2. Separacija varijabli

Opći postupak separacije varijabli

Polazimo od linearnog parcijalnog diferencijalnog operatora (pdo) reda m:

$$Lu = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} c_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \ ,$$

pri čemu su općenito $c_{\boldsymbol{\alpha}}$ funkcije u varijabli $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$. Zanimaju nas operatori koji se mogu zapisati u obliku

$$L = L_1 L_2 + M_1 M_2 \ ,$$

pri čemu s L_1, M_1 označujemo linearne pdo po jednoj (od disjunktnih) skupina varijabli (npr. po $x_1, \ldots, x_k$), a s L_2, M_2 pdo po drugoj skupini varijabli (npr. po $x_{k+1}, \ldots, x_d$).

Na primjer, za $L = \partial_x^2 + \partial_y^2$ imamo: $L_1 = \partial_x^2$, $L_2 = 1$, $M_1 = 1$ i $M_2 = \partial_y^2$. U ovom se slučaju nameće traženje rješenja u obliku $u(x, y) = u_1(x) u_2(y)$, jer je tada $Lu = L_1 u_1 + M_2 u_2$.

Općenito zapisujemo $u = u_1 u_2$, pri čemu u_1 (u_2) ovisi samo o prvoj (drugoj) skupini varijabli, pa je: $L_1 L_2 (u_1 u_2) = (L_1 u_1)(L_2 u_2)$ i $M_1 M_2 (u_1 u_2) = (M_1 u_1)(M_2 u_2)$, odakle slijedi da se $Lu = 0$ može zapisati u obliku:

$$\frac{L_1 u_1}{M_1 u_1} = -\frac{M_2 u_2}{L_2 u_2} = \mu \ .$$

Kako prvi (drugi) razlomak ovisi samo o varijablama iz prve (druge) skupine, to je μ nužno konstanta. Time smo dobili dvije odvojene jednadžbe:

$$L_1 u_1 = \mu M_1 u_1 \qquad \text{i} \qquad M_2 u_2 = -\mu L_2 u_2 \ .$$

Ako ih riješimo, produkt rješenja $u = u_1 u_2$ je rješenje polazne jednadžbe $Lu = 0$. Štoviše, zbog linearnosti je i linearna kombinacija takvih rješenja (za različite μ!) ponovno rješenje polazne jednadžbe.

Primjer. Riješimo separacijom varijabli zadatak iz Uvoda (?....?): Riješiti početno-rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= 0 \\ u(\cdot, l) &= 0 \\ u(0, x) &= A \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_t(0, \cdot) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Potražimo rješenje u sljedećem obliku: $u(t, x) = T(t) X(x)$. Gore opisani postupak vodi do dviju jednadžbi, kojima prirodno pridružujemo rubne, odnosno početne, uvjete:

$$\left\{ \begin{aligned} X'' - \mu X &= 0 \\ X(0) &= 0 \\ X(l) &= 0 \end{aligned} \right. \qquad \text{i} \qquad \left\{ \begin{aligned} T'' - c^2 \mu T &= 0 \\ T(0) &= A \\ T'(0) &= 0 \ . \end{aligned} \right.$$

Zaista, $T(t) X(0) = 0$ ima za posljedicu da je $X(0) = 0$ ($T = 0$ daje samo trivijalno rješenje $u = 0$); slično i za $X(l) = 0$ i $T'(0) = 0$. Za $T(0)$ imamo samo uvjet da nije nula, dakle $A \neq 0$.

Za funkciju T imamo Cauchyjevu zadaću, koja uvijek ima rješenje, neovisno o vrijednosti konstante μ. S druge strane, za X uvijek imamo trivijalno rješenje $X = 0$, koje nas posebno ne zanima. Općenito rješenje jednadžbe za X (bez rubnih uvjeta) je $X(x) = c_1 e^{\sqrt{\mu} x} + c_2 e^{-\sqrt{\mu} x}$ za $\mu \neq 0$, odnosno $X(x) = c_1 x + c_2$ za $\mu = 0$.

Za $\mu \geqslant 0$ samo $c_1 = c_2 = 0$ nam omogućuje da gornja rješenja zadovoljavaju rubne uvjete, pa ne dobivamo netrivijalnog rješenja.

Za $\mu < 0$, gornje opće rješenje možemo izraziti i preko (realnih) trigonometrijskih funkcija: $X(x) = d_1 \cos \sqrt{-\mu}x + d_2 \sin \sqrt{-\mu}x$. Rubni uvjeti vode na $d_1 = 0$ i $\sin \sqrt{-\mu}l = 0$, što daje $\sqrt{-\mu}l = k\pi$, za $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, samo za prebrojivo mnogo $\mu_k = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ dobivamo opće rješenje jednadžbe i rubnih uvjeta: $X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l}x$. Uočimo da za $k = 0$ dobivamo nulu, dok za $k < 0$ zbog neparnosti sinusa dobivamo $X_k = -X_{-k}$, pa je dovoljno gledati samo rješenja za $k \in \mathbf{N}$ i njihove linearne kombinacije.

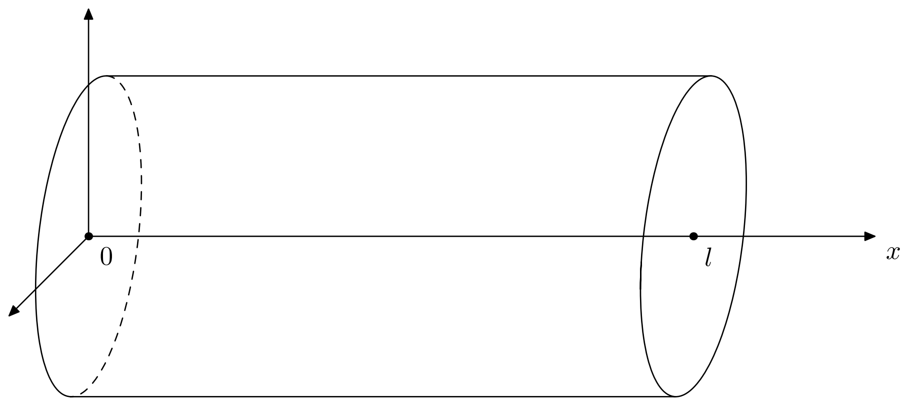
Ako tako dobivene μ_k uvrstimo u jednadžbu za T, dobivamo za pojedini μ_k opće rješenje oblika $T_k(t) = k_1 \cos \frac{ck\pi}{l}t + k_2 \sin \frac{ck\pi}{l}t$, za koje početni uvjet $T'(0) = 0$ daje $k_2 = 0$. Time smo dobili da je rješenje linearna kombinacija

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cos \frac{ck\pi}{l}t \sin \frac{k\pi}{l}x \; .$$

Za $k = 1$ posebno dobivamo rješenje koje zadovoljava i posljednji početni uvjet: $u(t,x) = A \cos \frac{c\pi}{l}t \sin \frac{\pi}{l}x$, što se podudara s ranije dobivenim rješenjem preko d'Alembertove formule. ∎

U prethodnom Primjeru mogli smo tražiti rješenje i za općenitiji početni uvjet: $u(0,\cdot) = f$, i tu bi se postavilo pitanje možemo li funkciju f prikazati kao linearnu kombinaciju funkcija oblika $\sin \frac{k\pi}{l}x$. Praktično, dovoljno nam je da f možemo po volji točno (u nekom prikladnom smislu, tj. u prikladnoj normi) aproksimirati takvim linearnim kombinacijama. To vodi na pitanje konvergencije Fourierovog reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l}x$ prema funkciji f, za neki povoljan izbor koeficijenata a_k. Tim ćemo se pitanje nešto kasnije podrobnije pozabaviti.

Primjer. Provođenje topline u tankom štapu duljine l opisujemo na sljedeći način (za detaljniji prikaz v. [Aganović-Veselić]). S $u(t,x)$ označimo temperaturu štapa u trenutku t, a na mjestu x: $u : \mathbf{R}_0^+ \times [0,l] \longrightarrow \mathbf{R}$.



Fourierov zakon provođenja topline tvrdi da je promjena temperature proporcionalna toku (fluksu); to nam daje sljedeći zakon (nema izvora topline) za temperaturu:

$$u_t = \kappa u_{xx} \; .$$

Pored toga, uzmimo da se krajevi štapa održavaju na stalnoj temperaturi 0. To nam daje sljedeće rubne uvjete: $u(\cdot,0) = u(\cdot,l) = 0$.

Da bi zadaća bila dobro postavljena, potrebno je još zadati i početnu razdiobu topline: $u(0,\cdot) = u_0$.

Kako primijeniti separaciju varijabli na ovu zadaću?

Uvrštavanjem $u(t,x) = T(t)X(x)$ u jednadžbu dobivamo:

$$\frac{T'}{\kappa T} = \frac{X''}{X} = \mu \; ,$$

što pak vodi na sljedeće dvije obične diferencijalne jednadžbe:

$$T' - \kappa\mu T = 0 \qquad \text{i} \qquad X'' - \mu X = 0\ .$$

Ovisno o vrijednosti μ (uzimamo $\lambda \in \mathbf{R}^+$):
a) $\mu = -\lambda^2 < 0$: $u(t,x) = e^{-\lambda^2\kappa t}(c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x)$,
b) $\mu = \lambda^2 > 0$: $u(t,x) = e^{\lambda^2\kappa t}(c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x})$,
c) $\mu = 0$: $u(t,x) = c_1 x + c_2$.

Svako rješenje jednadžbe provođenja u obliku produkta nužno je jednog od navedenih oblika, ali postoje rješenja jednadžbe provođenja koja nisu u obliku produkta, na primjer (v. Zadatak ??):

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}}\ . \tag{1}$$

Gornje se rješenje ne može prikazati niti kao (konačna!) linearna kombinacija rješenja oblika kao u (a)–(c), jer nije definirano u $t = 0$, a takva rješenja jesu.

Zbog rubnog uvjeta na X: $X(0) = X(l) = 0$, u obzir dolaze samo rješenja oblika (a), dakle: $X(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x$, i to uz $c_2 = 0$, te $\sin \lambda l = 0$. Time dobivamo jednadžbu za λ: $\lambda l = n\pi$, odnosno $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, za $n \in \mathbf{N}$ (jer $\pm n$ daju isto rješenje, do na predznak, što lako uključimo u konstantu).

Time smo dobili prebrojivo mnogo rješenja: $X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x$. Uvrštavanjem tih λ_n u jednadžbu za T dobivamo rješenja $T(t) = e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \kappa t}$, odnosno za u rješenje kao linearnu kombinaciju:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{N} b_n e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \kappa t} \sin \frac{n\pi}{l} x\ .$$

Za $t = 0$ posebno dobivamo $\sum_{n=1}^{N} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = u_0(x)$, i to je oblik početnog uvjeta za koji sada znamo riješiti početno-rubnu zadaću.

Uočimo da taj početni uvjet zadovoljava i uvjet kompatibilnosti, da je $u(0,0)$ i $u(0,l)$ dobro definirano.

∎

Zadaci.

1. Koristeći logaritamsku derivaciju $(\ln f)' = f'/f$ provjeriti da je formulom (1) zaista dano rješenje jednadžbe provođenja.

Ortonormirana baza u unitarnom prostoru

Podsjetimo se iz Linearne algebre definicije unitarnog prostora kao realnog ili kompleksnog vektorskog prostora opskrbljenog skalarnim produktom, koji ćemo označavati s $\langle\, u \mid v \,\rangle$. Norma se definira preko skalarnog produkta $\|u\| := \sqrt{\langle\, u \mid u \,\rangle}$.

Potpun unitaran prostor zovemo Hilbertovim prostorom. (Naravno, svaki konačnodimenzionalan unitaran prostor je potpun; razlike se javljaju tek kod beskonačnodimenzionalnih prostora.) Svaki se unitarni prostor može upotpuniti do Hilbertovog prostora.

Hilbertov prostor H je separabilan ako ima prebrojiv gust podskup, odnosno ako ima prebrojiv podskup čija je linearna ljuska gusta u H. Beskonačan skup vektora u Hilbertovom prostoru je ortogonalan (ortonormiran), ako je svaki njegov konačan podskup takav, odnosno ako su svaka dva vektora iz tog skupa međusobno okomita (i jedinična).

Teorem 1. *(***Besselova nejednakost***) Za ortonormiran skup $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq H$ vrijedi*

$$(\forall\, h \in H) \quad \sum_{k=1}^{n} |\langle\, h \mid e_k \,\rangle|^2 \leqslant \|h\|^2\ .$$

Dem. Vektor $z := h - \sum_{k=1}^{n}\langle\, h \mid e_k\,\rangle e_k$ je okomit na svaki od vektora e_i, pa lakim računom slijedi:

$$0 \leqslant \langle\, z \mid z\,\rangle = \langle\, h \mid h\,\rangle - \sum_{k=1}^{n}\langle\, h \mid e_k\,\rangle\overline{\langle\, h \mid e_k\,\rangle}\;.$$

Q.E.D.

Ako je (e_k) ortonormiran niz u H, to prelaskom na limes u gornjem teoremu dobivamo

$$(\forall\, h \in H) \quad \sum_{k=1}^{\infty}|\langle\, h \mid e_k\,\rangle|^2 \leqslant \|h\|^2\;,$$

što ima za posljedicu da je Fourierov red za h: $\sum_{k=1}^{\infty}\langle\, h \mid e_k\,\rangle e_k$ apsolutno konvergentan. Zaista, pripadni niz parcijalnih suma je Cauchyjev, a zbog potpunosti H i konvergira k nekom limesu. Pitanje je konvergira li k h, na što nam odgovor daje sljedeći:

Teorem 2. *Sljedeća su svojstva ekvivalentna:*

i) Potprostor $[\{e_1, e_2, \ldots\}]$ je gust u H.

ii) Za svaki vektor $h \in H$ njegov Fourierov red konvergira k h.

iii) Za svaki $h \in H$ vrijedi Besselova jednakost: $\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\, h \mid e_k\,\rangle|^2 = \|h\|_H^2$.

iv) Ako je svaki Fourierov koeficijent nekog vektora nula, onda je taj vektor nužno nul-vektor. ∎

Ukoliko ortonormiran niz (e_n) u H ima jedno od gornjih svojstava, onda kažemo da je taj niz *potpun*, odnosno *ortonormirana ili Hilbertova baza* za H. Napomenimo da Hilbertova baza u beskonačnodimenzionalnim prostorima nije i (algebarska) baza.

U svakom beskonačnodimenzionalnom separabilnom Hilbertovom prostoru postoji potpun ortonormirani niz.

Primjer. Na predavanju je intuitivno definirana diferencijabilna struktura kružnice. Sada ćemo to pokušati načiniti rigoroznije.

Polazimo od aditivne grupe realnih brojeva, s pripadnom topološkom i diferencijalnom strukturom. U $(\mathbf{R}, +)$ je $(\mathbf{Z}, +)$ podgrupa, pa je dobro definirana kvocijentna grupa $\mathbf{T} := \mathbf{R}/\mathbf{Z}$. Na $\mathbf{T}$ uvodimo topologiju kao kvocijentnu topologiju, preko preslikavanja $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{T}$ (namatanja pravca na kružnicu). Skup $U \subseteq \mathbf{T}$ je otvoren ako i samo ako je njegova praslika, $g^{\leftarrow}(U)$ otvoren skup u $\mathbf{R}$. Lako se provjeri da je na taj način zaista zadana topologija na $\mathbf{T}$. Može se pokazati da je $\mathbf{T}$ kompaktan topološki prostor.

Ako je $f : \mathbf{T} \longrightarrow X$ proizvoljna funkcija s $\mathbf{T}$ u bilo koji skup X, onda povlačenjem definiramo funkciju $g \circ f : \mathbf{R} \longrightarrow X$. Može se pokazati da je takva funkcija f neprekinuta (dakle, uzimamo da je X topološki prostor) ako i samo ako je $g \circ f$ neprekinuta.

Istu ideju koristimo za definiciju diferencijabilnosti odgovarajuće klase.

Integral funkcija po $\mathbf{T}$ možemo definirati kao integral njihovih povlačenja $g \circ f$ po $[0, 1\rangle$. Na taj način možemo doći i do prostora $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$, upotpunjenja prostora $\mathrm{C}^0(\mathbf{T})$ u normi dobivenoj iz sljedećeg skalarnog produkta:

$$\langle\, u \mid v\,\rangle := \int_{\mathbf{T}} u\bar{v}\;. \tag{2}$$

U $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$ je funkcijama e_n, čija povlačenja glase $t \mapsto e^{2n\pi it}$, $n \in \mathbf{Z}$, zadan ortonormiran niz, za koji se može pokazati da je potpun.

Te se funkcije mogu zamijeniti i s $1, \sqrt{2}\cos 2n\pi t, \sqrt{2}\sin 2n\pi t$, $n \in \mathbf{N}$, koje ponovno čine prebrojiv ortonormiran skup.

Povlačenjem funkcija s $\mathbf{T}$ na $\mathbf{R}$ dobivamo sve 1-periodične funkcije na $\mathbf{R}$, i obratno, polazeći od 1-periodičnih funkcija na $\mathbf{R}$ dobro je definirana neka funkcija na $\mathbf{T}$.

Posve analogno smo mogli (za $l \in \mathbf{R}^+$) gledati i podgrupu $(2l\mathbf{Z}, +)$ u $(\mathbf{R}, +)$, te pripadnu kvocijentnu grupu $\mathbf{R}/2l\mathbf{Z}$. Umjesto skalarnog produkta (2) uzmimo $\frac{1}{2l}\int_{\mathbf{T}} u\bar{v}$, gdje je $2l$ upravo mjera (duljina) $\mathbf{T}$, dobivamo da funkcije $t \mapsto e^{\frac{n\pi}{l}it}$ čine ortonormiranu bazu za $\mathrm{L}^2(\mathbf{T})$. ∎

Simetrične obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

Separacijom varijabli u klasičnim jednadžbama matematičke fizike često dolazimo do linearnih običnih diferencijalnih jednadžbi sljedećeg oblika:

$$x'' + p_1 x' + p_0 x = 0 \ , \tag{3}$$

gdje su p_0 i p_1 funkcije u varijabli t. Tu jednadžbu možemo zapisati u obliku ekvivalentnog sustava prvog reda (v. poglavlje o običnim diferencijalnim jednadžbama; zamjena je $x_1 := x$, $x_2 := x'$):

$$\mathsf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p_0 & -p_1 \end{bmatrix} \mathsf{x} = \mathbf{A}\mathsf{x} \ ,$$

pri čemu je $\mathsf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, dok bi pripadni početni uvjeti $x(t_0) = a$, $x'(t_0) = b$ glasili $\mathsf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$.

Definiramo da je sustavu $\mathsf{x}' = \mathbf{A}\mathsf{x}$ *adjungiran* sustav $\mathsf{y} = -\mathbf{A}^*\mathsf{y}$ ($\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$ za realne matrice).

Lako se može provjeriti da je sustavu $\mathsf{y} = -\mathbf{A}^*\mathsf{y}$ adjungiran upravo polazni sustav. U daljem ćemo radi jednostavnosti gledati samo realne funkcije i matrice, osim ako posebno ne naglasimo.

Posebno, sustavu pridruženom jednadžbi (3) adjungiran je sustav

$$\mathsf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & p_0 \\ -1 & p_1 \end{bmatrix} \ ,$$

kojem možemo pridružiti linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda ($y_2' = -y_1 + p_1 y_2$ deriviramo i uvrstimo y_1' izraženo iz prve jednadžbe sustava, te zamijenimo oznaku y_2 s y)

$$y'' - (p_1 y)' + p_0 y = 0 \ .$$

Kažemo da je ta jednadžba adjungirana (3). Kad bi u polaznoj jednadžbi koeficijent uz x'' bio p_2 umjesto 1, adjungirana bi joj jednadžba po definiciji glasila $(p_2 y)'' - (p_1 y)' + p_0 y = 0$.

Definirajmo diferencijalne operatore

$$\begin{aligned} L &:= p_2 \frac{d^2}{dt^2} \cdot + p_1 \frac{d}{dt} \cdot + p_0 \cdot \ , \\ M &:= \frac{d^2}{dt^2}(p_2 \cdot) - \frac{d}{dt}(p_1 \cdot) + p_0 \cdot \ , \end{aligned} \tag{4}$$

recimo $L, M : \mathrm{C}^2(I) \longrightarrow \mathrm{C}^0(I)$, ukoliko su funkcije p_i dovoljno glatke na intervalu I. Jednadžbe $Lx = 0$ i $My = 0$ su međusobno adjungirane, pa to motivira da kažemo kako su i operatori L i M međusobno adjungirani.

Lema 1. (**Lagrangeev identitet**) *Postoji funkcija Q u varijablama t, x, x', y, y' takva da vrijedi*

$$yL(x) - xL(y) = \frac{d}{dt} Q(t, x, x', y, y') \ .$$

Dem. Lakim računom se može provjeriti da je $yL(x) - xL(y) = \frac{d}{dt}\Big(p_2 x' y - x(p_2 y)' + x p_1 y\Big)$.

Q.E.D.

Korolar 1.

$$\int_{t_1}^{t_2} (yL(x) - xL(y)) = \Big(p_2 x' y - x(p_2 y)' + x p_1 y\Big) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

∎

Posebno, ako su x i y funkcije koje iščezavaju van nekog zatvorenog segmenta u intervalu I, onda iz Korolara slijedi da su operatori L i M adjungirani operatori na $\mathrm{L}^2(I)$.

Primjer. Sljedeće se jednadžbe često dobivaju kao rezultat separacije varijabli:

$x'' + \lambda x = 0,$

(Bessel) $t^2x'' + tx' + (\lambda t^2 - \mu^2)x = 0,$

(Euler) $t^2x'' + 2tx' + \lambda x = 0,$ i

(Legendre) $(1-t^2)x'' - 2tx' + \lambda x = 0.$

∎

Zanimljivo je da se svi gornji primjeri mogu zapisati u posebnom obliku

$$Lx = \frac{d}{dt}(px') + qx = 0 \ , \tag{5}$$

pri čemu je p funkcija t, a q i t i λ (μ je unaprijed zadana konstanta).

Kažemo da je diferencijalni operator L *simetričan* ako je adjungiran samome sebi.

Lema 2. *Operator L u (4) je simetričan ako i samo ako je oblika (5).*

Dem. Računom se lako vidi da je operatoru (5) zaista adjungiran on sam. Neka je sada zadan operator L u (4), te neka je on jednak sebi adjungiranom operatoru M; nakon kraćenja to daje

$$2p_1\frac{d}{dt} - 2p_2'\frac{d}{dt} - p_2'' + p_1' = 0 \ .$$

Taj diferencijalni operator prvog reda će biti nula ako i samo ako je $p_1 = p_2'$ i $p_1' = p_2''$, a to će upravo vrijediti ako je ispunjen prvi od njih, što daje traženi oblik za L.

Q.E.D.

Uočimo da smo u Lemi 2 implicitno pretpostavili da su p_i, odnosno p, dovoljno glatki (koliko je to dovoljno?). Također uočimo da za simetrične operatore Lagrangeev identitet poprima oblik:

$$yL(x) - xL(y) = \frac{d}{dt}\Big(p(x'y - y'x)\Big) \ .$$

U daljem pretpostavljamo da je p diferencijabilno i istog znaka (recimo, $p > 0$), a q neprekinuto na intervalu I na kojem gledamo diferencijalnu jednadžbu (5). Ukoliko uvedemo oznaku $y := px'$, jednadžbu možemo zapisati u obliku linearnog sustava prvog reda

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{p}y \\ y' = -qx \ , \end{cases}$$

za koji Cauchyjeva zadaća ima jedinstveno rješenje.

Prijeđimo na polarne koordinate (H. Prüfer):

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos\varphi(t) \\ y(t) &= r(t)\sin\varphi(t) \ , \end{aligned}$$

što je regularna zamjena varijabli za $(x, y) \neq (0, 0)$. Uvrštavanjem gornjeg oblika za x i y u sustav, dobivamo sljedeći sustav za r i φ:

$$\begin{cases} r'\cos\varphi - r\sin\varphi\,\varphi' = \dfrac{r}{p}\sin\varphi \\ r'\sin\varphi + r\cos\varphi\,\varphi' = -qr\cos\varphi \ , \end{cases}$$

odakle algebarskim rješavanjem po r' i φ' (Cramerov sustav) dobivamo

$$\begin{cases} \varphi' = -\Big(\dfrac{1}{p}\sin^2\varphi + q\cos^2\varphi\Big) \\ r' = \Big(\dfrac{1}{p} - q\Big)r\cos\varphi\sin\varphi \ . \end{cases} \tag{6}$$

Prva od tih jednadžbi ne sadrži nepoznanicu r, pa postoji njezino rješenje, funkcija φ u varijabli t. Uvrstivši takvo rješenje u drugu jednadžbu, lako separiramo varijable

$$\frac{dr}{r} = \Big(\frac{1}{p} - q\Big) \cos\varphi \sin\varphi \, dt ,$$

odakle integriranjem dobivamo

$$r(t) = Ce^{\frac{1}{2}\int_0^t (1/p(\tau) - q(\tau)) \sin 2\varphi(\tau)\, d\tau}$$

(pritom smo uzeli početni uvjet $r(0) = C \neq 0$).

Uočimo sljedeće svojstvo rješenja φ: Ako je φ rješenje za (6_1), onda je i $\varphi + n\pi, n \in \mathbf{Z}$ također rješenje. Stoga za zadani $k \in \mathbf{Z}$, i danu točku $t_0 \in I$, možemo izabrati rješenje tako da vrijedi

$$\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi < \varphi(t_0) \leqslant \frac{\pi}{2} + k\pi .$$

Zadaci.

1. Pokazati da ako su $\mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2$ dva linearno neovisna rješenja prvog sustava, dakle ako je $\mathbf{X} = [\mathsf{x}_1 \mathsf{x}_2]$ elementarno (fundamentalno) rješenje (tada je ta matrica regularna u svakoj točki, ako je u barem jednoj!), onda je $\mathbf{Y} := \mathbf{X}^{-*}$ elementarno rješenje adjungiranog sustava.

2. Ako jednadžbu $p_2x'' + p_1x' + p_0x = 0$ možemo podijeliti s p_2, pokazati da tako dobivenoj jednadžbi adjungirana jednadžba ne mora biti ekvivalentna s $(p_2y)'' - (p_1y)' + p_0y = 0$.

3. Po analogiji s definicijom adjungirane jednadžbe drugog reda, definirati adjungiranu jednadžbu jednadžbi n-tog reda. Pokazati anologon Lagrangeevog identiteta.

4. Neka su p i q neprekinute funkcije na $[0, l]$.

a) Zamjenom $u(x) = y(x)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x p(\xi)\, d\xi}$ svesti jednadžbu

$$u'' + pu' + qu = 0 \tag{$*$}$$

na kanonski oblik $y'' + Ay = 0$.

b) Množenjem jednadžbe $(*)$ s $a(x) := e^{\int_0^x p(\xi)\, d\xi}$ svesti je na *Sturm-Liouvilleov* oblik $(au')' - bu = 0$.

5. Napisati sljedeće jednadžbe u kanonskom i Sturm-Liouvilleovom obliku:

a) $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$.

b) $u'' + (\mathrm{ctg}x)u' + u = 0$.

c) $(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n+1)u = 0$.

d) $u'' + p(x)u = 0$.

Razni zadaci

Slijedi niz različitih zadataka o separaciji varijabli.

Zadaci.

1. Kružna ploča jediničnog polumjera u x, y-ravnini ima izolirane stranice. Na dijelu ruba gdje je $y > 0$ održava se temperatura $u_+ \in \mathbf{R}$, dok se na preostalom dijelu ruba održava $u_- \in \mathbf{R}$. Odrediti stacionarnu razdiobu temperature.

2. Odrediti stacionarnu razdiobu temperature unutar kružnog isječka $\rho < a$ i $\varphi \in \langle 0, \alpha \rangle$, za $a \in \mathbf{R}^+$ i $\alpha \in \langle 0, 2\pi \rangle$; ukoliko se na dijelu ruba koji čine polumjeri kruga održava temperatura 0, dok je na dijelu kružnice temperatura zadana s $u(a, \varphi) = f(\varphi)$.

3. Na $\mathrm{K}(\mathbf{0}, R) \subseteq \mathbf{R}^2$ riješiti sljedeću rubnu zadaću:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \\ u(R, \varphi) = a \sin^2 \varphi + b \cos^2 \varphi \end{cases}$$

gdje su a i b realne konstante.

4. Na jediničnom krugu u $\mathbf{R}^2$ riješiti sljedeću rubnu zadaću:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \\ u(1, \varphi) = 120 + 60 \cos 2\varphi \ . \end{cases}$$

5. Naći funkciju u, harmoničku unutar jediničnog kruga, za koju vrijedi $u(1, \varphi) = \sin^6 \varphi + \cos^6 \varphi$.

6. Na krugu $D \ldots x^2 + y^2 + 2x < 0$ riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu ($\triangle u = 0$), ako za (x, y) na pripadnoj kružnici vrijedi

$$u(x, y) = 4x^3 + 6x - 1.$$

7. Na $\mathrm{K}(\mathbf{0}, a) \subseteq \mathbf{R}^2$ riješiti sljedeću rubnu zadaću:

$$\begin{cases} \triangle u = 0 \\ u(a, \varphi) = \begin{cases} \sin \varphi & , \text{za } 0 \le \varphi < \pi \\ \frac{1}{3} \sin^3 \varphi & , \text{za } \pi \le \varphi < 2\pi \end{cases} \end{cases}$$

8. Naći harmoničku funkciju u, na krugu radijusa R sa središtem u ishodištu, ako je

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R, \varphi) = \sin^3 \varphi.$$

9. Naći harmoničku funkciju u na kružnom vijencu $1 < r < 2$, ako vrijedi

$$\begin{cases} u(1, \varphi) = 1 + \cos^2 \varphi \\ u(2, \varphi) = 2 + \sin^2 \varphi \ . \end{cases}$$

10. Riješiti Poissonovu jednadžbu $\triangle u = A$ unutar kružnog vijenca $R_1 < r < R_2$, uz rubne uvjete: $u_{|r=R_1} = u_1$ i $u_{|r=R_2} = u_2$; pri čemu su A, u_1 i u_2 zadani brojevi.

11. Riješiti Poissonovu jednadžbu $\triangle u = -Axy$ (A je realan broj) u krugu polumjera R sa središtem u ishodištu, uz rubni uvjet $u_{|r=R} = 0$.

12. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u jediničnoj kugli sa središtem u ishodištu trodimenzionalnog euklidskog prostora, ako je na dijelu polusfere gdje je $z > 0$, $u = u_0$ ($u_0 \in \mathbf{R}$); dok je na preostalom dijelu sfere $u = 0$.

13. Riješiti Dirichletovu rubnu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u polukugli polumjera R, u kojoj je $z > 0$; ako je na polusferi $u = u_0$ ($u_0 \in \mathbf{R}$), dok je na bazi $u = 0$.

14. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u kugli polumjera R, ako je ($u_=$ i u_- su konstante):

$$u(R, \mathrm{th}, \varphi) = \begin{cases} u_+ & , 0 \le \mathrm{th} < \frac{\pi}{2} \\ u_- & , \frac{\pi}{2} \le \mathrm{th} \le \pi \end{cases} .$$

15. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u kugli polumjera 2, ako je:

$$u(2, \mathrm{th}, \varphi) = \cos^2 \mathrm{th} \sin^2 \mathrm{th} .$$

16. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u jediničnoj kugli sa središtem u ishodištu trodimenzionalnog euklidskog prostora, ako je na sferi $u(1, \mathrm{th}, \varphi) = |\cos \mathrm{th}|$.

17. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu u jediničnoj kugli sa središtem u ishodištu trodimenzionalnog euklidskog prostora, ako je na sferi

$$u(1, \mathrm{th}, \varphi) = \sum_{n=0}^{4} \cos n\mathrm{th} .$$

18. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera R, ako zadovoljava sljedeći mješovit rubni uvjet:

$$(u + u_r)_{|r=R} = 1 + \cos^2 \mathrm{th} .$$

19. Riješiti vanjsku Dirichletovu zadaću na vanjštini jedinične kugle ($r > 1$) za Laplaceovu jednadžbu, ako je:

$$u(1, \mathrm{th}, \varphi) = \begin{cases} \cos \mathrm{th} & , 0 \le \mathrm{th} \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & , \frac{\pi}{2} < \mathrm{th} \le \pi \end{cases}$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r, \mathrm{th}, \varphi) = 0 .$$

20. Riješiti Dirichletovu zadaću za Poissonovu jednadžbu

$$\triangle u = 1$$

unutar sfernog sloja $a < r < b$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je: $u_{|r=a} = u_{|r=b} = 0$.

21. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $1 < r < 2$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1} = 1 - \cos 2\mathrm{th}$, a $u_{|r=2} = 2 \cos \mathrm{th}$.

22. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $1 < r < 2$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u(1, \mathrm{th}, \varphi) = \sin \mathrm{th} \sin 3\mathrm{th}$, a $u(2, \mathrm{th}, \varphi) = \cos^2 \mathrm{th} \sin^2 \mathrm{th}$.

23. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera R, ako zadovoljava sljedeći Dirichletov rubni uvjet:

$$u_{|r=R} = \sin^2 \mathrm{th} \cos 2\varphi .$$

24. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera 1, ako zadovoljava sljedeći Dirichletov rubni uvjet:

$$u_{|r=1} = \sin^2 \mathrm{th} \cos(2\varphi + \frac{\pi}{3}) .$$

25. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera 1, ako zadovoljava sljedeći Dirichletov rubni uvjet:

$$u_{|r=1} = \sin \mathrm{th}(\sin \varphi + \sin \mathrm{th}) .$$

26. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera 1, ako zadovoljava sljedeći Neumannov rubni uvjet:

$$(u_r)_{|r=1} = \sin^{10} \mathrm{th} \sin 10\varphi; ,$$

ako je k tome vrijednost funkcije u u ishodištu jednaka 1.

27. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera R, ako zadovoljava sljedeći Dirichletov rubni uvjet:

$$u_{|r=R} = \sin^3 \mathrm{th} \sin(3\varphi + \frac{\pi}{4}) \ .$$

28. Naći harmoničku funkciju u na kugli polumjera R, ako zadovoljava sljedeći mješovit rubni uvjet:

$$(u + u_r)_{|r=R} = \sin^2 \mathrm{th} \left(\sqrt{2}\cos(2\varphi + \frac{\pi}{4}) + 2\cos^2\varphi\right) \ .$$

29. Riješiti vanjsku Dirichletovu zadaću na vanjštini jedinične kugle ($r > 1$) za Laplaceovu jednadžbu, ako je:

$$u_{|r=1} = \cos^2 \mathrm{th} \sin \mathrm{th} \sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) \ .$$

30. Riješiti vanjsku Dirichletovu zadaću na vanjštini jedinične kugle ($r > 1$) za Laplaceovu jednadžbu, ako je:

$$u_{|r=1} = u_0 \cos \mathrm{th} \sin^3 \mathrm{th} \cos 3\varphi \ ,$$

pri čemu je u_0 konstanta.

31. Riješiti vanjsku mješovitu zadaću na vanjštini kugle polumjera R ($r > R$) za Laplaceovu jednadžbu, ako je:

$$(u - u_r)_{|r=R} = \cos^2 \frac{\mathrm{th}}{2} \sin \mathrm{th} \sin(\varphi + \frac{\pi}{6}) \ .$$

32. Riješiti vanjsku Dirichletovu zadaću na vanjštini jedinične kugle ($r > 1$) za Laplaceovu jednadžbu, ako je:

$$u_{|r=1} = \cos^4 \mathrm{th} \cos 2\varphi \ .$$

33. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $1 < r < 2$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1} = 3\sin^2 \mathrm{th} \sin 2\varphi$, a $u_{|r=2} = 3\cos \mathrm{th}$.

34. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $1 < r < 2$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1} = 7\sin \mathrm{th} \cos\varphi$, a $u_{|r=2} = 7\cos \mathrm{th}$.

35. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $1 < r < 2$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1} = 31\sin 2\mathrm{th} \sin\varphi$, a $u_{|r=2} = 31\sin^2 \mathrm{th} \cos 2\varphi$.

36. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $\frac{1}{2} < r < 1$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1/2} = 0$, a $u_{|r=1} = 6\sin^2 \mathrm{th} \cos^2\varphi$.

37. Naći harmoničku funkciju u u sferičnom sloju $1 < r < 2$, koja zadovoljava sljedeće rubne uvjete:

$$\begin{aligned} u_{|r=1} &= 1 \\ (u_r)_{|r=2} &= 15\cos\varphi\left(\cos^2 \mathrm{th} \sin \mathrm{th} + \sin\varphi \sin^2 \mathrm{th} \cos \mathrm{th}\right) \ . \end{aligned}$$

38. Naći harmoničku funkciju u u sferičnom sloju $1 < r < 2$, koja zadovoljava sljedeće rubne uvjete:

$$\begin{aligned} u_{|r=1} &= \sin \mathrm{th} \sin\varphi(5 + 6\cos \mathrm{th}) \\ (u_r)_{|r=2} &= 12\sin 2\mathrm{th} \sin\varphi \ . \end{aligned}$$

39. Riješiti Dirichletovu zadaću za Laplaceovu jednadžbu unutar sfernog sloja $\frac{1}{2} < r < 1$ u trodimenzionalnom prostoru, ako je $u_{|r=1/2} = 30\sin^2 \mathrm{th} \cos \mathrm{th} \cos^2\varphi$, a $u_{|r=1} = 0$.

40. Naći rješenje Laplaceove jednadžbe u jediničnoj kugli takvo da zadovoljava uvjet (u Kartezijevim koordinatama)

$$u(0,0,z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} \ .$$

41. Kvadratna tanka ploča jedinične stranice ima izolirane plohe, dok su joj stranice na temperaturi 0. Ako je početna temperatura ploče dana funkcijom f, odrediti temperaturu u bilo kom vremenu $t > 0$.

42. Kvadratna tanka ploča jedinične stranice ima izolirane plohe, dok su joj stranice na temperaturi 0, osim stranice $y = 1$ gdje je temperatura jednaka konstanti u_0. Odrediti stacionarno stanje temperature na ploči.

43. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, 3] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_t &= 2u_{xx} \\ u(0, .) &= 10 \\ u(3, .) &= 40 \\ u(., 0) &= 25 \; . \end{aligned}$$

44. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (γ je pozitivna a β realna konstanta, dok je f funkcija na $[0, L]$):

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} + \beta e^{-\gamma x} \\ u(0, .) &= 0 \\ u(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= f \; , \end{aligned}$$

te dati fizikalnu interpretaciju.

45. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, u_1 i u_2 su konstante, a f funkcija na $[0, L]$):

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - \alpha^2 u \\ u(0, .) &= u_1 \\ u(L, .) &= u_2 \\ u(., 0) &= f \; . \end{aligned}$$

Posebno napisati rješenje za $f = 0$.

46. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α i u_0 su konstante):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0, .) &= 0 \\ u(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= u_0 \; . \end{aligned}$$

Ako je $U_n(x, t)$ n-ta parcijalna suma Fourierovog reda dobivenog separacijom varijabli, dokazati da vrijedi:

$$\lim_{n\to\infty} U_n(l/2, t) = 0 \; .$$

47. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, 1] \times \mathbf{R}^+$ (α, h i u_0 su konstante; $h > 0$):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} - h(u - u_0) \\ u(0, .) &= 0 \\ u(1, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

48. Tanak homogeni štap duljine L ima početnu temperaturu ax/L ($a \in \mathbf{R}$). Na kraju $x = 0$ podržava se temperatura nula, dok se na kraju $x = L$ temperatura mijenja po zakonu $u(L, t) = ae^{-t}$. Naći raspodjelu temperature za $t > 0$.

49. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, A i T su konstante):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0, .) &= 0 \\ u(L, t) &= Ae^{-t} \\ u(., 0) &= T \; . \end{aligned}$$

50. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, 1] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 4u_x + x - 4t + 1 + e^{-2x} \cos^2 \pi x \\ u(0, t) &= t \\ u(1, t) &= 2t \\ u(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

51. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + 6u + x^2(1 - 6t) - 2(t + 3x) + \sin 2x \\ u_x(0, .) &= 1 \\ u_x(\pi, t) &= 2\pi t + 1 \\ u(x, 0) &= x \; . \end{aligned}$$

52. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - 2u_x + u + e^x \sin x - t \\ u(0, t) &= 1 + t \\ u(\pi, t) &= 1 + t \\ u(x, 0) &= 1 + e^x \sin 2x \; . \end{aligned}$$

53. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, u_1 i u_2 su konstante):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0, .) &= u_1 \\ u(L, .) &= u_2 \\ u(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Odrediti asimptotičku vrijednost rješenja: $w(x) := \lim_{t\to\infty} u(x, t)$. Koje je fizikalno značenje gornje zadaće, a koje je značenje w?

54. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$ (α i β su pozitivne konstante):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} - \beta u + \sin \frac{\pi x}{L} \\ u(0, .) &= 0 \\ u(\pi, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

55. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α i h su konstante, a f funkcija na $[0, L]$):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u_x(0, t) &= hu(0, t) \\ u_x(L, t) &= -hu(L, t) \\ u(., 0) &= f \; . \end{aligned}$$

Koje je fizikalno značenje gornje zadaće?

56. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, T, U i h su konstante, $h > 0$):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} \\ u(0, .) &= T \\ u_x(L, .) + hu(L, .) &= U \\ u(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

57. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, β, U i h su konstante, $\beta, h > 0$):

$$\begin{aligned} u_t &= \alpha^2 u_{xx} - \beta u \\ u_x(., t) - hu(0, t) &= 0 \\ u_x(L, t) &= 0 \\ u(., 0) &= U \; . \end{aligned}$$

58. Tankoj vodljivoj žici kraj $x = 0$ održava se na temperaturi nula, dok je kraj $x = L$ uronjen u sredstvo temperature nula (točnije, na tom je kraju promjena temperature proporcionalna s razlikom temperatura na žici i sredstvu). Preostali dio žice je izoliran.

Ako je u početnom času temperatura žice bila opisana funkcijom f, odrediti temperaturu žice za $t > 0$.

59. Beskonačno duga ploča širine a ima dvije paralelne stranice održavane na temperaturi nula, dok je treća stranica na temperaturi $u_0 \in \mathbf{R}$. Odrediti stacionarno stanje temperature.

60. Kroz stranicu $y = 0$ beskonačnog cilindra pravokutnog presjeka $[0, a] \times [0, b] \times \mathbf{R}$ ulazi količina topline Q, dok ta ista količina topline izlazi kroz stranicu $x = 0$. Naći stacionarnu raspodjelu temperature u cilindru, ako je tôk topline jednolik po spomenute dvije stranice, dok su preostale dvije stranice izolirane.

61. Žica duljine L ima početni oblik zadan funkcijom f, dok je početna brzina jednaka nuli. Odrediti položaj žice u ovisnosti o vremenu, ako je žica učvršćena na krajevima.

62. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α, v_0 i g su konstante):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + g \\ u(0, .) &= 0 \\ u_x(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \\ u_t(., 0) &= v_0 \; . \end{aligned}$$

63. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α i β su konstante):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + \beta \mathrm{sh} x \\ u(0, .) &= 0 \\ u(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \\ u_t(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

64. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α i β su konstante):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + \beta e^{-t} \sin \frac{\pi x}{L} \\ u(0, .) &= 0 \\ u(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \\ u_t(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

65. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ (α i $\beta > 0$ su konstante):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} \\ u_x(0, .) &= 0 \\ u_x(L, t) &= \beta e^{-t} \\ u(x, 0) &= \frac{\beta\alpha \mathrm{ch}\frac{x}{\alpha}}{\mathrm{sh}\frac{L}{\alpha}} \\ u_t(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

66. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ ($\alpha, h, k > 0$ su konstante):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} \\ u_x(0, .) &= 0 \\ u_x(L, .) + hu(L, .) &= 0 \\ u(x, 0) &= kx \\ u_t(., 0) &= 0 \; . \end{aligned}$$

Koje je fizikalno značenje gornje zadaće.

67. Odrediti longitudinalne titraje elastičnog štapa čiji su krajevi vezani oprugama jednakih krutosti uz čvrstu podlogu. Početni uvjeti za progib su: $u(., 0) = \varphi$ i $u_t(., 0) = \psi$; dok su rubni uvjeti:

$$\begin{aligned} u_x(0, .) - hu(0, .) &= 0 \\ u_x(L, .) + hu(L, .) &= 0 \; . \end{aligned}$$

68. Riješiti početno-rubnu zadaću:

$$u_{xx} - \alpha^2 u_{tt} - 2hu_t - b^2 u = 0$$

uz homogene početne uvjete i rubne uvjete zadane s: $u(0, .) = A$ i $u(L, .) = 0$.

69. Desni kraj elastičnog štapa vezan je oprugom, a lijevi kraj je slobodan. Odrediti longitudinalne titraje štapa ako je početna deformacija $u(., 0) = 0$ i $u_t(., 0) = \varphi$.

70. Progib žice u polju sile teže u sredstvu s otporom zadovoljava jednadžbu

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - 2\nu u_t + g \; .$$

Žica je učvršćena na krajevima, te ima početnu brzinu nula i početni progib

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{hx}{x_0} & , 0 < x < x_0 \\ \frac{h(L-x)}{L-x_0} & , x_0 < x < L \end{cases} \; .$$

Naći progib žice u ovisnosti o vremenu, te odrediti limes

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) \; .$$

71. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ ($\alpha > 0$ je konstanta):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + 2 \sin 2t \\ u_x(0, .) &= 0 \\ u_x(L, t) &= \frac{2}{a} \sin \frac{2L}{\alpha} \sin 2t \\ u(x, 0) &= 0 \\ u_t(x, 0) &= -2 \cos \frac{2x}{\alpha} \; . \end{aligned}$$

72. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} \\ u(0, t) &= t \\ u_x(\pi, .) &= 1 \\ u(x, 0) &= \sin \frac{x}{2} \\ u_t(x, 0) &= 1 \ . \end{aligned}$$

73. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, L] \times \mathbf{R}^+$ ($\alpha > 0$ je konstanta):

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \alpha^2 u_{xx} + Ae^{-t} \cos \frac{\pi x}{2l} \\ u_x(0, .) &= 0 \\ u(L, .) &= 0 \\ u(., 0) &= 0 \\ u_t(., 0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

74. Odrediti longitudinalne titraje elastičnog štapa čiji su krajevi učvršćeni, pod djelovanjem harmoničke sile gustoće:

$$p(x, t) = A\rho \sin \omega t \ ,$$

pri čemu je $\omega \neq \frac{k\pi\alpha}{l}, k \in \mathbf{Z}$. Početni uvjeti su homogeni.

75. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 3u_t &= u_{xx} + 2u_x - 3x - 2t \\ u(0, .) &= 0 \\ u(\pi, t) &= \pi t \\ u(x, 0) &= e^{-x} \sin x \\ u_t(x, 0) &= x \ . \end{aligned}$$

76. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 3u_t &= u_{xx} + u - x(4 + t) + \cos \frac{3x}{2} \\ u_x(0, t) &= t + 1 \\ u(\pi, t) &= \pi(t + 1) \\ u(x, 0) &= x \\ u_t(x, 0) &= x \ . \end{aligned}$$

77. Kvadratna membrana stranice jedinične duljine ima početni progib opisan funkcijom $f(x, y)$ i početnu brzinu nula. Odrediti progib membrane za $t > 0$, ako su rubovi membrane učvršćeni u x, y- ravnini.

78. Odrediti titranje pravokutne membrane ($[0, a] \times [0, b]$) s učvršćenim krajevima, ako je početna brzina nula, a početni položaj

$$u(x, y, 0) = Axy(a - x)(b - y) \ .$$

79. Odrediti titranje pravokutne membrane ($[0, a] \times [0, b]$) s učvršćenim krajevima, ako su početna brzina i početni položaj nula, a na membranu djeluje sila površinske gustoće

$$f(x, y, t) = A(x, y) \sin \omega t \ .$$

80. Riješiti početno-rubnu zadaću na $[0, \pi] \times [0, \pi] \times \mathbf{R}^+$:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \triangle u \\ u(0, ., .) &= u(\pi, ., .) = 0 \\ u(., 0, .) &= u(., \pi, .) = 0 \\ u(x, y, 0) &= 3 \sin x \sin 2y \\ u_t(x, y, 0) &= 5 \sin 3x \sin 4y \; . \end{aligned}$$

81. Kružna ploča jediničnog polumjera ima početnu temperaturu $f(r)$, dok se na rubu održava temperatura nula. Odrediti temperaturu ploče za $t > 0$ ako nema gubitaka topline preko dviju ravnih ploha ploče.

82. Riješiti početno-rubnu zadaću na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, 1] \times \mathbf{R}^+$ (u dvije prostorne dimenzije):

$$\begin{cases} \quad\quad u_t = k\triangle u \\ u(1, \cdot, \cdot) = u_0 \\ u(\cdot, \cdot, 0) = 0 \; , \end{cases}$$

ako su $k > 0$ i u_0 konstante. Koje je fizikalno značenje zadaće?

83. Riješiti početno-rubnu zadaću na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, \frac{\lambda_1}{\lambda}] \times \mathbf{R}^+$ (u dvije prostorne dimenzije):

$$\begin{cases} \quad\quad \lambda u_t = \triangle u \\ u(r, \cdot, 0) = J_0(\lambda r) \\ u(\dfrac{\lambda_1}{\lambda}, \cdot, \cdot) = 0 \; , \end{cases}$$

ako su $\lambda > 0$ konstanta, a λ_1 nultočka Besselove funkcije J_0.

84. Kružni cilindar jediničnog polumjera i jedinične visine ima početnu temperaturu $f(r, z)$, dok se na čitavoj površini cilindra održava temperatura nula. Odrediti ovisnost temperature cilindra za $t > 0$.

85. Riješiti početno-rubnu zadaću na $\mathrm{K}[\mathbf{0}, 1] \times [0, 1] \times \mathbf{R}^+$ (cilindar u tri prostorne dimenzije):

$$\begin{cases} \quad\quad u_t = k\triangle u \\ u(1, \cdot, \cdot, \cdot) = u(\cdot, \cdot, 0, \cdot) = u(\cdot, \cdot, 1, \cdot) = 0 \\ u(\cdot, \cdot, \cdot, 0) = u_0 \; , \end{cases}$$

ako su $k > 0$ i u_0 konstante. Koje je fizikalno značenje zadaće?

86. Odrediti stacionarno stanje temperature u u kružnom cilindru kružnog presjeka polumjera R i visine h, ako je temperatura donje baze i plašta održavana na nuli, dok je temperatura gornje baze funkcija udaljenosti od osi $u_0 = u_0(r)$.

87. Odrediti stacionarno stanje temperature u u kružnom cilindru kružnog presjeka polumjera R i visine h, ako je temperatura gornje baze i plašta održavana na nuli, dok je temperatura donje baze $u_0(r, \varphi) = r^2 \cos \varphi$.

88. Neograničen cilindar polumjera R ima početnu temperaturu $f(r)$ i hladi se preko bočne površine na kojoj vrijedi rubni uvjet

$$(\nabla_{\mathsf{n}} u + Hu)_{|r=R} = 0 \; ,$$

gdje je $H > 0$ konstanta, a n je vanjska normala na cilindar. Odrediti temperaturu cilindra za $t > 0$.

89. Odrediti temperaturu u beskonačnog cilindra polumjera R, ako je početna temperatura bila konstantna (u_0), dok na plaštu cilindra vrijedi (α i q su konstante)

$$\alpha \nabla_{\mathsf{n}} u = q \; .$$

90. Odrediti temperaturu u beskonačnog cilindra polumjera R, ako je početna temperatura bila $u_0 r^2$, dok se plašt održava na konstantnoj temperaturi T.

91. Odrediti temperaturu u beskonačnog cilindra polumjera R, ako je početna temperatura bila konstantna (u_0), dok se plašt cilindra održava na temperaturi $u_1 + \alpha t$ (u_1 i α su konstante).

92. Kugla polumjera R sadrži otopinu tvari početne koncentracije c_0. Koncentracija tvari u vanjskom sredstvu je $c_1 > c_0$. Odrediti količinu tvari koja se otopi (apsorbira) u kugli u vremenu t. Koeficijent difuzije je D.

93. Početna temperatura beskonačnog okruglog šupljeg cilindra $a \le r \le b$ je konstantna (u_0). Odrediti temperaturu cilindra ako je temperatura unutrašnje i vanjske površine cilindra konstanta u_1.