmerokuta. Pravilni sedmerokut je pravilni mnogokut s najmanjim brojem stranica koji nije moguće konstruirati ravnalom i šestarom. Potpunu karakterizaciju konstruktibilnih pravilnih mnogokuta dali su Gauss i Wantzel.

Zadnji problem koji ćemo promatrati u ovom članku motiviran je gornjim dijelom biskupskog trona koji se nalazi na kraju crkve, u prostoru iza ikonostasa i oltara.

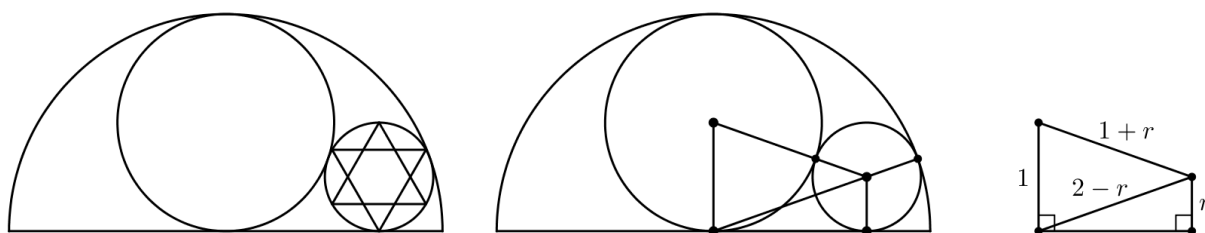


Slika 12: Gornji dio naslona biskupskog trona

Na Slici 12 desno prikazan je polukrug u koji je upisan krug i dvije pravilne šesterokrake zvijezde. Neka je, radi određenosti i jednostavnijeg zapisa, promjer danog polukruga jednak 4. Treba odrediti visinu upisanih zvijezda.

Primijetimo da je svaka od ovih zvijezda dobivena preklapanjem dvaju sukladnih jednakostraničnih trokuta s istim centrom. Označimo li duljinu stranice tih jednakostraničnih trokuta s a , lako vidimo da je duljina svake stranice zvijezde $a/3$, polumjer kružnice opisane zvijezdi $a\sqrt{3}/3$, dok je visina zvijezde $2a\sqrt{3}/3$. Zato je u rješavanju postavljenog problema dovoljno odrediti jednu od navedenih veličina.

Spomenimo najprije jedan mogući pokušaj rješavanja ovog zadatka. Ideja je da prvo odredimo radijus kružnice koja dodiruje rubove polukruga iznutra i veliku kružnicu promjera 2 izvana. Zatim u tu malu kružnicu upišemo zvijezdu.



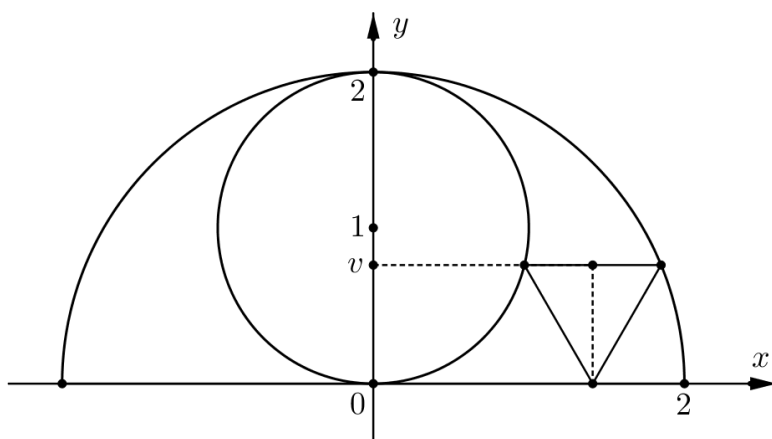
Slika 13: Pokušaj rješavanja problema s upisanom zvijezdom

Ova ideja ilustrirana je na Slici 13 lijevo. U sredini iste slike opažamo četverokut kojemu su vrhovi središta kružnica i polukružnice te nožište okomice iz središta male kružnice na promjer polukružnice. Taj je trapez izdvojen na Slici 13 desno te su označene neke duljine pri čemu je r traženi polumjer male kružnice. Sada dvostrukom primjenom Pitagorinog teorema odmah dobivamo

$$\begin{aligned}(2-r)^2 - r^2 &= (1+r)^2 - (1-r)^2, \\ 4 - 4r &= 4r, \\ r &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Za visinu šesterokrake zvijezde upisane maloj kružnici tako dobivamo upravo vrijednost 1. Nažalost, ovo nije točno, nego samo aproksimativno rješenje našeg problema jer upisana zvijezda uopće ne dodiruje polukružnicu i veliku kružnicu. U to se nije teško uvjeriti primjerice uvećavši sliku koju dobijemo slijedeći ovu konstrukciju u programu GeoGebra.

Da bismo ispravno riješili zadani problem, uvodimo Kartezijev koordinatni sustav kao na Slici 14.



Slika 14

Napomenimo još jednom da je dovoljno upisati jednakostranični trokut koji dodiruje polukružnicu i njezin promjer te veliku upisanu kružnicu, a jedna stranica mu je paralelna s promjerom polukružnice. Čitavu šesterokraku zvijezdu dobit ćemo tada kao uniju ovog trokuta i njegove centralnosimetrične slike s obzirom na njegov centar.

Jednakokraki trokut s bazom na pravcu $y = v$ bit će jednakostraničan ako i samo ako mu se baza i visina na tu bazu odnose u omjeru $2 : \sqrt{3}$. Drugim riječima, odsječak pravca $y = v$ koji se nalazi u prvom kvadrantu između kružnica $x^2 + (y-1)^2 = 1^2$ i $x^2 + y^2 = 2^2$ mora biti duljine $2v/\sqrt{3}$. Dakle,

$$\begin{aligned}\sqrt{4-v^2} - \sqrt{1-(v-1)^2} &= \frac{2v}{\sqrt{3}}, \\ \sqrt{12-3v^2} - \sqrt{6v-3v^2} &= 2v \\ 12-3v^2+6v-3v^2-4v^2 &= 6\sqrt{(4-v^2)(2v-v^2)} \\ (6+3v-5v^2)^2 &= 9(4-v^2)(2v-v^2) \\ 16v^4-12v^3-15v^2-36v+36 &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

Dobili smo da je v korijen polinoma $P(x) = 16x^4 - 12x^3 - 15x^2 - 36x + 36$.

Za korijene polinoma četvrtog stupnja pitanje konstruktibilnosti nešto je teže od istog pitanja za polinome trećeg stupnja gdje nam Teorem o konstruktibilnosti rješenja kubne jednadžbe daje potpuni odgovor. Svest ćemo pitanje konstruktibilnosti korijena polinoma $P(x)$ na analogni problem za njemu pridruženi kubni polinom koji se naziva rezolventa od $P(x)$.

Prije toga trebamo pokazati da je polinom $P(x)$ ireducibilan, tj. da se ne može prikazati kao umnožak dva polinoma s racionalnim koeficijentima stupnja barem jedan. Na ovaj polinom ne možemo primijeniti poznati Eisensteinov kriterij ireducibilnosti, a isto vrijedi i za sve polinome oblika $P(x - k)$, gdje je k cijeli broj. Stoga ćemo primijeniti sljedeći jednostavan, ali koristan kriterij iz članka Ram Murtyja [5]

Teorem (o ireducibilnosti polinoma). *Neka je $f(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1x + a_0$ polinom stupnja m s cjelobrojnim koeficijentima i neka je*

$$H = \max_{0 \leq i \leq m-1} \left| \frac{a_i}{a_m} \right|.$$

Ako je $f(n)$ prost broj za neki cijeli broj $n \geq H + 2$, onda je $f(x)$ ireducibilan polinom.

Prethodni teorem dokazuje se korištenjem jednostavne leme koja daje gornju ogradu $H + 1$ na apsolutnu vrijednost svakog korijena od $f(x)$.

Za naš polinom $P(x)$ imamo

$$H = \max \left\{ \frac{36}{16}, \frac{36}{16}, \frac{15}{16}, \frac{12}{16} \right\} = \frac{9}{4} = 2.25.$$

Krenimo redom provjeravati je li $P(n)$ prost za $n > 4.25$

$$\begin{aligned} P(5) &= 7981 = 23 \cdot 347, \\ P(6) &= 17424 = 2 \cdot 8712, \\ P(7) &= 33349, \end{aligned}$$

te dobivamo da je $P(7)$ prost broj jednostavnom provjerom na računalu (ili ručno provjerimo djeljivost s prostim brojevima ≤ 181). Dakle, $P(x)$ jest ireducibilan. Drugi način kako pokazati ireducibilnost $P(x)$ je promatrati što se događa modulo 7.

Sada nam neki bazični rezultati iz teorije proširenja polja (vidi npr. [1, Corollary 1.3] i [3]) govore da su ili svi korijeni od $P(x)$ u skupu kompleksnih brojeva konstruktibilni ili nijedan od njih nije takav.

Očito su korijeni polinoma $P(x)$ konstruktibilni ako i samo ako su konstruktibilni korijeni od

$$16P(x/4) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 144x + 576. \quad (2.3)$$

Rezolventa polinoma

$$Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta),$$

s korijenima $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u skupu kompleksnih brojeva, je polinom $R(x)$ s korijenima $\alpha\beta + \gamma\delta$, $\alpha\gamma + \beta\delta$, $\alpha\delta + \beta\gamma$, tj.

$$R(x) = (x - \alpha\beta - \gamma\delta)(x - \alpha\gamma - \beta\delta)(x - \alpha\delta - \beta\gamma).$$

Koristeći Vièteove formule za polinom $Q(x)$

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + \gamma + \delta &= -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta &= b \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta &= -c \\ \alpha\beta\gamma\delta &= d,\end{aligned}$$

može se pokazati da je

$$R(x) = x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x - (a^2d - 4bd + c^2).$$

Direktno iz definicije vidimo da ako su korijeni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ od $Q(x)$ konstruktibilni, onda takvi moraju biti i korijeni od $R(x)$. Drugim riječima, ako je $Q(x)$ ireducibilan i ako neki korijen od $R(x)$ nije konstruktibilan, onda ni $Q(x)$ nema konstruktibilnih korijena.

U našem slučaju, ako je v konstruktibilan, onda su zbog ireducibilnosti od $P(x)$ svi korijeni od $P(x)$ konstruktibilni, pa su takvi i korijeni od (2.3). Rezolventa tog polinoma je

$$x^3 + 15x^2 - 1872x - 60480. \quad (2.4)$$

Budući da je prethodni polinom normiran, svi njegovi racionalni korijeni moraju biti cjelobrojni. Za svaki cijeli broj x imamo

$$x^3 + 15x^2 - 1872x - 60480 \equiv x^3 - 4x^2 + 9x - 3 \pmod{19}.$$

Uvrstimo redom $x = 0, 1, 2, \dots, 18$ i dobivamo da je uvijek $x^3 - 4x^2 + 9x - 3 \not\equiv 0 \pmod{19}$, što znači da polinom (2.4) nema cjelobrojnih, pa ni racionalnih korijena.

Sada iz Teorema o konstruktibilnosti rješenja kubne jednadžbe zaključujemo da (2.4) nema konstruktibilnih korijena. Stoga se ni dužina duljine v koja zadovoljava (2.2) ne može konstruirati koristeći samo ravnilo i šestar. Dakle, naša konstruktivna zadaća s upisivanjem šesterokrake zvijezde nije elementarno rješiva.

No, lako je pomoću računala dobiti da je v približno jednako 0.7609, pa je visina zvijezde $\frac{4}{3}v = 1.0145\dots$. Naš početni pokušaj rješavanja problema dao je za visinu zvijezde 1, što je ne samo očito konstruktibilno, nego i s relativnom pogreškom manjom od 2% vjerojatno prihvatljivo za približnu konstrukciju.

Za kraj ostavljamo jednu vježbu čitateljima. Kada se u geometrijskim zadacima pojavi više kružnica, često pomislimo na primjenu inverzije. U problemima s kojima smo se susretali u ovom članku, pokušajte naći najprikladniji centar i radijus inverzije te odredite u što se preslikavaju svi likovi s odgovarajućeg crteža pri toj inverziji. U kojima od tih problema bi nam inverzija mogla pomoći u konstrukciji nekih kružnica?

Zahvaljujem župniku o. Nenadu Krajačiću koji mi je omogućio fotografiranje svih dijelova unutrašnjosti crkve.

Literatura

- [1] A. Chambert-Loir, *On the numbers which are constructible with straight edge and compass*,
<https://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/compas.pdf>

- [2] D. Damjanović, *Arhitektura ikonostasa u opusu Hermana Bolléa*, Prostor, **18** no. 1(39), 2010., 62–79.
- [3] R. A. Gordon, J. C. Santos, *An interesting construction problem*, Amer. Math. Monthly **125** (2018), no. 3, 207–221.
- [4] *Konstruktivne metode u geometriji*, skripta za predavanja, 2019.
<https://web.math.pmf.unizg.hr/~pejkovic/files/kmg.pdf>
- [5] M. Ram Murty, *Prime numbers and irreducible polynomials*, Amer. Math. Monthly **109** (2002), no. 5, 452–458.
- [6] Gj. Szabo, *Djela Hermanna Bolléa sude sud Hermannu Bolléu*, 1932.
<https://kgalovic.blogspot.com/2014/09/gjuro-szabo-sudi-hermannu-bolleu.html>