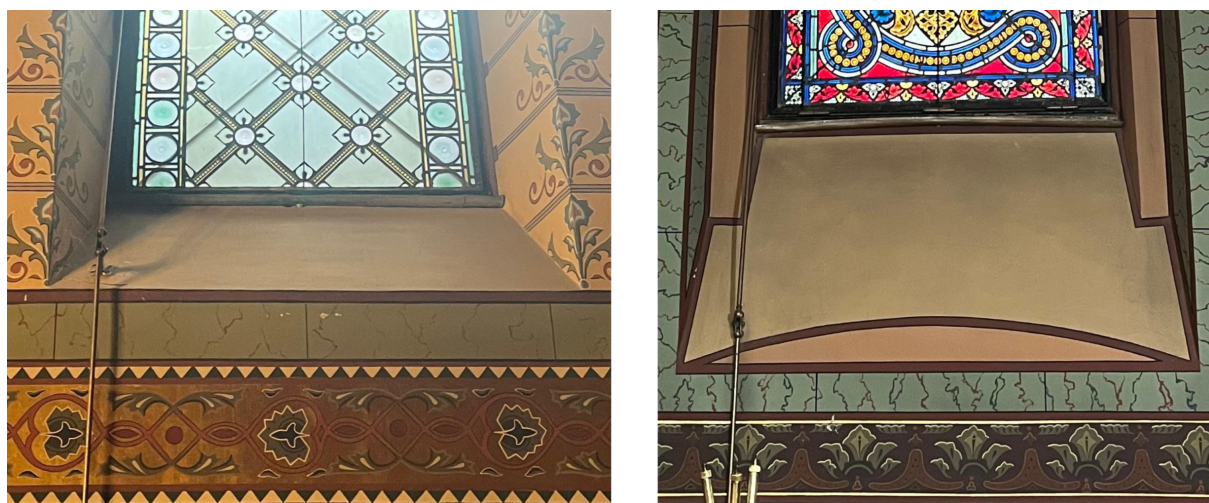


Konike u konkatedrali

Tomislav Pejković
Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek
pejkovic@math.hr

Na zagrebačkom Gornjem gradu nalazi se grkokatolička konkatedrala izgrađena sredinom osamdesetih godina 19. stoljeća prema projektu Hermana Bolléa. Poticaj za pisanje ovog članka bio je naizgled nevažan detalj na zidu ispod prozora u apsidi te crkve.



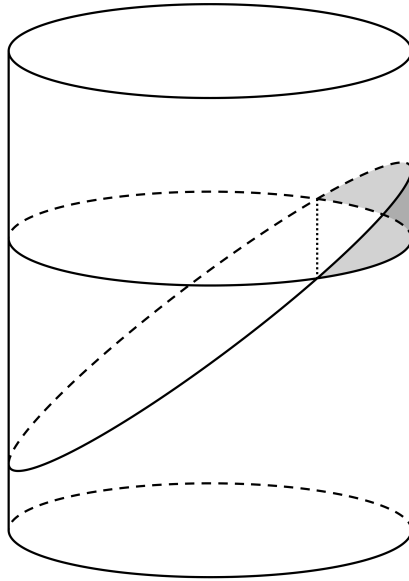
Slika 1

Na Slici 1 lijevo je fotografija donjeg ruba prozorskog otvora na bočnom zidu, a desno je odgovarajući pogled na jedan od dva prozora u apsidi crkve. Dok je ispod bočnog prozora rub približno ravan, ispod apsidalnog prozora rub je očito zakrivljen. Tu zakrivljenost ličilac je naglasio obojivši uski odsječak drugačijom bojom.

Različiti izgledi dvaju rubova posljedica su zidova na kojima se nalaze. Bočni zid je ravan, tj. njegovu unutarnju plohu možemo zamišljati kao dio ravnine, a zid apsida je zakrivljen i najlakše ga je opisati kao dio plašta valjka. Nakošena ravnina koja se spušta od vitraja siječe ravninu bočnog zida u pravcu, pa zbog konačne širine prozora dobivamo da je donji rub prozorskog otvora dužina. S druge strane, pokazat ćemo da takva koso položena ravnina siječe cilindar u elipsi, pa u tom slučaju kao rub okna dobivamo luk elipse.

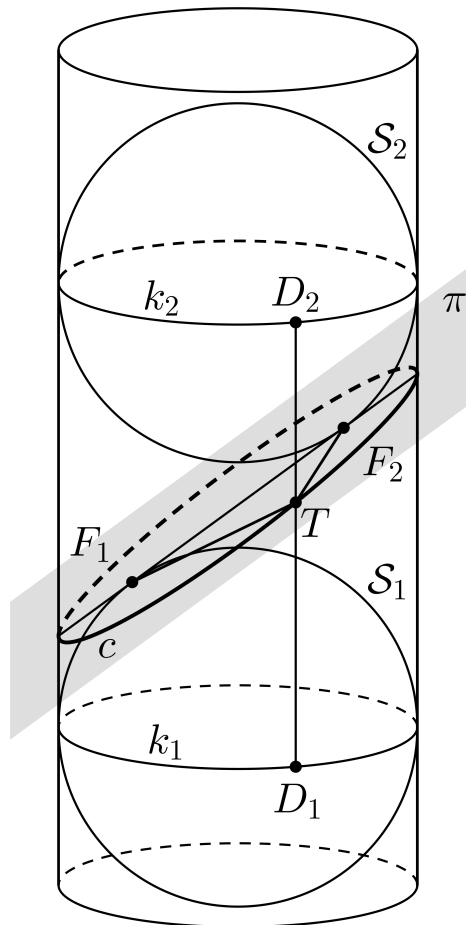
S obzirom na to da donji rub promatranog odsjeka prati ukrasnu traku koja se proteže na istoj visini čitavom širinom zida, možemo uzeti da je taj rub dio presjeka horizontalne ravnine i vertikalnog plašta valjka, tj. luk kružnice. Dakle, uočeni uski odsječak dio je plašta valjka između luka elipse i luka kružnice. Ovo je prikazano na Slici 2 gdje smo radi preglednosti znatno uvećali dio valjka iznad horizontalne i ispod kose ravnine u odnosu na stvarnu situaciju.

Izravan način dokazivanja naše tvrdnje o presjeku ravnine i kružnog cilindra je korištenjem analitičke, odnosno koordinatne geometrije. Mi ćemo ipak u ovom članku sve



Slika 2

tvrdnje pokušati pokazati čisto geometrijskim razmatranjima. Ovdje to nije teško napraviti pomoću Dandelinovih kugli.

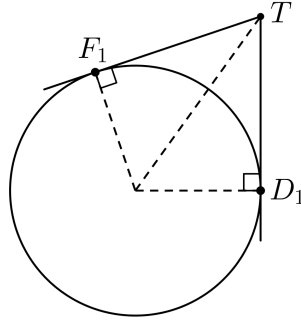


Slika 3

Promotrimo neki kružni cilindar, tj. plohu nastalu rotacijom u prostoru jednog pravca oko njemu paralelnog pravca koji zovemo os cilindra. Neka ravnina π siječe cilindar duž krivulje c . Pritom pretpostavljamo da π nije ni paralelna ni okomita na os cilindra.

Kao što je prikazano na Slici 3, postoje dvije sfere upisane u cilindar koje ujedno dodiruju ravninu π . Nazovimo te sfere $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, kružnice u kojima dodiruju cilindar označimo s k_1 i k_2 , a točke u kojima diraju ravninu π s F_1 i F_2 .

Za proizvoljnu točku T krivulje c izvodnica cilindra kroz T , tj. pravac paralelan osi, siječe kružnice k_1 i k_2 redom u točkama D_1 i D_2 .



Slika 4

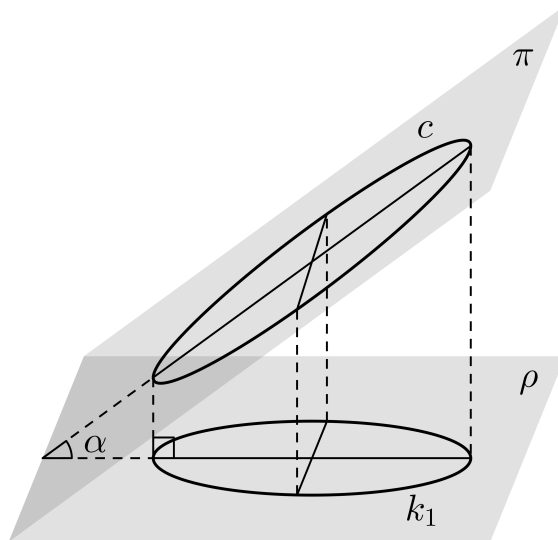
Na Slici 4 prikazana je kružnica u kojoj ravnina određena točkama T , F_1 i D_1 siječe sferu $\mathcal{S}_1$. Iz sukladnosti dvaju trokuta na toj slici odmah dobivamo da je $|F_1T| = |D_1T|$. Analogno zaključujemo da je $|F_2T| = |D_2T|$, pa je

$$|F_1T| + |F_2T| = |D_1T| + |D_2T| = |D_1D_2|.$$

No duljina $|D_1D_2|$ ne ovisi o izboru točke T na c jer je to upravo udaljenost paralelnih ravnina u kojima leže kružnice k_1 i k_2 .

Dobili smo da je c elipsa s fokusima F_1 i F_2 i duljinom velike osi $|D_1D_2|$. Točke F_1 i F_2 leže u ravnini kroz os cilindra okomitoj na π jer su s obzirom na tu ravninu simetrični i cilindar i obje sfere i ravnina π .

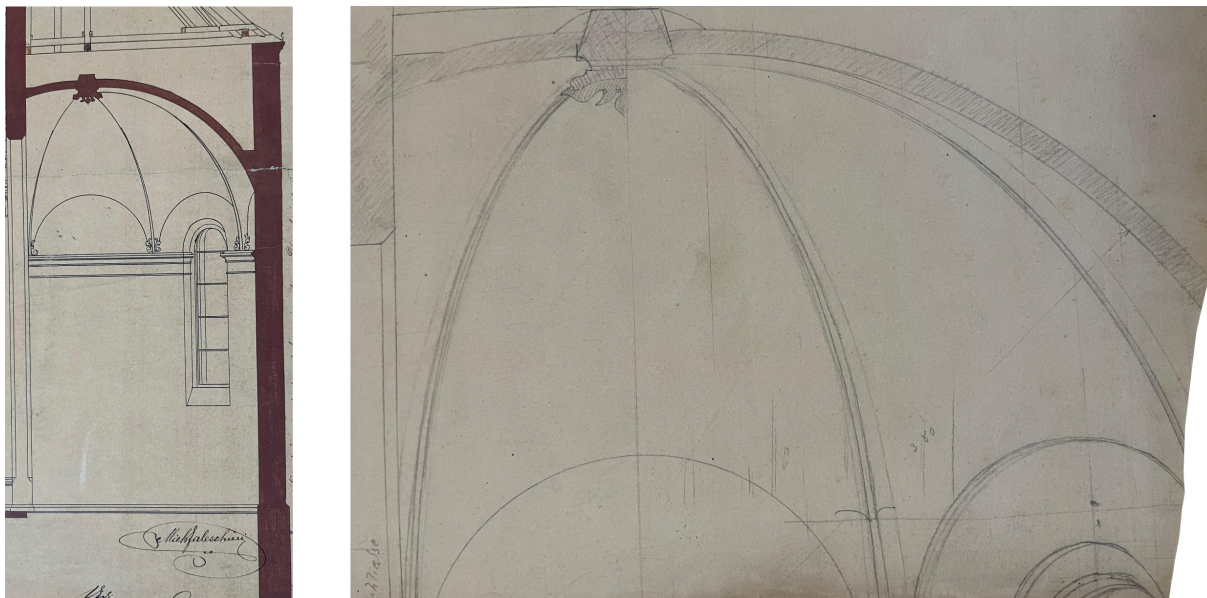
Iz ovoga slijedi i naša tvrdnja o odsječku na zidu crkve.



Slika 5

Iskažimo dobiveni rezultat na još jedan način koji će nam koristiti u nastavku. Ako se ortogonalnom projekcijom ravnine π na ravninu ρ koja s njom zatvara kut α krivulja c preslika u kružnicu k_1 polumjera r , onda je c elipsa s velikom poluosi $r/\cos\alpha$ i malom poluosi r (Slika 5).

Još ćemo se vratiti liku na zidu apside konkatedrale, ali pogledajmo sada neke nacрте i skice priređene za izgradnju ove crkve. Čuvaju se u Nadbiskupijskom arhivu u Zagrebu, Zbirci nacрта Dijecezanskog muzeja, br. III-26.



Slika 6

Na Slici 6 vidimo relevantni dio uzdužnog vertikalnog presjeka crkve s bokocrtom te skicu svoda apside. Usputno primijetimo da je na šablonskom crtežu prozora u apsidi donji rub ravan, odnosno nedostaje detalj kojeg smo proučavali. Rebra svoda apside u stvarnosti su otprilike četvrtine kružnica. Na ovim skicama prikazana su kao lukovi elipsa u što se nije teško uvjeriti tako da ubacimo fotografije crteža u program poput GeoGebre i konstruiramo koniku kroz pet točaka na pojedinoj krivulji. Elipse se pojavljuju zato što je paralelna projekcija kružnice upravo elipsa. Pokažimo to za ortogonalne projekcije kakve su korištene na prikazanim crtežima.

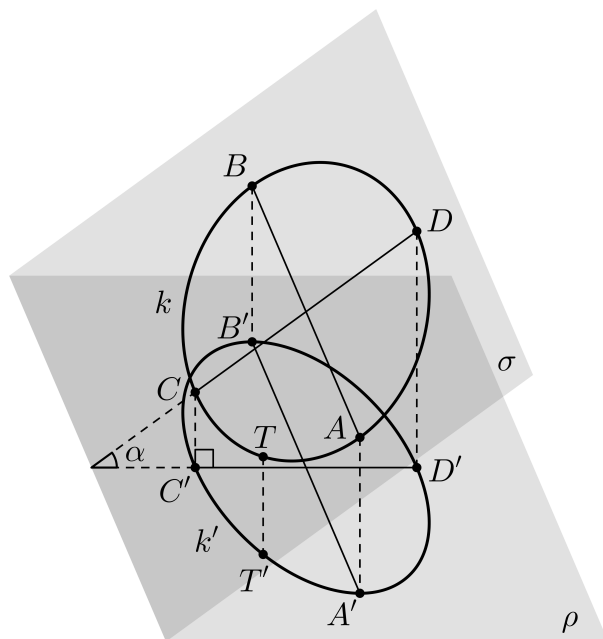
Ortogonalna projekcija ravnine σ na ravninu ρ koja s njom zatvara kut α kružnicu k preslikava u krivulju k' . Uzmimo dva okomita promjera $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ kružnice k takva da je AB paralelan, a CD okomit na presjek ravnina σ i ρ , vidi Sliku 7. Označimo slike točaka A, B, C, D pri ovoj ortogonalnoj projekciji redom s A', B', C', D' . Odmah vidimo da je $|A'B'| = |AB|$ i $|C'D'| = |CD|\cos\alpha$. Štoviše, označimo li s T proizvoljnu točku kružnice k i s T' njezinu ortogonalnu projekciju, imamo da je

$$d(T', C'D') = d(T, CD) \quad \text{i} \quad d(T', A'B') = d(T, AB)\cos\alpha,$$

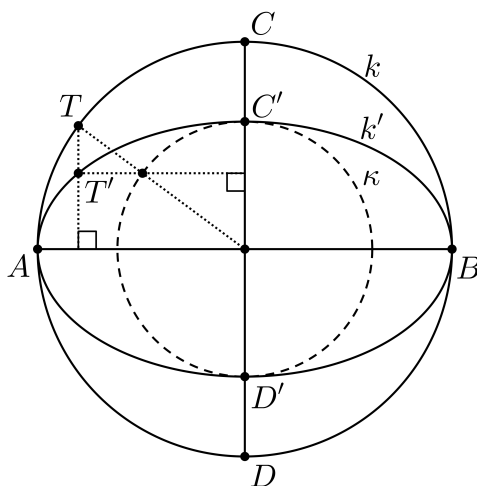
gdje je, primjerice, $d(T, AB)$ udaljenost točke T od pravca AB .

Postavimo sada k u ravninu ρ tako da identificiramo A s A' te B s B' (Slika 8).

Kako smo vidjeli, k' je iz k dobivena kontrakcijom u smjeru pravca CD s koeficijentom $\cos\alpha$, uz očuvanje svih duljina u smjeru pravca AB . No, istu krivulju dobivamo iz kružnice κ s promjerom $\overline{C'D'}$ dilatacijom u smjeru pravca AB s koeficijentom $1/\cos\alpha$, uz očuvanje svih duljina u smjeru pravca CD . Prisjetimo li se rezultata opisanog uz Sliku 5, vidimo



Slika 7



Slika 8

da cilindar određen kružnicom κ okomit na ravninu Slike 8 siječe ravninu koja s njom zatvara kut α upravo u krivulji koja je izometrična k' , a pokazali smo da je presječna krivulja elipsa. Zaključujemo da je k' elipsa što smo i htjeli dokazati.

U niši na kraju apside nalazi se biskupski tron (Slika 9).

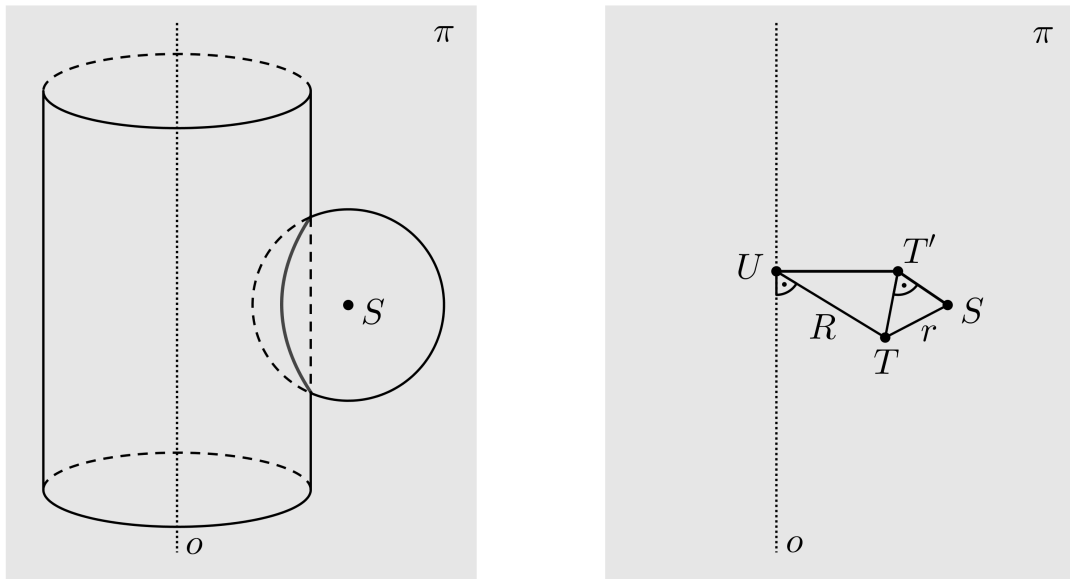
Svod gornjeg dijela te niše, ili barem njegov prednji dio, možemo opisati kao plohu koja je podskup jedne sfere. Zanima nas krivulja koja se pojavljuje na samom rubu niše. Drugim riječima, promatramo presjek sfere i plašta valjka. Pri tome odmah pretpostavljamo da je polumjer sfere manji od polumjera baze valjka, središte sfere ne leži na osi valjka i dvije plohe sijeku se u barem dvije različite točke. Promatrani presjek je prostorna krivulja, pa možemo pogledati što su ortogonalne projekcije tog presjeka u nekim od glavnih smjerova. Za rub niše u apsidi konkatedrale prirodne projekcije bile bi tlocrt, nacrt i bokocrt.

Tlocrt nije zanimljiv jer leži u tlocrtu zida apside, tj. luk je kružnice. Koristeći



Slika 9

koordinatni sustav, dobivamo da je nacrt luk ravninske krivulje četvrtog stupnja, pa nećemo ovdje više o tome govoriti. No, pokazat ćemo da je bokocrt promatranog ruba luk parabole.

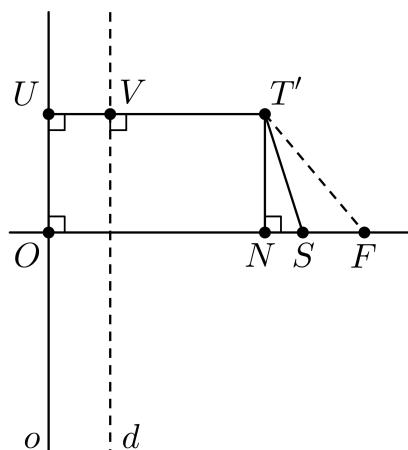


Slika 10

Neka su dani cilindar polumjera baze R i sfera polumjera r kao na Slici 10 te neka je π ravnina u kojoj leže os o cilindra i središte S sfere. Želimo pokazati da je ortogonalna projekcija presjeka cilindra i sfere na ravninu π podskup neke parabole. Uzmimo po volji točku T u tom presjeku i neka je T' ortogonalna projekcija točke T na ravninu π , a U nožište okomice iz T na o . Vrijedi

$$|T'U|^2 - |T'S|^2 = (|TU|^2 - |TT'|^2) - (|TS|^2 - |TT'|^2) = |TU|^2 - |TS|^2 = R^2 - r^2.$$

Pravac o okomit je na TU i TT' , a zato i na $T'U$, pa zapravo želimo odrediti geometrijsko mjesto točaka T' u ravnini π za koje je razlika kvadrata udaljenosti od pravca o i točke S konstantna.



Slika 11

Neka je kao na Slici 11 točka O nožište okomice iz S na o , a N nožište okomice iz T' na OS . Pravac d i točku F dobijemo translacijom pravca o i točke S za vektor

$$\frac{R^2 - r^2}{2|OS|^2} \overrightarrow{OS}.$$

Naglasimo da d i F ne ovise o T' , odnosno o T . Označimo još s V presjek $T'U$ i d . Pokažimo sada da su udaljenosti točke T' od pravca d i od točke F jednake. Uz primjenu Pitagorinog teorema, imamo

$$\begin{aligned} |T'F|^2 &= |T'N|^2 + |NF|^2 = |T'N|^2 + (|NS| + |UV|)^2 \\ &= |T'N|^2 + |NS|^2 + 2|NS| \cdot |UV| + |UV|^2 \\ &= |T'S|^2 + 2|NS| \cdot |UV| + |UV|^2 \\ &= |T'U|^2 - (R^2 - r^2) + 2|NS| \cdot |UV| + |UV|^2 \\ &= |T'U|^2 - 2|OS| \cdot |UV| + 2|NS| \cdot |UV| + |UV|^2 \\ &= |T'U|^2 - 2|ON| \cdot |UV| + |UV|^2 \\ &= (|T'U| - |UV|)^2 = |T'V|^2, \end{aligned}$$

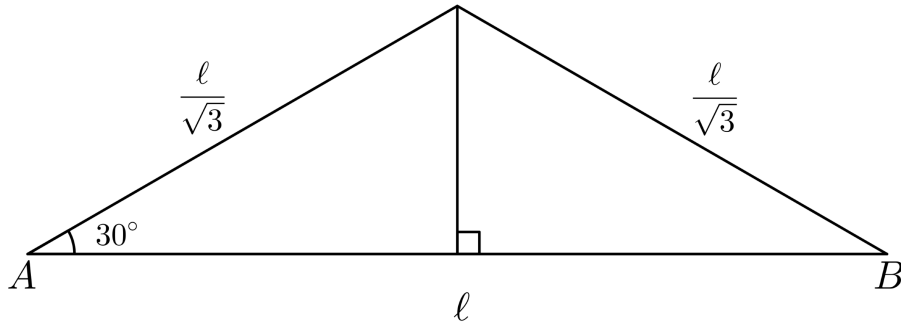
pa T' leži na paraboli s fokusom F i direktricom d . Budući da je zbog naših pretpostavki presjek cilindra i sfere povezan skup, takva je i ortogonalna projekcija te zaključujemo da se radi o luku parabole.

Čisto zbog potpunosti, htjeli bismo spomenuti i treću vrstu nedegeneriranih konika – hiperbole. Mogli bismo u konkatedrali tražiti na zidu trag između svjetla i sjene neke pogodno postavljene svjetiljke ili prerez nekog od stožastih ukrasa. Ipak, pogledajmo radije jedan neozbiljan zadatak koji se javio prilikom pisanja drugog članka o stereometrijskim pitanjima u ovoj crkvi.

Podignemo li pogled prema stropu, vidjet ćemo horizontalnu i vertikalnu ukrasno oblikovanu gredu (Slika 12 gore).

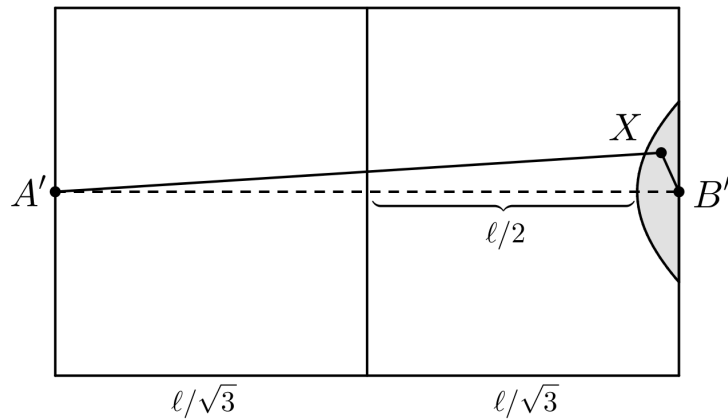
Možemo uzeti da je nagib stropa prema horizontalnoj ravnini oko 30° , pa uz duljinu horizontalne grede, odnosno širinu crkve označenu s ℓ , dobivamo situaciju kao na Slici 12 dolje.

Mrav koji se nalazi u točki A ne može letjeti, ali može hodati po stropu i gredama. Do kojih ga točaka stropa najkraći put vodi preko greda?



Slika 12

Primijetimo da zbog nejednakosti trokuta mrav nikada u svom najkraćem putu od točke A do neke točke stropa neće koristiti vertikalnu gredu. Rastvorimo dvije plohe stropa u istu ravninu kao na Slici 13, gdje su A' i B' slike točaka A i B .



Slika 13

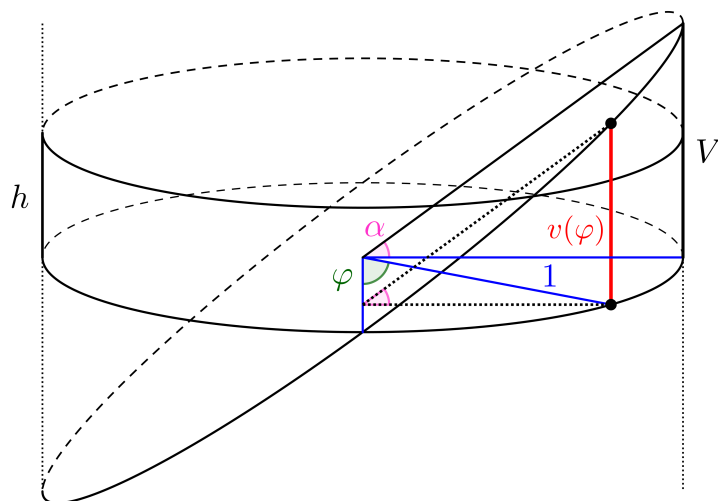
Vidimo da je pitanje za koje točke X vrijedi

$$|A'X| > \ell + |B'X|, \text{ tj. } |A'X| - |B'X| > \ell.$$

Za rub traženog područja dobivamo jednu granu hiperbole kojoj je udaljenost tjemena (velika, tj. realna os) jednaka ℓ , a polovica udaljenosti fokusa (linearni ekscentricitet) je $\ell/\sqrt{3}$.

Vratimo se na kraju ovog članka liku sa Slike 1 koji smo uočili na zidu apsida. Bojenje tog zida sugerira nam da pokušamo odrediti površinu navedenog podskupa plašta valjka.

Radi jednostavnijeg zapisa, bez smanjenja općenitosti smijemo uzeti da je radijus baze apsida $R = 1$. Kasnije možemo za proizvoljni radijus napraviti homotetiju prostora s koeficijentom R te sve dobivene duljine pomnožiti s R , površine s R^2 i volumene s R^3 .

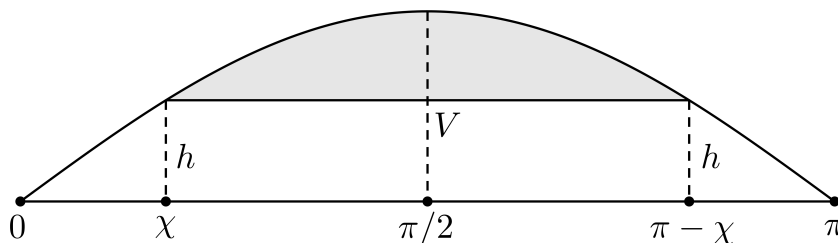


Slika 14

Na Slici 14 prikazana je situacija sa Slike 2 pri čemu smo ucrtali ravninu paralelnu s bazom cilindra koja prolazi središtem elipse dobivene u presjeku cilindra i ravnine koja s horizontalnom ravninom zatvara kut α . Mjerimo visinu, odnosno udaljenost $v(\varphi)$ od novoucrtane ravnine do točaka elipse u ovisnosti o kutu $\varphi \in [0, \pi]$. Primjerice, $v(0) = v(\pi) = 0$, $v(\frac{\pi}{2}) = V$. Sa slike odmah vidimo da je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V}{1} = \frac{v(\varphi)}{\sin \varphi},$$

pa je $v(\varphi) = V \sin \varphi$. Razmotavanjem odgovarajućeg dijela plašta valjka, dobivamo Sliku 15 na kojoj je površina koja nas zanima osjenčana.



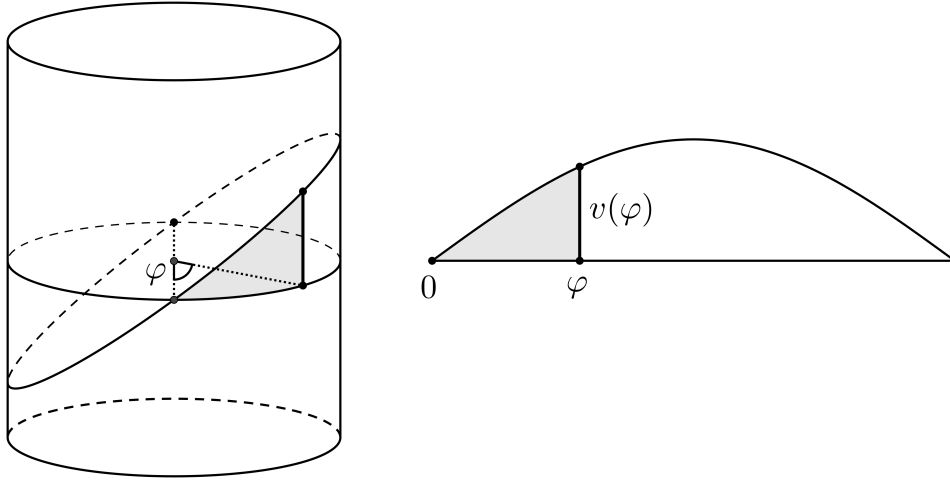
Slika 15

Krajeve intervala $[\chi, \pi - \chi]$ iz kojega su svi kutovi φ za točke promatranog lika određujemo iz $v(\chi) = h$, tj. $\chi = \arcsin \frac{h}{V}$. Primijetimo da u stvarnosti lako možemo odrediti R , $V - h$ i α iz čega odmah dobivamo vrijednosti za V , h , χ .

Tražena površina je

$$\int_{\chi}^{\pi - \chi} (V \sin \varphi - h) d\varphi = 2 \int_{\chi}^{\frac{\pi}{2}} (V \sin \varphi - h) d\varphi = 2V \int_{\chi}^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi - h(\pi - 2\chi).$$

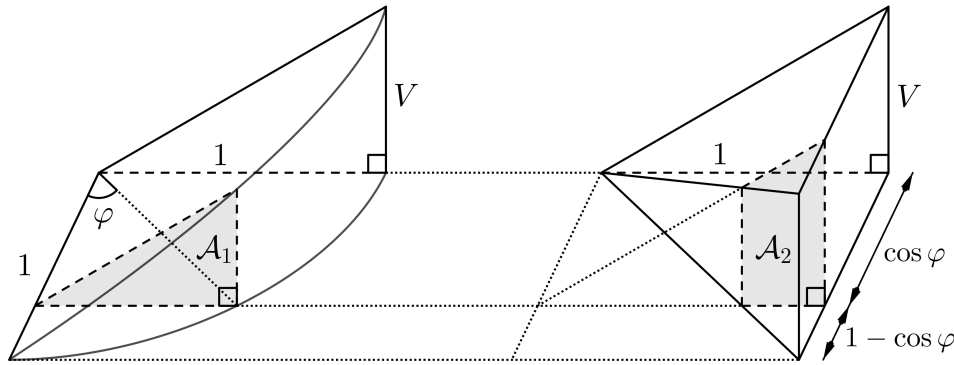
Drugi član u zadnjem izrazu očito je površina pravokutnika sa stranicama duljine h i $\pi - 2\chi$ što smo znali izračunati i bez korištenja integrala. Prvi član, tj. površinu ispod sinusoide lako je izračunati koristeći Newton-Leibnizovu formulu i činjenicu da je $\frac{d}{d\varphi}(\cos \varphi) = -\sin \varphi$. Ipak, radije bismo izbjegli korištenje diferencijalnog i integralnog računa i odredili tu površinu samo geometrijskim razmatranjima kakva smo koristili i dosad u ovom članku. Evo ukratko kako to učiniti.



Slika 16

Na Slici 16 prikazan je lik čiju površinu želimo odrediti za svaki $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Promotrimo polovicu “klina” sa Slika 14 i 16 te piramidu s pravokutnom bazom položenu na pobočku koja je jednakokračni pravokutni trokut kao na Slici 17.



Slika 17

Pokažimo najprije da su volumeni odgovarajućih dijelova ovih dvaju tijela jednaki. Koristit ćemo Cavalierijev princip koji kaže:

Ako se dva geometrijska tijela mogu postaviti na način da svaka ravnina paralelna zadanoj ravnini siječe tijela tako da presjeci imaju jednake površine, tada ta dva tijela imaju jednake volumene.

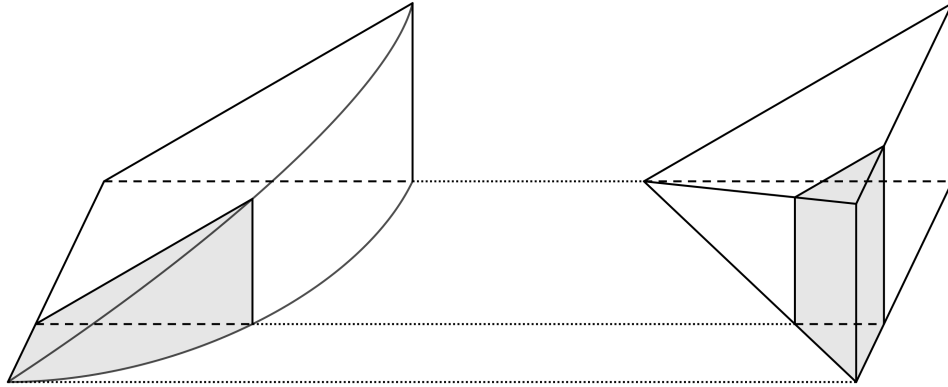
Kod nas će sve presječne ravnine biti paralelne s ravninom koja sadrži os stošca i glavnu os elipse, tj. simetralnom ravninom zajedničkog promjera kružnice i elipse na Slici 16 lijevo.

Iz Slike 17 vidimo da su za proizvoljni $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ površine presjeka upravo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{1}{2} \sin \varphi \cdot v(\varphi) = \frac{V}{2} (\sin \varphi)^2, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot V - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot V (\cos \varphi)^2,\end{aligned}$$

pri čemu smo iskoristili da je mali trokut koji nadopunjuje $\mathcal{A}_2$ do pravokutnog trokuta s katetama 1 i V sličan tom pravokutnom trokutu s koeficijentom sličnosti $\cos \varphi$. Kako je

$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$ za svaki φ , Cavalierijev princip povlači da je volumen dijelova između proizvoljnih dviju presječnih ravnina isti za oba tijela (Slika 18).

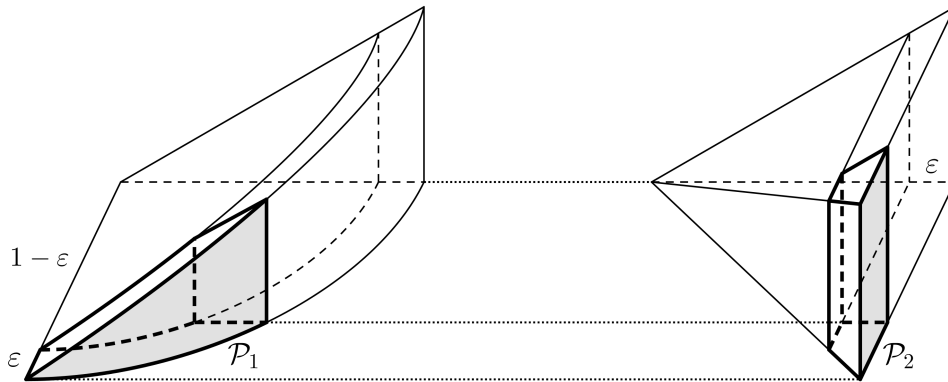


Slika 18

Neka je ε dovoljno mali pozitivan realan broj. Pogledamo li sada ova tijela, ali za $R = 1 - \varepsilon$, a ne $R = 1$ kao do sada, zaključci ostaju isti. No, to znači da je i smanjenje volumena jednako za oba tijela, a to smanjenje možemo aproksimirati kao umnožak površine odgovarajućeg lika $\mathcal{P}_1$ ili $\mathcal{P}_2$ na vanjskoj strani s debljinom sloja koja je ε (Slika 19). Točnije, površina $\mathcal{P}_i$ jednaka je

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_{1-\varepsilon}}{\varepsilon},$$

gdje indeks uz volumen označava pripadni radijus.



Slika 19

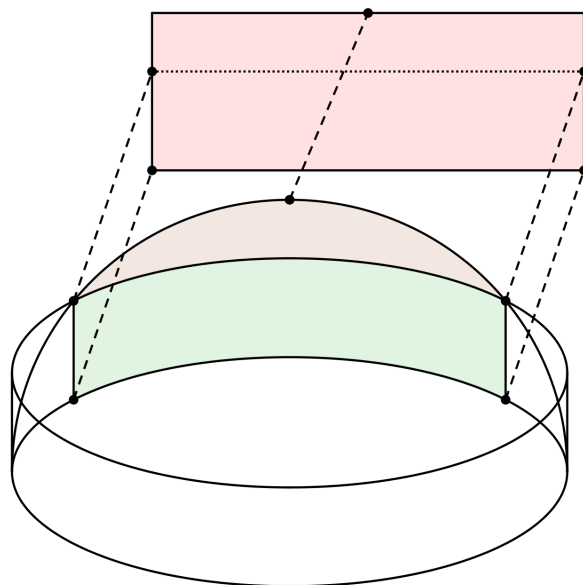
Kako su volumeni dijelova slojeva između dviju presječnih ravnina jednaki za po volji male ε , zaključujemo da su jednake i navedene površine osjenčane na Slici 19.

Iz Slike 17 odmah vidimo da je površina osjenčanog lika na Slici 16 jednaka $V(1 - \cos \varphi)$, a isto bismo dobili i računajući preko integrala

$$\int_0^\varphi v(x) dx = \int_0^\varphi V \sin x dx = (-V \cos x) \Big|_0^\varphi = -V \cos \varphi + V.$$

Alternativno, bez korištenja volumena, mogli smo jednakost površina $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ sa Slike 19 obrazložiti tako da presječnim ravninama te likove razrežemo na vrlo uske slojeve širine

npr. δ . Za piramidu ćemo u pojedinom sloju dobiti pravokutnik sa stranicama δ i V , a za lijevo tijelo odgovarajući isječak strane bit će krivolinijski četverokut koji je približno pravokutnik sa stranicama $\delta/\sin\varphi$ i $V\sin\varphi$ što daje istu površinu δV . Detalje možete nadopuniti sami.



Slika 20

Zaključno, vidimo da se površina lika sa Slike 1 desno može dobiti kao razlika površina dvaju pravokutnika koje lako možemo vizualizirati. Prvi je određen ortogonalnom projekcijom na ravninu tangencijalnu na plašt valjka, a drugi se dobiva razmatanjem plašta valjka. Ilustracija je dana na Slici 20 pri čemu smo prvi pravokutnik malo pomaknuli radi bolje preglednosti slike.