1. Primjeri parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

Klasične jednadžbe matematičke fizike

Pogledajmo poznati primjer iz povijesti: Kako opisati Sunčev sustav? Nakon različitih idealističkih prikaza, Kopernik, Brahe i Kepler su opisno izrekli činjenice da se Zemlja giba oko Sunca, pa čak dali i kvantitativne rezultate (Keplerovi zakoni). Međutim, tek je Newton, koristeći diferencijalni račun i obične diferencijalne jednadžbe, objasnio gibanje svemirskih tijela iz općeg zakona.

Na prijelazu devetnaestog u dvadeseto stoljeće zamijetilo se da gibanje Merkura nije potpuno u skladu s Newtonovim zakonima. Točniji opis (danas nemamo razloga sumnjati da je taj opis u potpunosti točan) dao je Einstein svojom općom teorijom relativnosti (preskočimo međukorak s posebnom relativnošću): svaka čestica lokalno osjeća djelovanje *polja*, koje je određeno parcijalnom diferencijalnom jednadžbom (dobro, jednadžba glasi: $\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T}$ i $\mathbf{T}$ se određuje preko rješenja nekih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi; ali bi nas detalji kako Einsteinov tenzor $\mathbf{G}$ određuje gibanje, odnosno kako materija određuje tenzor energije-impulsa $\mathbf{T}$, predaleko odveli).

Drugi primjer mogu biti Maxwellove jednadžbe, koje određuju elektromagnetsko polje.

Za Newtonov opis fizike, kao djelovanja na daljinu, potreban matematički alat su obične diferencijalne jednadžbe. Možda je ta potreba i motivirala Newtonova istraživanja koja su dovela do otkrića diferencijalnog računa.

Ukoliko želimo izbjeći filozofski problematičan pojam *djelovanja na daljinu*, uvodimo polje koje ima i svoju realnost (na primjer, dobro definirana veličina je energija elektromagnetskog polja). Polja su funkcije, definirane u svakoj točki prostora, a karakteriziraju se kao rješenja odgovarajućih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (ili sustava), koje k tome zadovoljavaju i neke rubne ili početne uvjete.

Najjednostavnija *parcijalna* diferencijalna jednadžba (dakle, ona koja u zapisu ima parcijalne derivacije, a da se neposredno ne svodi na *običnu* diferencijalnu jednadžbu, poput $\partial_t u + u = f$, za $u, f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$, koja je obična diferencijalna jednadžba s parametrom x, na primjer) je linearna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima u dvije varijable:

$$\partial_t u + c\partial_x u = 0 \ ,$$

pri čemu je c kompleksan broj, a u kompleksna funkcija dviju realnih varijabli x i t.

Složeniji primjeri su klasične jednadžbe matematičke fizike, koje su sve linearne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima:

Poissonova jednadžba	$\triangle u = f,$
Jednadžba provođenja	$\partial_t u - \kappa\triangle u = f,$
Valna jednadžba	$\Box u = f,$

(pri tome je D'Alembertian $\Box = \partial_t^2 - c^2\triangle$, dok su κ i c pozitivne realne konstante).

Klasične jednadžbe su detaljno izučene, kao i šire klase jednadžbi kojima su one predstavnici: eliptičke, paraboličke i hiperboličke jednadžbe. Ova klasična podjela dobro grupira jednadžbe prema njihovim svojstvima, ali, nažalost, klasifikacija nije iscrpna.

Iscrpnu klasifikaciju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi možemo lako načiniti po linearnosti. Radi jednostavnosti zapisa, gledat ćemo (zasad) samo jednadžbe drugog reda, na nekom području u $\mathbf{R}^d$.

Linearna je jednadžba u kojoj se nepoznata funkcija u i njezine derivacije pojavljuju linearno, s koeficijentima koji ovise samo o varijabli $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\nabla u(\mathbf{x}) + \mathsf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \ .$$

Polulinearna je jednadžba u kojoj se najviše derivacije pojavljuju linearno, s koeficijentima koji ovise samo o $\mathbf{x}$, dok se samo rješenje i derivacije nižeg reda mogu pojavljivati i nelinearno:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\nabla u(\mathbf{x}) = F\Big(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})\Big) \ .$$

Kvazilinearna je jednadžba gdje se derivacije najvišeg reda i dalje pojavljuju linearno, ali s koeficijentima koji mogu ovisiti o u i nižim derivacijama:

$$\mathbf{A}\Big(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})\Big) \cdot \nabla\nabla u(\mathbf{x}) = F\Big(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})\Big) \ .$$

Na kraju, posve *nelinearna* je jednadžba općenitog oblika:

$$F\Big(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x}), \nabla\nabla u(\mathbf{x})\Big) = 0 \ .$$

Naglasimo da polulinearne i kvazilinearne jednadžbe nisu linearne, nego nelinearne u širem smislu, samo što je ta nelinearnost slabije izražena. Za proučavanje polulinearnih jednadžbi obično se mogu prilagoditi postupci razvijeni za linearne jednadžbe, dok kvazilinearne jednadžbe zahtijevaju posve drugi pristup. Posve nelinearne jednadžbe su, u načelu, preteške za razumijevanje primjenom današnjih matematičkih alata.

Zanimljivi fizikalni primjeri su Maxwellov sustav jednadžbi elektrodinamike, sustav (linearizirane ili ne) elastičnosti, te Navier-Stokesov sustav za mehaniku fluida.

Kao što smo vidjeli, česta motivacija za proučavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je iz fizike. Međutim, i neke druge matematičke discipline zahtijevaju rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, poput diferencijalne geometrije; a parcijalne diferencijalne jednadžbe se pojavljuju i u drugim znanostima, poput kemije, biologije, ekonomije i raznih grana inženjerstva.

S druge strane, potreba za rješavanjem parcijalnih diferencijalnih jednadžbi potakla je razvoj mnogih grana matematike. Funkcionalna analiza je, moglo bi se reći, tako i nastala (Hilbertovo rješavanje integralnih jednadžbi, Schwartzova teorija distribucija i lokalno konveksni topološki vektorski prostori). Harmonička analiza je poopćenje Fourierove metode za rješavanje jednadžbe provođenja topline, Sophus Lie je uveo Liejeve grupe kako bi proučavao simetrije diferencijalnih jednadžbi, a teorija topološkog stupnja je također motivirana parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. O utjecaju na numeričku matematiku ne treba posebno govoriti.

Upozorimo još i na činjenicu da zapravo nema jedinstvene teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, poput one za obične diferencijalne jednadžbe, ili funkcije jedne kompleksne varijable. To ne smije čuditi, jer su obične diferencijalne jednadžbe samo posebna (i to najjednostavnija) klasa parcijalnih, dok su realni i imaginarni dio holomorfne funkcije zapravo konjugirane harmoničke funkcije (to jest, rješenja Laplaceove jednadžbe).

Premda ne postoji jedinstvena teorija, ipak se neke teme susreću za različite jednadžbe, a često puta je i teorija za posebnu klasu jednadžbi dovoljno bogata i vrijedna za odvojeno proučavanje.

Zadaci.

1. Pročitati u prvom poglavlju matematičke enciklopedije (vol. 30) o modeliranju fizikalnih procesa parcijalnim diferencijalnim jednadžbama (1.1–6), te o primjerima linearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (1.7).

Linearna jednadžba prvog reda s konstantnim koeficijentima

Pobliže pogledajmo Cauchyjevu (početnu) zadaću za naš najjednostavniji primjer:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = 0 \\ u(0,\cdot) = g \ . \end{cases} \tag{1}$$

Jednadžba se može zapisati i u obliku:

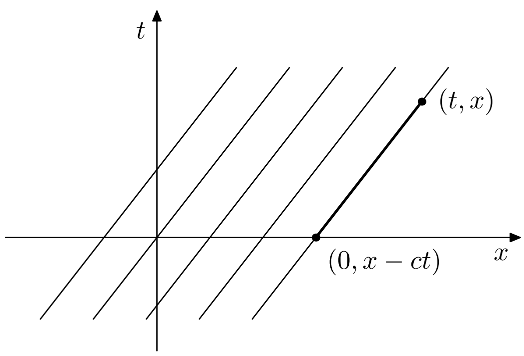
$$\nabla u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

što znači da derivacija funkcije u smjeru vektora $\begin{bmatrix} 1 \\ c \end{bmatrix}$ iščezava. To znači da je $u \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$ rješenje jednadžbe ako i samo ako je funkcija u konstantna na pravcima $x - ct = \mathrm{const.}$ Ti pravci su upravo integralne krivulje vektorskog polja $\partial_t + c\partial_x$ i nazivaju se *karakteristikama*. Time smo pokazali sljedeći teorem:

Teorem 1. *Ako je c realan broj, a $g \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R};\mathbf{C})$, onda postoji jedinstveno rješenje $u \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2;\mathbf{C})$ Cauchyjeve zadaće (1), koje je dano formulom:*

$$u(t,x) = g(x - ct) \ .$$

Ako je funkcija g klase C^k, onda je i rješenje u također klase C^k. ∎



Rješenje prikazuje nepomućeno širenje vala brzinom c. Vrijedi sljedeći korolar (za dokaz vidjeti zadatak 2):

Korolar 1. *Preslikavanje $g \mapsto u$ je neprekinuto iz prostora $\mathrm{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{C})$ u prostor $\mathrm{C}^k(\mathbf{R}^2;\mathbf{C})$, za svaki prirodan broj k.* ∎

Da li teorem ostaje valjan i za $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$? Radi jednostavnijeg računa, uzmimo $c = -i$; dakle, proučimo jednadžbu $u_t = iu_x$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$ otvoren skup, i neka funkcija $u \in \mathrm{C}^1(\Omega;\mathbf{C})$ zadovoljava gornju jednadžbu. Ako Ω poistovjetimo s podskupom kompleksne ravnine $\Omega_{\mathbf{C}}$ po preslikavanju $(t,x) \mapsto x + it$, te definiramo funkciju $f : \Omega_{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathbf{C}$ formulom $f(x+it) := u(t,x)$; onda za $z := x + it$ imamo $\partial_x f = \partial_x u$ i $\partial_t f = \partial_t u = i\partial_x u = i\partial_x f$, što nam daje Cauchy-Riemannove jednadžbe:

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathsf{Re}\, f) &= -\partial_x(\mathsf{Im}\, f) \\ \partial_x(\mathsf{Re}\, f) &= \partial_t(\mathsf{Im}\, f) \ . \end{aligned}$$

Dakle, ako je f klase C^1, onda je f i holomorfna funkcija, pa se oko svake točke $p \in \Omega_{\mathbf{C}}$ može razviti u Taylorov red:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n \ , \qquad |z - p| < d(p, \mathsf{Fr}\,\Omega_{\mathbf{C}}) \ .$$

Deriviranjem član po član lako možemo provjeriti da su i konvergentni redovi potencija rješenja Cauchy-Riemannovih jednadžbi, pa je svaka funkcija u definirana preko reda potencija ujedno i rješenje polazne jednadžbe. Time smo pokazali sljedeći teorem:

Teorem 2. *Funkcija $u \in \mathrm{C}^1(\Omega)$ zadovoljava jednadžbu $u_t = iu_x$ ako i samo ako definira (na gore opisani način) holomorfnu funkciju f na skupu $\Omega_{\mathbf{C}}$.* ∎

Nas posebno zanima početna (Cauchyjeva) zadaća. Ako postoji rješenje u okolini točke $(0, x_0)$, onda je to rješenje analitička funkcija, pa je $u(t,x) = \sum a_n(z - x_0)^n$, odakle slijedi da je nužno i

$$g(x) = u(0,x) = \sum a_n(x - x_0)^n ,$$

pa je funkcija g prikazana s pomoću konvergentnog reda potencija, dakle g je realna analitička funkcija: $g \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{R};\mathbf{C})$ (domena funkcije g je podskup skupa realnih brojeva; tj. g je restrikcija neke holomorfne funkcije na realan pravac).

Vrijedi i obrnuto: ako je $g \in \mathrm{C}^\omega(\mathbf{R};\mathbf{C})$, onda gornji red definira rješenje u. Štoviše, tvrdnja se može pokazati i za svaki $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

Teorem 3. *Početna (Cauchyjeva) zadaća (1), za $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, ima rješenje klase C^1 na nekoj okolini točke $(0, x_0)$ ako i samo ako je $g \in \mathrm{C}^\omega(U_{x_0};\mathbf{C})$, u kojem slučaju je i to rješenje analitička funkcija $u \in \mathrm{C}^\omega(U_{(0,x_0)};\mathbf{C})$ (s U_{x_0}, odnosno $U_{(0,x_0)}$, označujemo neku okolinu točke x_0, odnosno $(0, x_0)$).* ∎

Možemo zaključiti da je za $c \in \mathbf{R}$ Cauchyjeva zadaća ne samo uvijek rješiva, nego da je i dobro postavljena (Korolar 1). To je hiperbolički slučaj. Za $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, odnosno eliptički slučaj, Cauchyjeva zadaća ima samo analitička rješenja za analitički početni uvjet. Ako početni uvjet nije analitička funkcija, zadaća nema rješenja.

Na ovom jednostavnom primjeru odgovorili smo na osnovna pitanja (kako je to predložio Hadamard): da li postoji rješenje jednadžbe, da li je to rješenje jedinstveno, te da li to rješenje ovisi neprekinuto o zadanim uvjetima (u našem slučaju početnim). Posljednje pitanje nije ništa manje važno od ostalih; naime, ukoliko bi malena pogreška u mjerenju rezultirala velikom pogreškom u rezultatu, bilo bi posve nemoguće takvu jednadžbu koristiti kao model za neki realan proces.

Zadaci.

1. Dokazati Teorem 2 za općenit $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

2. Prostori $\mathrm{C}^k(\mathbf{R};\mathbf{C})$ i $\mathrm{C}^k(\mathbf{R}^2;\mathbf{C})$ nisu normirani prostori, nego se topologija na njima najčešće zadaje preko prebrojive familije polunormi. Radi jednostavnosti, pokazati inačicu Korolara 1, u kojoj su ti prostori zamijenjeni prostorima ograničenih funkcija s ograničenim derivacijama do reda k: $\mathrm{C}^k(\bar{\mathbf{R}};\mathbf{C})$ i $\mathrm{C}^k(\bar{\mathbf{R}}^2;\mathbf{C})$; pri čemu su norme ($\|f\|_{\mathrm{L}^\infty(S)} := \sup_{x\in S} \mid f(x) \mid$) :

$$\|g\|_{\mathrm{C}^k(\bar{\mathbf{R}};\mathbf{C})} := \sum_{j=0}^{k} \|g^{(j)}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R};\mathbf{C})}$$

$$\|u\|_{\mathrm{C}^k(\bar{\mathbf{R}}^2;\mathbf{C})} := \sum_{j_1+j_2\le k} \|\partial_t^{j_1}\partial_x^{j_2} u\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^2;\mathbf{C})} .$$

3. Pokazati da je za konstantu $c \in \mathbf{R}$ i rješenje $u \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$ jednadžbe (1_1) sljedeći skup

$$\Big\{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : u \in \mathrm{C}^k \text{ na nekoj okolini } (t,x)\Big\}$$

unija zraka.

Ovaj rezultat iskazuje da se i singulariteti i regularnost širi duž zraka.

4. Ako $u \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^2)$ za $c \in \mathbf{R}$ zadovoljava jednadžbu (1_1), a $k \in \mathbf{N}_0$, onda je skup:

$$\big\{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : u \text{ iščezava reda } k \text{ u točki } (t,x)\big\}$$

unija zraka.

Za svaki zatvoren skup $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^2$, koji je unija zraka, dokazati da postoji u kao gore takav da je Γ upravo skup na kojem u iščezava. Usporediti sa slučajem $c \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

5. Pokazati da za $c \in \mathbf{R}$ i $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^2)$ postoji točno jedno rješenje početne zadaće:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f \\ \quad u(0,\cdot) = g \ . \end{cases}$$

Naći formulu za rješenje. Primjerom pokazati da u ne mora biti iz $\mathrm{C}^2(\mathbf{R}^2)$.

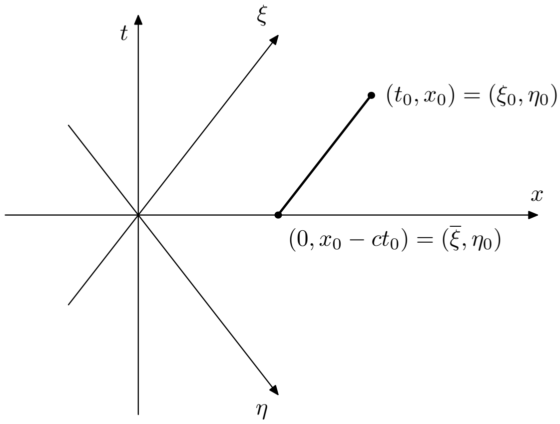
Rješenje. Uvedimo zamjenu varijabli (lako se provjerava da to svuda jest zamjena varijabli):

$$\begin{cases} \xi := x + ct \\ \eta := x - ct \ . \end{cases}$$

U novim varijablama, jednadžbe karakteristika su $\eta = x - ct = \text{const}$. Dakle, samo se ξ mijenja duž karakteristika. Imamo:

$$\begin{cases} \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta \\ \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \ , \end{cases}$$

pa uz oznake: $v(\xi,\eta) = u(t,x)$ i $\tilde{f}(\xi,\eta) = f(t,x)$ jednadžba $\partial_t u + c\partial_x u = f$ prelazi u jednadžbu $2c\partial_\xi v = \tilde{f}$.



Integriranjem dobivamo ((t_0,x_0) je točka u kojoj tražimo rješenje, kojoj odgovaraju u drugom sustavu koordinate (ξ_0,η_0); $\bar{\xi}$ je vrijednost ξ koordinate u točki u kojoj karakteristika kroz (t_0,x_0) siječe x os):

$$\begin{aligned} u(t_0,x_0) = v(\xi_0,\eta_0) &= v(\bar{\xi},\eta_0) + \frac{1}{2c}\int_{(\bar{\xi},\eta_0)}^{(\xi_0,\eta_0)} \tilde{f}(\xi,\eta_0)\,d\xi \\ &= u(0,x_0-ct_0) + \int_{(0,x_0-ct_0)}^{(t_0,x_0)} f(t,\eta_0+ct)\,dt \\ &= g(x_0-ct_0) + \int_0^{t_0} f(t,x_0-ct_0+ct)\,dt \ . \end{aligned}$$

To je traženi oblik rješenja. Lako se provjeri direktnim računom da to zaista jest rješenje. Jedinstvenost neposredno slijedi iz činjenice da je svako rješenje homogene jednadžbe konstantno duž karakteristika.

Nalaženje primjera je prepušteno čitatelju.

∎

6*. Za nelinearnu početnu zadaću ($c \in \mathbf{R}$)

$$\begin{cases} u_t + cu_x + u^2 = 0 \\ \qquad u(0,\cdot) = g \ , \end{cases}$$

pokazati da za funkciju $g \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})$, koja nije identički jednaka nuli, postoji lokalno rješenje $u \in \mathrm{C}^\infty(\langle -\delta,\delta\rangle \times \mathbf{R})$, ali da se to rješenje ne može proširiti do C^∞ rješenja na čitavoj ravnini.

Usporediti pojavu s nelinearnom običnom diferencijalnom jednadžbom $u' = u^2$.

7. Pogledajmo početnu zadaću (1), za $c \in \mathbf{C}$, i pokušajmo odrediti približno rješenje na sljedeći način:

Diskretizirajmo vrijeme: $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$.

Koristeći jednadžbu $u_t(t,\cdot) = -c\partial_x u(t,\cdot)$, možemo napredovati u vremenu s pomoću približne formule:

$$u(t+\Delta t,\cdot) \approx u(t,\cdot) + u_t(t,\cdot)\Delta t = (1 - c\Delta t \partial_x)\, u(t,\cdot) \; .$$

Neka je vremenski korak $\Delta t = 1/n$, za $n \in \mathbf{N}$. Uočavamo:

$$u(k/n,\cdot) \approx \Big(1 - \frac{c}{n}\partial_x\Big)^k g \; ,$$

gdje pretpostavljamo da je $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R})$ čvrsti omjer.

Za očekivati je da će pri $k, n \longrightarrow \infty$, uz $k/n = t$, gornja približna formula konvergirati k rješenju. Zamjenom $n = k/t$ dobivamo:

$$(*) \qquad u(t,\cdot) \approx \left(1 - \frac{tc\partial_x}{k}\right)^k g \; ,$$

što u limesu $k \longrightarrow \infty$ navodi na formalni identitet:

$$u(t,\cdot) = e^{-ct\partial_x} g \; .$$

a) Za polinom g formalno izvesti da je $u(t,\cdot) = g(\cdot - ct)$. Provjeriti da je u tom slučaju na taj način dano rješenje Cauchyjeve zadaće (1).
b) Ako je g restrikcija na realnu os holomorfne funkcije na $|\mathsf{Im}\, z| < R$, pokazati konvergenciju za $|t| < R/|c|$ prema rješenju $g(x - ct)$.
c) Za $c \in \mathbf{R}$, $g(x - ct)$ je rješenje i u slučaju kada funkcija g nema analitičko produljenje. Da li u tom slučaju desna strana u $(*)$ konvergira k rješenju?

8. Jednadžbu (1_1), za kompleksan c, uobičajeno je pisati u varijablama x i y: $u_x - iu_y = 0$ (ta se jednadžba zove *anti-Cauchy-Riemannova*). Uvedimo zamjenu varijabli: $x = (z + \bar{z})/2$ i $y = (z - \bar{z})/(2i)$.
a) Provjeriti da se anti-Cauchy-Riemannova jednadžba može zapisati u obliku: $\partial_z u = 0$.
b) Zapisati Cauchy-Riemannovu jednadžbu $\partial_{\bar{z}} u = 0$ u varijablama x i y.
c) Zapisati Laplaceov operator u varijablama z i $\bar{z}$.
d) Zapisati Cauchy-Riemannov operator u polarnim varijablama.

9. Zadan je linearan parcijalan diferencijalni operator prvog reda, s konstantnim koeficijentima u d varijabli:

$$L := a^1\partial_{x^1} + \cdots + a^d\partial_{x^d} \; .$$

Dokazati sljedeće tvrdnje:
a) Ako je kompleksan vektor $\mathsf{a} = (a^1, \ldots, a^d)$ oblika $z\mathsf{b}$, gdje je b realan vektor, a z kompleksan broj, onda se nekom linearnom zamjenom varijabli $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ u $\mathbf{R}^d$ može postići da u $\mathbf{y}$ koordinatama L poprima oblik $z\partial_{y^1}$.
b) Ako su vektori $\mathsf{Re}\,\mathsf{a}$ i $\mathsf{Im}\,\mathsf{a}$ linearno neovisni (tada je nužno $d > 1$), onda postoji linearna zamjena varijabli $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ u $\mathbf{R}^d$ tako da u $\mathbf{y}$ koordinatama L poprima oblik:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_{y^1} + i\partial_{y^2}\right) \; .$$

10. Ako je g analitička funkcija na nekoj okolini točke $x_0 \in \mathbf{R}$, onda zadaća (1), za $c = -i$, ima jedinstveno analitičko rješenje na nekoj okolini točke $(0, x_0)$.
[Naputak: $u_t = iu_x$, $u_{tt} = i\partial_x\partial_t u = i\partial_x i\partial_x u$, $\partial_t^j\partial_x^k u = (i\partial_x)^j\partial_x^k u$, $\partial_t^j\partial_x^k u(0,0) = i^j g^{(j+k)}(0)$, $u \sim \sum_{j,k=0}^\infty \frac{i^j g^{(j+k)}(0)}{j!k!} t^j x^k$. Sada iz konvergencije Taylorovog reda za g lako slijedi konvergencija reda za u.]

11. Poopćiti Teorem 1 i Zadatak 5 na slučaj u kojem je $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, a $\mathsf{c} \in \mathbf{R}^d$ zadani vektor.

12. Napisati eksplicitnu formulu za rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} u_t + \mathsf{c} \cdot \nabla u + bu = 0 \\ u(0, \cdot) = g \ , \end{cases}$$

pri čemu je $\mathsf{c} \in \mathbf{R}^d$ zadani vektor, a $b \in \mathbf{R}$.

Primjer hiperboličkog sustava

Pogledajmo jednadžbe jednodimenzionalne akustike (širenja zvučnih valova u jednoj dimenziji). Izvod ovih jednadžbi, polazeći od fizikalnog modela, može se naći u *The Feynman Lectures on Physics*, 47-3 u prvoj knjizi (mi koristimo sljedeće oznake: $w := \frac{\partial \chi}{\partial t}, c_0^2 := \kappa$). S w je označena brzina deformacije, s π tlak zraka; ρ_0 je gustoća nepomućenog uzduha, a c_0 je brzina širenja zvuka:

$$\begin{cases} w_t + \dfrac{1}{\rho_0}\pi_x = 0 \\ \pi_t + \rho_0 c_0^2 w_x = 0 \ . \end{cases} \tag{2}$$

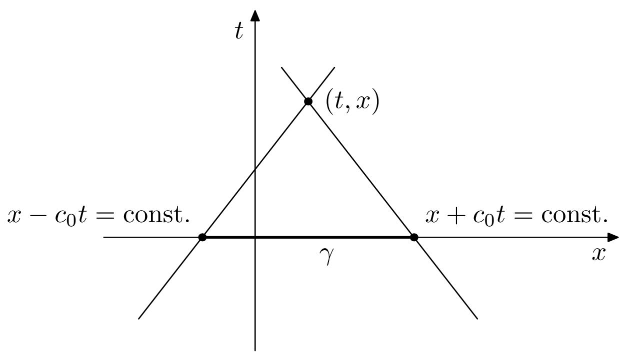
Dijeljenjem druge jednadžbe s $\rho_0 c_0$ dobivamo $\partial_t \left(\dfrac{\pi}{\rho_0 c_0} \right) + c_0 w_x = 0$. Dodavanjem i oduzimanjem te jednadžbe od prve jednadžbe u sustavu vodi, poslije zamjene $u := w + \frac{\pi}{\rho_0 c_0}, v := w - \frac{\pi}{\rho_0 c_0}$, na sustav

$$\begin{cases} u_t + c_0 u_x = 0 \\ v_t - c_0 v_x = 0 \ . \end{cases}$$

Taj se sustav sastoji od dvije neovisne jednadžbe koje možemo odvojeno riješiti ovisno o početnim uvjetima, koristeći Teorem 1; uzmimo da su zadani sljedeći početni uvjeti: $u(0, \cdot) = f$ i $v(0, \cdot) = g$. Dobivamo opća rješenja: $u = f(x - c_0 t), v = g(x + c_0 t)$. Vrativši se na polazne nepoznanice dobivamo opće rješenje sustava jednadžbi akustike (2)

$$w = \frac{f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t)}{2}$$
$$\pi = \rho_0 c_0 \frac{f(x - c_0 t) - g(x + c_0 t)}{2}$$

Veličine $w \pm \frac{\pi}{\rho_0 c_0}$ su *Riemannove invarijante* polaznog sustava. Prva od njih se u nepromijenjenom obliku širi nadesno, duž karakteristika oblika $x - c_0 t = \text{const.}$, a druga nalijevo duž $x + c_0 t = \text{const.}$ (desni i lijevi val), i to upravo brzinom zvuka c_0.



Ako su f i g zadane samo na segmentu γ, onda o rješenju sustava ima smisla govoriti samo na trokutu (v. sliku), koji je određen s γ i dijelovima karakteristika (taj trokut stoga zovemo *karakterističnim trokutom*).

Vratimo se na polazne nepoznanice:

$$
\begin{aligned}
w(t,x) &= \frac{1}{2}\Big(u(t,x)+v(t,x)\Big) = \frac{1}{2}\Big(f(x-c_0t)+g(x-c_0t)\Big)\\
\pi(t,x) &= \frac{\rho_0 c_0}{2}\Big(u(t,x)-v(t,x)\Big) = \frac{\rho_0 c_0}{2}\Big(f(x-c_0t)-g(x-c_0t)\Big)\ .
\end{aligned}
$$

Želimo odrediti rješenje ako su za $t=0$ dani početni podaci na segmentu γ ili na čitavoj osi x, dakle $w(\cdot,0)=w_0$ i $\pi(\cdot,0)=\pi_0$. Za funkcije f i g dobivamo

$$
\begin{aligned}
f(x)+g(x) &= 2w_0\\
f(x)-g(x) &= \frac{2\pi_0}{\rho_0 c_0}\ ,
\end{aligned}
$$

odakle lako izrazimo opće rješenje

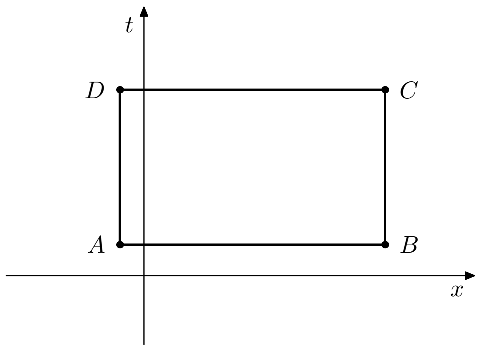
$$
\begin{aligned}
w &= \frac{w_0(x-c_0t)+w_0(x+c_0t)}{2} + \frac{\pi_0(x-c_0t)-\pi_0(x+c_0t)}{2\rho_0 c_0}\\
\pi &= \frac{\pi_0(x-c_0t)+\pi_0(x+c_0t)}{2} + \rho_0 c_0\frac{w_0(x-c_0t)-w_0(x+c_0t)}{2}\ .
\end{aligned}
$$

Izvedimo sada jednu važnu jednakost, koja će nam omogućiti da dokažemo jedinstvenost rješenja Cauchyjeve zadaće za sustav (2).

Množenjem prve jednadžbe u sustavu (2) s $\rho_0 w$, druge s $\frac{\pi}{\rho_0 c_0^2}$, i njihovim zbrajanjem dobivamo

$$
\partial_t\left[\frac{\rho_0 w^2}{2}+\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right]+\partial_x(\pi w)=0\ .
$$

Posebno, integral te veličine po proizvoljnoj ravninskoj figuri je nula. Fiksirajmo pravokutnik ABCD sa stranicama paralelnim koordinatnim osima kao na slici.



Vrijedi (zbog Greenovog teorema; krivuljni integral je u pozitivnom smjeru):

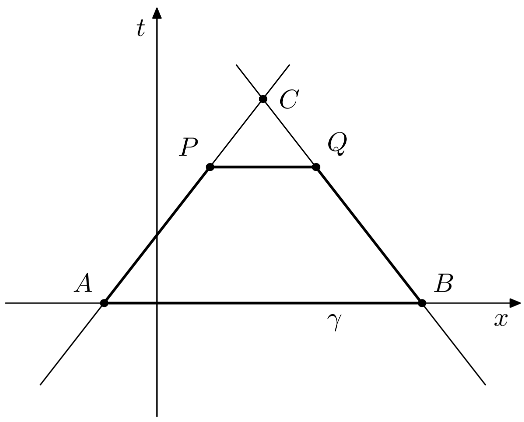
$$
0=\iint\left(\partial_t\left(\frac{\rho_0 w^2}{2}+\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)+\partial_x(\pi w)\right)dx\,dt=\oint-\left(\frac{\rho_0 w^2}{2}+\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx+\pi w\,dt\ .
$$

Rastavljanjem krivuljnog integrala na četiri integrala po stranicama dobivamo

$$
\int_D^C\left(\frac{\rho_0 w^2}{2}+\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx=\int_A^B\left(\frac{\rho_0 w^2}{2}+\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right)dx+\int_A^D\pi w\,dt-\int_B^C\pi w\,dt\ ,
$$

što je *zakon sačuvanja energije*. Član s $\frac{\rho_0 w^2}{2}$ sadrži *kinetičku* energiju plina, dok član s $\frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}$ sadrži potencijalnu (sabijeni plin može vršiti rad). Zakon sačuvanja energije iskazuje činjenicu da je zbroj potencijalne i kinetičke energije duž stranice CD jednak zbroju kinetičke i potencijalne energije duž AB i rada duž AD, odnosno BC.

Dobiveni zakon sačuvanja energije možemo upotrijebiti za dokaz jedinstvenosti rješenja. Neka je ABC karakterističan trokut konstruiran nad segmentom γ, a P i Q točke na stranicama AC i BC takve da je $ABQP$ trapez.



Napišimo zakon sačuvanja energije za taj trapez

$$\begin{aligned}\int_P^Q \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx = \int_A^B \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - \int_A^P \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - \pi w\, dt \\ + \int_B^Q \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - \pi w\, dt \\ \leq \int_A^B \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx \,,\end{aligned}$$

jer je prvi rad $\int_A^P \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - \pi w\, dt = \frac{\rho_0 c_0}{2} \int_A^P \left(w - \frac{\pi}{\rho_0 c_0}\right)^2 dt \geq 0$, a slično se zaključuje da je i $\int_B^Q \left(\frac{\rho_0 w^2}{2} + \frac{\pi^2}{2\rho_0 c_0^2}\right) dx - \pi w\, dt \leq 0$.

Ukoliko su (w_1, π_1) i (w_2, π_2) dva rješenja sustava, koja zadovoljavaju iste početne uvjete, onda je njihova razlika (w, π), $w := w_1 - w_2$, $\pi := \pi_1 - \pi_2$, također rješenje istog sustava s početnim uvjetima jednakim nuli. Budući da to znači da je integral po AB jednak nuli, to je i integral po PQ jednak nuli, a zbog nenegativnosti integranda slijedi da je $w = 0$ i $\pi = 0$, to jest $w_1 = w_2$ i $\pi_1 = \pi_2$.

Zadaci.

1. Riješiti Cauchyjevu zadaću na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$;

$$\begin{cases} w_x - \frac{1}{E}\sigma_t = 0 \\ \sigma_x - \rho w_t = 0 \,, \end{cases}$$
$$w(0,\cdot) = \varphi \,,$$
$$\sigma(0,\cdot) = \psi \,,$$

gdje su E i ρ pozitivne konstante.

2. Riješiti Cauchyjevu zadaću na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} 2u_t - u_x - v_x = 0 \\ 2v_t - u_x - v_x = 0 \,, \end{cases}$$
$$u(0,\cdot) = 0 \,,$$
$$v(0,x) = 2x \,.$$

Valna jednadžba u jednoj prostornoj dimenziji

Ako prvu jednadžbu u sustavu (2) deriviramo po x, drugu po t, dobivamo sljedeći sustav:

$$\begin{cases} w_{tx} + \dfrac{1}{\rho_0}\pi_{xx} = 0 \\ \pi_{tt} + \rho_0 c_0^2 w_{xt} = 0 \; . \end{cases}$$

Eliminacijom mješovite derivacije $w_{tx} = w_{xt}$, dobivamo *valnu jednadžbu*

$$\pi_{tt} - c_0^2 \pi_{xx} = 0 \; ,$$

koja opisuje titranje tlaka zraka, a da pritom ne sadrži i brzinu deformacije w. Jednadžba istog oblika opisuje i titranje napete žice (na gitari ili glasoviru, na primjer).

Nepoznate funkcije se u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi najčešće označuju s u; k tome, radi jednostavnosti zapišimo i brzinu c_0 bez indeksa. Dakle, u daljem proučavamo valnu jednadžbu u sljedećim oznakama:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \; .$$

Gornju jednadžbu možemo zapisati i ovako:

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0 \; .$$

Ako označimo $q := u_t + cu_x$, dobivamo sljedeći sustav

$$\begin{cases} u_t + cu_x = q \\ q_t - cq_x = 0 \; . \end{cases}$$

Druga jednadžba očito ima opće rješenje $q(t,x) = G(x+ct) = 2cg'(x+ct)$, pri čemu je g naprosto primitivna funkcija funkcije $G/2c$.

Za u imamo sada jednadžbu $u_t + cu_x = 2cg'(x+ct)$, što možemo zapisati i u obliku

$$\partial_t\Big(u - g(x+ct)\Big) + c\Big(u - g(x+ct)\Big) = 0$$

(ovime postaje jasna motivacija za zamjenu funkcije G derivacijom primitivne funkcije g u izrazu za q; naravno, eksplicitno pisanje varijable $x+ct$ funkcije g nam daje njezinu ovisnost o x i o t, premda je formalno nekonzistentno s izostavljanjem varijabli funkcije u), odakle dobivamo opće rješenje $u(t,x) - g(x+ct) = f(x-ct)$, odnosno

$$u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct) \; , \tag{3}$$

što je formula koju je 1747. godine izveo d'Alembert (više o tome vidi u Povijesnoj napomeni niže).

Euler je nešto kasnije pošao od početnih uvjeta (tj. vrijednosti u i u_t u $t = 0$) za nepoznatu funkciju u. Iz (3) za početne uvjete dobivamo

$$\begin{aligned} f + g &= u(0,\cdot) = u_0 \\ -cf' + cg' &= u_t(0,\cdot) = u_1 \; , \end{aligned}$$

odakle nakon deriviranja prve jednakosti lako rješavamo algebarski sustav po f' i g':

$$\begin{aligned} f' &= u_0'/2 - u_1/2c \\ g' &= u_0'/2 + u_1/2c \; , \end{aligned}$$

odakle integriranjem slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= u_0/2 - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi + a \\ g(x) &= u_0/2 + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} u_1(\xi)\,d\xi + b \; , \end{aligned}$$

pri čemu je x_0 proizvoljna točka na intervalu na kome su zadani početni uvjeti, a a i b konstante integracije, koje nisu neovisne, jer je $f + g = u_0$, pa je $b = -a$.

Uvrštavanjem gornjih izraza za f i g u (3) dobivamo *d'Alembertovu formulu* koju je 1748. godine izveo Euler:

$$u(x,t) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi \;.$$

Zanimljivo je da nam d'Alembertova formula omogućuje i rješavanje nehomogene jednadžbe (radi jednostavnosti stavimo sada homogene početne uvjete):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(0,\cdot) = 0 \\ u_t(0,\cdot) = 0 \;. \end{cases} \tag{4}$$

Postupak (koji se može primijeniti i na druge diferencijalne jednadžbe) sastoji se u tome da se definira familija funkcija $(v(\cdot,\cdot;s), s \in \mathbf{R}^+)$, koje su rješenja zadaća (za $(t,x) \in \langle s,\infty\rangle \times \mathbf{R}$):

$$\begin{cases} v_{tt}(\cdot,\cdot;s) - c^2 v_{xx}(\cdot,\cdot;s) = 0 \\ v(s,\cdot,s) = 0 \\ v_t(s,\cdot,s) = f(s,\cdot) \;. \end{cases}$$

Za čvrsti $s \in \mathbf{R}^+$ pomakom varijable t lako vidimo da se gornje početne zadaće mogu riješiti d'Alembertovom formulom:

$$v(t,x;s) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi)\,d\xi \;.$$

Duhamelovo načelo (princip) tvrdi da je funkcija:

$$u(t,x) := \int_0^t v(t,x;s)ds = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi)\,d\xi\,ds$$

rješenje početne zadaće (4).

Ovo je bio izvod; precizan rezultat dan je sljedećim teoremom:

Teorem 4. *Uz pretpostavku da je $f \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$, $u_1 \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$, a $u_0 \in \mathrm{C}^2(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$, rješenje Cauchyjeve zadaće za valnu jednadžbu na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f \\ u(0,\cdot) = u_0 \\ u_t(0,\cdot) = u_1 \end{cases}$$

dano je formulom:

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) + u_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(s,\xi)\,d\xi\,ds \;.$$

Dem. Potrebno je računom provjeriti da je gornjom formulom zaista dano rješenje početne zadaće. Na primjer, deriviranjem člana s u_0 lako se vidi da zadovoljava homogenu jednadžbu, te $u(0,\cdot) = u_0$ i $u_t(0,\cdot) = 0$. Slično se vidi i za preostala dva člana, tako da zbrajanjem sva tri upravo dobivamo rješenje (v. Zadatak 1).

Q.E.D.

Zadaci.

1. Dovršiti dokaz Teorema 4.

Izračunati rješenje Cauchyjeve zadaće za valnu jednadžbu, ukoliko je zadano:

2. $f(t,x) = 6, u_0(x) = x^2, u_1(x) = 4x, c = 1$ $[(x+2t)^2]$

3. $f(t,x) = xt, u_0(x) = x^2, u_1(x) = x, c = 2$ $[x^2 + xt + 4t^2 + \frac{1}{6}xt^3]$

4. $f(t,x) = \sin x, u_0(x) = \sin x, u_1(x) = 0, c = 1$ $[\sin x]$

5. $f(t,x) = e^x, u_0(x) = \sin x, u_1(x) = x + \cos x, c = 1$ $[xt + \sin(x+t) - (1 - \mathrm{ch} t)e^x]$

6. $f(t,x) = \sin x, u_0(x) = 1, u_1(x) = 1, c = 3$ $[1 + t + \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)\sin x]$

7. $f(t,x) = \sin \omega x, u_0(x) = 0, u_1(x) = 0; c, \omega \in \mathbf{R}^+$ $[\frac{1}{c^2\omega^2}(1 - \cos c\omega t)\sin \omega x]$

8. $f(t,x) = \sin \omega t, u_0(x) = 0, u_1(x) = 0; c, \omega \in \mathbf{R}^+$ $[\frac{t}{\omega} - \frac{1}{\omega^2}\sin \omega t]$

9. Pretpostavimo da podaci zadovoljavaju dovoljne uvjete za postojanje klasičnog rješenja homogene valne jednadžbe u $\mathrm{C}^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}) \bigcap \mathrm{C}^1(\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R})$ (dakle, $u_0 \in \mathrm{C}^2(\mathbf{R})$, $u_1 \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$), te da za $|x| \geq \delta > 0$ vrijede nejednakosti:

$$
\begin{aligned}
m|x|^\alpha &\leq u_0(x) \leq M|x|^\alpha \\
m|x|^{\alpha-1} &\leq u_1(x) \leq M|x|^{\alpha-1} ,
\end{aligned}
$$

gdje su $\alpha > 0$ i $M > m > 0$.

Pokazati da za svaku točku $x_0 \in \mathbf{R}$ postoje pozitivni brojevi t_0, C_1 i C_2 takvi da za svaki $t \geqslant t_0$ vrijedi sljedeća ocjena:

$$C_1 t^\alpha \leq u(t, x_0) \leq C_2 t^\alpha .$$

10. Riješiti *Goursatovu zadaću* na području gdje je $t \geq |x|$:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 \\
u(x,x) &= \varphi(x),\ x > 0 \\
u(-x,x) &= \psi(x),\ x < 0,\ ,
\end{aligned}
$$

ako je $\varphi(0) = \psi(0)$.

Metoda refleksije

Zanimljivo je da nam d'Alembertova formula omogućuje nalaženje rješenja za valnu jednadžbu koja opisuje titranje napete žice, dakle jednadžbe na prostorno omeđenoj domeni. Na krajevima takve domene, recimo za $x = 0$ i $x = l$, trebamo zadati *rubneuvjete*, koji zajedno s početnima vode na dobro postavljenu zadaću. U prvom koraku ćemo riješiti zadatak za polupravac, sa samo jednim rubnim uvjetom.

Primjer. Pogledajmo primjer valova na poluograničenoj žici. Radi određenosti specificirajmo da rješavamo početno-rubnu zadaću na $\mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R}_0^+$:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\
u(\cdot, 0) &= 0 \\
u(0, \cdot) &= u_0 \\
u_t(0, \cdot) &= u_1 ,
\end{aligned}
$$

gdje smo pretpostavili Dirichletov uvjet u $x = 0$.

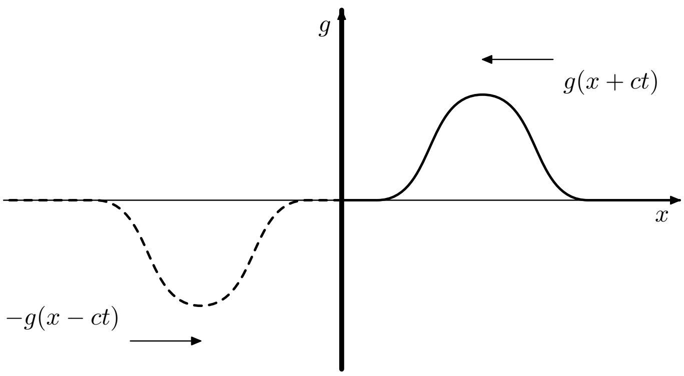
Najprije pokažimo da je svako klasično rješenje gornje valne jednadžbe oblika:

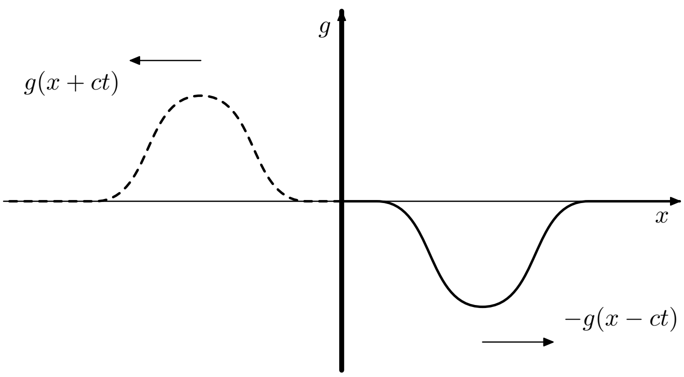
$$u(t,x) = g(x + ct) - g(-x + ct) ,$$

pri čemu je funkcija g klase C^2 na $\mathbf{R}$.

Zaista, znamo da je svako rješenje valne jednadžbe oblika $u(t,x) = f(x-ct) + g(x+ct)$, što zbog rubnog uvjeta daje $0 = u(t,0) = f(-ct) + g(ct)$, odnosno $f(s) = -g(-s)$.

Pogledajmo kako izgleda slika:

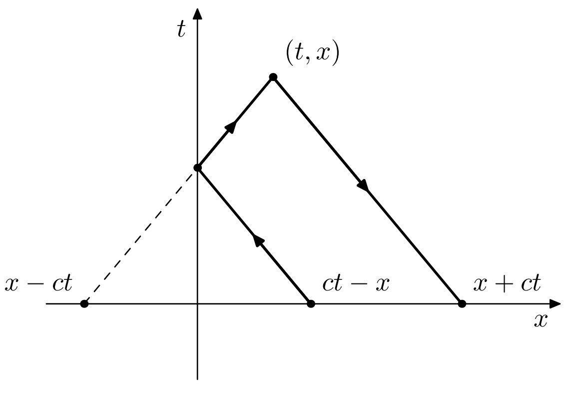




Opažamo da val koji putuje nalijevo udara u zid, dobiva pomak u fazi i odbija se, što je poznato ponašanje pri refleksiji valova.

Da bismo dobili rješenje u analitičkom obliku, produljimo klasično rješenje $u \in \mathrm{C}^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+)$ po neparnosti na $x < 0$. Pretpostavimo da je to produljenje klase $\mathrm{C}^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R})$ i označimo ga s $\tilde{u}$. Početni uvjeti tada glase $\tilde{u}(0,\cdot) = \tilde{u}_0$ i $\tilde{u}_t(0,\cdot) = \tilde{u}_1$. Ako je proširenje $\tilde{u}_0$ funkcije u po neparnosti klase $\mathrm{C}^2(\mathbf{R})$, a proširenje $\tilde{u}_1$ funkcije u_1 po parnosti klase $\mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, to jest ako je $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$, onda je rješenje dano D'Alembertovom formulom za $x \geq 0$:

$$u(t,x) = \frac{\tilde{u}_0(x+ct) + \tilde{u}_0(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{u}_1(\xi)\,d\xi\ .$$



Za $x - ct \geq 0$ formula ima isti oblik kao i D'Alembertova formula na $\mathbf{R}$, dok za $x - ct \leq 0$ formula glasi (jer je $\tilde{u}_0(x-ct) = -u_0(-x+ct)$, odnosno $\tilde{u}_1(\xi) = -u_1(-\xi)$):

$$u(t,x) = \frac{u_0(x+ct) - u_0(ct-x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} u_1(\xi)\,d\xi\ .$$

∎

Zadaci.

1. Riješiti prethodnu početno-rubnu zadaću ako je $u_0(s) = A \sin \frac{\pi s}{l}$, a $u_1 = 0$.

$[A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{\pi ct}{l}]$

2. Riješiti početno-rubnu zadaću iz primjera ako je rubni uvjet Neumannov; točnije: $u_x(\cdot, 0) = 0$ (u ovom slučaju nema pomaka u fazi pri odbijanju vala na slobodnom kraju).

Pogledajmo sada kako riješiti zadaću titranja konačne žice (zamislimo žicu na gitari ili glasoviru).

Primjer. Riješimo početno-rubnu zadaću na $\mathbf{R}_0^+ \times [0, l]$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= 0 \\ u(\cdot, l) &= 0 \\ u(0, \cdot) &= u_0 \\ u_t(0, \cdot) &= u_1 \ , \end{aligned}$$

gdje na oba kraja segmenta $[0, l]$ pretpostavljamo Dirichletov rubni uvjet.

Rješenje je oblika $u(t, x) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$, gdje je funkcija φ definirana na $[0, \infty\rangle$, a ψ na $\langle -\infty, l]$; dok su obje funkcije klase C^2. Iz rubnih uvjeta zaključujemo:

$$\begin{aligned} \psi(s) &= -\varphi(-s) \ , \quad s \in \langle -\infty, 0\rangle \\ \varphi(s) &= -\psi(2l - s) \ , \quad s \in \langle l, \infty\rangle \ . \end{aligned} \tag{5}$$

Iz početnih uvjeta, kao kod izvoda d'Alembertove formule dobivamo da je

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) \, d\xi - C \\ \psi(x) &= \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) \, d\xi + C \ . \end{aligned}$$

Najprije proširimo ψ na $\langle -l, l\rangle$ i φ na $\langle 0, 2l\rangle$ po formuli (5), a potom postupak nastavimo. Time smo dobili i proširenja za $u_0 = \varphi + \psi$ i $u_1 = c(\varphi' - \psi')$. Iz toga slijedi da je $u(t + \frac{2l}{c}, x) = u(t, x)$, tj. da je funkcija $u(\cdot, x)$ periodična s periodom $2l/c$.

∎

3. Riješiti početno-rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= 0 \\ u(\cdot, l) &= 0 \\ u(0, x) &= A \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_t(0, \cdot) &= 0 \ , \end{aligned}$$

$[u(t, x) = A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \frac{c\pi t}{l}]$

4. Riješiti početno-rubnu zadaću:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \\ u(\cdot, 0) &= 0 \\ c u_x(\cdot, l) &= -u_t(l, \cdot) \\ u(0, \cdot) &= x \\ u_t(0, \cdot) &= 0 \ , \end{aligned}$$

5. Žica duljine l učvršćena je na krajevima $x = 0$ i $x = l$. U času $t = 0$ pomaknuta je u točki $x = \frac{l}{3}$ na visinu h iz ravnotežnog položaja, i potom ispuštena. Naći oblik žice za $t \in [0, \frac{l}{3c}]$.

Povijesna napomena: Titranje žice

Na prijelazu XVII. u XVIII. stoljeće matematičari nisu poznavali različite klase diferencijabilnih funkcija, kako ih mi danas znamo. Poznavali su samo jednu klasu, *analitičke izraze*, za koje se općenito pretpostavljalo da vrijede pravila diferencijalnog računa.

Analitički izraz je proizvoljna kombinacija konstanti i varijabli, pri čemu se koriste poznate matematičke operacije, i algebarske i transcedentne, uključujući i beskonačne sume, deriviranje i integriranje. Takve funkcije je Leonhard Euler (1707–1783) zvao neprekinutima, pa ćemo ih mi zvati *E-neprekinutima*.

Euler je diskutirao i *prekinute* funkcije, koje su po dijelovima sastavljene od analitičkih izraza, koji se mijenjaju od intervala do intervala, ili čak od točke do točke; takve ćemo funkcije zvati *E-prekinutima*.

Jean LeRond d'Alembert (1717–1783) je 1747. pokazao da se progib titrajuće žice, učvršćene na krajevima, može opisati izrazom (3), pri čemu su f i g proizvoljne funkcije koje se mogu odrediti na temelju početnog stanja žice.

Valnu jednadžbu $c^2 u_{xx} = u_{tt}$ je 1753. postavio Euler, u svom drugom radu na tu temu. U prvom (1748) je uveo izraz za u na sličan način kao i d'Alembert, koristeći diferencijalne kvocijente ekvivalentne valnoj jednadžbi.

Međutim, Eulerova interpretacija funkcija f i g bila je bitno različita. D'Alembert je zahtijevao da su f i g E-neprekinute, dok je Euler dopuštao da te funkcije mogu biti i E-prekinute, s grafom koji odgovara *rukom nacrtanoj krivulji*.

To je neslaganje izazvalo kontroverzu i velike rasprave koje su se vodile do kraja stoljeća, dok i jednoj i drugoj strani nije ponestalo argumenata.

D'Alembert je iznio dva argumenta. S prvim od njih, da je uvođenje E-prekinutih funkcija kao rješenja diferencijalne jednadžbe *contre toutes les règles d'analyse*, Euler se složio, ali je on to shvatio kao poticaj matematičarima da se takve funkcije, koje se pojavljuju kao *konstante* pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, bolje istraže (premda Euler sâm nije pokrenuo nikakva istraživanja u tom smjeru).

Drugi bi se argument suvremenim jezikom mogao iskazati kao zahtjev da je limes druge derivacije s lijeva i zdesna u svakoj točki nužno jednak.

Tome je Euler suprotstavio tri protuargumenta:

a) Izvod jednadžbe je koristio integralne jednadžbe, u kojima nije bilo drugih derivacija.

b) Na primjeru kvadratne parabole, spojene iz dva komada, tvrdio je da je problem samo u jednoj točki, pa se to, kao infinitezimalno malo, može zanemariti.

c) Dovoljno je sasvim malo promijeniti funkciju da bi se dobila glatka krivulja. Današnjim jezikom, preko nizova: ako je (u_n) niz rješenja jednadžbe, i $u_n \longrightarrow u$ (u odgovarajućoj topologiji), onda je i u rješenje jednadžbe.

Posljednji je argument najzanimljiviji, i ima puni smisao u teoriji distribucija.

Među mnogima koji su se uključili u diskusiju, bio je i Joseph Louis Lagrange (1736–1813). U svom drugom radu na tu temu pošao je od valne jednadžbe, koju je pomnožio funkcijom $M(x)$ i parcijalno integrirao po $[0, l]$:

$$\int_0^l u_{tt} M \, dx = c^2 (u_x M - u M') \Big|_0^l + c^2 \int_0^l u M'' \, dx \, .$$

Budući da je uzeo $u(0) = u(l) = 0$, kao i $M(0) = M(l) = 0$, to slijedi:

$$\int_0^l u_{tt} M \, dx = c^2 \int_0^l u M'' \, dx \, .$$

Premda nije dalje nastavio, ovo je začetak metode koja je osnova teorije distribucija (ponovno je otkrivena dvadesetih godina dvadesetog stoljeća).

Primjer slabih rješenja

Pogledajmo parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda s konstantnim koeficijentima:

$$(6) \qquad \begin{cases} u_t + c u_x = 0 & \text{na } \mathbf{R}_0^+ \times \mathbf{R} \\ u(0, \cdot) = u_0 \, . \end{cases}$$

Ukoliko je funkcija u_0 klase C^1 na $\mathbf{R}$, onda je jedinstveno rješenje gornje Cauchyjeve zadaće dano formulom $u(t,x) = u_0(x - ct)$. Ta formula definira neprekinutu funkciju u i u slučaju kada je $u_0 \in \mathrm{C}^0(\mathbf{R}) \setminus \mathrm{C}^1(\mathbf{R})$, ali koje je tada značenje derivacija u_t i u_x?

Umjesto derivacije po točkama želimo naći lokalnu formulu koja *usrednjuje* po točkama.

Definirajmo najprije neke pojmove. Za neprekinutu realnu funkciju na topološkom prostoru X općenito definiramo njezin nosač kao (zatvoren) skup:

$$\begin{aligned}\operatorname{supp}\varphi &:= \mathsf{Cl}\ \{x\in X : \varphi(x)\neq 0\}\\ &= X\setminus \mathsf{Int}\ \{x\in X : \varphi(x)=0\}\ .\end{aligned}$$

S $\mathrm{C}_c^\infty(X)$ (odnosno ponekad s $\mathcal{D}(X)$) označimo prostor C^∞ funkcija s kompaktnim nosačem.

Pretpostavimo sada da je funkcija u_0 glatka i zapišimo Cauchyjevu zadaću u drugom obliku. Da bismo to postigli pomnožimo jednadžbu funkcijom $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})$ i integrirajmo po $\mathbf{R}$:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}\varphi(u_t+cu_x)\,dt\,dx\\ &= -\int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}(\varphi_t u + c\varphi_x u)\ dt\,dx + \int_{\mathbf{R}}\varphi u\,dx\Big|_{t=0}^{\infty} + c\int_{\mathbf{R}_0^+}\varphi u\,dt\Big|_{x=-\infty}^{\infty}\\ &= -\int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}(\varphi_t u + c\varphi_x u)\ dt\,dx - \int_{\mathbf{R}}\varphi(0,\cdot)u_0\,dx\ ,\end{aligned}$$

jer funkcija φ ima kompaktan nosač i jednaka je nuli za velike t i x.

Dobili smo da za u_0 neprekinuto diferencijabilno rješenje u zadovoljava *varijacijsku jednadžbu*:

$$(7)\qquad \big(\forall\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})\big)\ \int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}(\varphi_t u + c\varphi_x u)\ dt\,dx + \int_{\mathbf{R}}\varphi(0,\cdot)u_0\,dx = 0\ .$$

Vrijedi i obratno: ako funkcija u klase C^1 zadovoljava (7), onda biranjem $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R})$ najprije dobivamo (1_1), a potom uzimanjem $\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})$ slijedi i početni uvjet.

Prednost ekvivalentnog oblika (7) početne zadaće (6) je u tome da ta jednadžba ima smisla i za funkcije u koje su *lokalno sumabilne* (to jest koje su sumabilne po svakom kompaktu: $u\in\mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}) := \big\{f : (\forall K\in\mathcal{K}(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}))\ \int_K|f|<\infty\big\}$). Kažemo da je lokalno integrabilna funkcija u *slabo rješenje* Cauchyjeve zadaće (6) ako vrijedi (7).

Može se pokazati da je slabo rješenje jedinstveno, te da je dano formulom $u(t,x)=u_0(x-ct)$. Zaista, za jedinstvenost: neka su u_1 i u_2 dva slaba rješenja. Njihova razlika $u := u_1-u_2$ zadovoljava:

$$(8)\qquad \big(\forall\varphi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})\big)\ \int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}u\,(\varphi_t + c\varphi_x)\ dt\,dx = 0\ .$$

Da bismo pokazali da je $u=0$, dovoljno je pokazati da $\big(\forall\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})\big)\ \int_{\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}}u\psi\,dt\,dx = 0$. To će biti pokazano ako u (8) za svaku danu funkciju $\psi\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R})$ možemo riješiti Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases}\varphi_t + c\varphi_x = -\psi & \text{na } \mathbf{R}_0^+\times\mathbf{R}\\ \varphi(T,\cdot)=0\ . & \end{cases}$$

Rješenje te zadaće dano je formulom $\varphi(t,x)=\int_t^T\psi(s,x+c(s-t))\,ds$, i time je pokazana jedinstvenost slabog rješenja.

Potpuni integrali i ovojnice

Pogledajmo općenitu nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda na otvorenom skupu $U\subseteq\mathbf{R}^d$:

$$(9)\qquad F\,(\cdot,u,\nabla u)=0\ ,$$

pri čemu je ($\mathsf{Cl}\,U$ označava zatvarač skupa U) $F:\mathsf{Cl}\,U\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d\longrightarrow\mathbf{R}$ zadana funkcija, a nepoznanica je funkcija $u:\mathsf{Cl}\,U\longrightarrow\mathbf{R}$. U daljem ćemo podrazumijevati da je F glatka (barem C^1) funkcija.

Uvedimo najprije neke nove pojmove. Neka je $A \subseteq \mathbf{R}^n$ otvoren skup, te neka za svaki parametar $\mathbf{a} \in A$ imamo C^2 rješenje (9), funkciju $u(\cdot;\mathbf{a})$.

Funkcija $u \in \mathrm{C}^2(U \times A)$ je *potpuni integral* na $U \times A$ ($U \subseteq \mathbf{R}^d$ je otvoren skup na kojem tražimo rješenje) ako vrijedi:

a) $u(\cdot;\mathbf{a})$ rješava (9) za svaki čvrsti $\mathbf{a} \in A$,

b) $\operatorname{rang}\,[\nabla_{\mathbf{a}} u \ \nabla^2_{\mathbf{xa}} u] = d$.

Drugi uvjet upravo znači da funkcija u ovisi o svim parametrima a_i.

Bez izmjena, gornja se definicija primjenjuje i na poseban slučaj kvazilinearne jednadžbe.

Uzmimo da je $u \in \mathrm{C}^1(U \times A)$, te pogledajmo sljedeću vektorsku jednadžbu (sustav):

$$\nabla_{\mathbf{a}} u(\mathbf{x};\mathbf{a}) = \mathsf{0} \ . \tag{10}$$

Ako tu jednadžbu možemo (koristeći Teorem o implicitno zadanim funkcijama) riješiti po parametru $\mathbf{a}$ kao C^1 funkciju varijable $\mathbf{x}$: $\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$, što znači da je $\nabla_{\mathbf{a}} u(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})) = \mathsf{0}$; onda funkciju:

$$v(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x};\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}))$$

zovemo *ovojnicom* familije funkcija $(u(\cdot;\mathbf{a}), \mathbf{a} \in A)$.

Koristeći ovojnice možemo graditi nova rješenja nelinearnih jednadžbi.

Teorem 5. *Pretpostavimo da za svaki $\mathbf{a} \in A$ kao gore funkcija $u(\cdot;\mathbf{a})$ rješava jednadžbu (9). Nadalje, pretpostavimo da ovojnica v postoji, te da je C^1 funkcija. Tada je v rješenje (9).*

Dem. U konciznom zapisu (čitatelj se može poslužiti i koordinatnim zapisom), zbog (10) je:

$$\nabla_{\mathbf{x}} v = \nabla_{\mathbf{x}} u(\cdot;\boldsymbol{\varphi}) + \nabla\varphi \nabla_{\mathbf{a}} u(\cdot;\boldsymbol{\varphi}) = \nabla_{\mathbf{x}} u(\cdot;\boldsymbol{\varphi}) \ ,$$

pa je v rješenje, jer je $F(\cdot, v, \nabla v) = F(\cdot, u(\cdot;\boldsymbol{\varphi}), \nabla_{\mathbf{x}} u(\cdot;\boldsymbol{\varphi})) = 0$.

Q.E.D.

Kako bismo generirali još više rješenja (9) iz potpunog integrala, pogledajmo i inačicu gornje konstrukcije.

Uzmimo $A' \subseteq \mathbf{R}^{n-1}$ otvoren, i C^1 funkciju $h : A' \longrightarrow \mathbf{R}$ čiji graf leži u A, uz zapis $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = (\mathbf{a}', a_n)$ ($\mathbf{a}' \in A'$).

Opći integral (koji ovisi o h!) je ovojnica $\tilde v$ funkcija $\tilde u(\mathbf{x};\mathbf{a}') = u(\mathbf{x};\mathbf{a}', h(\mathbf{a}'))$, za $\mathbf{a}' \in A'$, uz uvjet da ta ovojnica postoji, te da je klase C^1.

Dakle, ovdje se ograničujemo samo na parametra oblika $(\mathbf{a}', h(\mathbf{a}'))$, za neku izabranu funkciju. Polazeći od potpunog integrala, koji ovisi o n proizvoljnih konstanti $a_1, \dots, a_n$, došli smo do rješenja koje ovisi o proizvoljnoj funkciji h u $n-1$ varijabli.

Primjer. Provjeriti da je

$$u(t, \mathbf{x}; \mathsf{a}, b) = \mathsf{a} \cdot \mathbf{x} - tH(\mathsf{a}) + b \ , \qquad \mathsf{a} \in \mathbf{R}^d, b \in \mathbf{R}$$

potpuni integral Hamilton-Jacobijeve jednadžbe

$$u_t + H(\nabla u) = 0 \ .$$

∎

Cauchyjeva zadaća za kvazilinearnu jednadžbu prvog reda

Tražimo rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$F\left(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}), \nabla u(\mathbf{x})\right) = 0$$

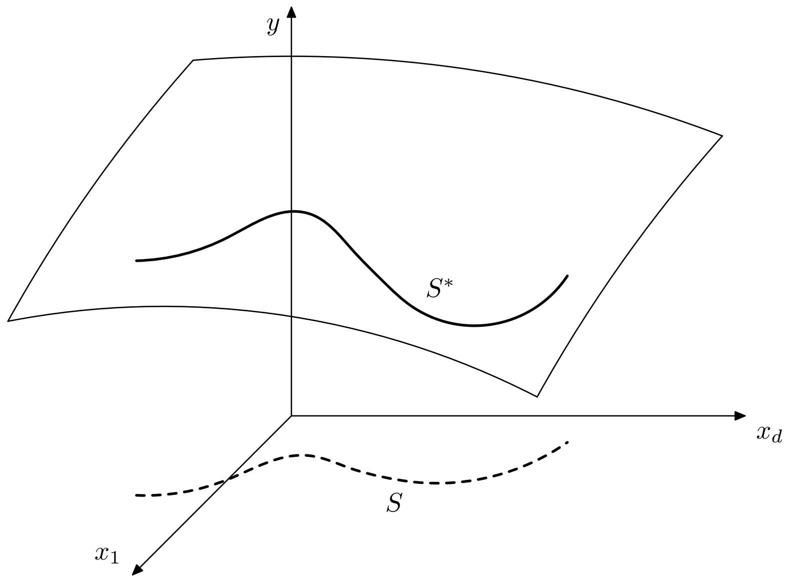
definirano na nekoj okolini plohe S u $\mathbf{x}$ prostoru, takvo da je $u_{|S} = u_0$, pri čemu je u_0 zadana funkcija. To je *Cauchyjeva zadaća* za općenitu (posve nelinearnu) jednadžbu prvog reda.

Mi ćemo se ograničiti na proučavanje kvazilinearnih jednadžbi

$$\mathsf{a}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \ .$$

Pretpostavimo da je u rješenje kvazilinearne jednadžbe. Graf funkcije u je u $(d+1)$-dimenzionalnom prostoru ($d+1$-vu koordinatu označimo s y), i normala na taj graf je određena vektorom $\begin{bmatrix} \nabla u \\ -1 \end{bmatrix}$. Jednadžba upravo tvrdi da je vektorsko polje $\mathsf{v}(\mathbf{x}, y) = \begin{bmatrix} \mathsf{a}(\mathbf{x}, y) \\ b(\mathbf{x}, y) \end{bmatrix}$ okomito na normalu, dakle tangencijalno na plohu $y = u(\mathbf{x})$ u svakoj točki.

Neka je S hiperploha u prostoru $\mathbf{R}^d$ (*krivulja u horizontalnoj ravnini* na slici), na kojoj je zadana funkcija u_0. Sa S^* označimo graf funkcije u_0. Taj je graf podskup grafa funkcije u.



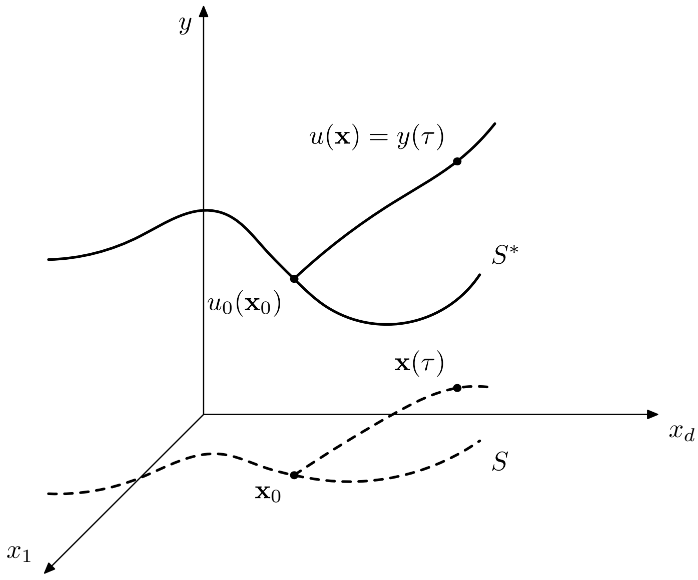
Integralne krivulje vektorskog polja v su rješenja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathsf{a}(\mathbf{x}, y) \\ \dfrac{dy}{d\tau} = b(\mathbf{x}, y) \ . \end{cases}$$

Ako riješimo taj sustav, uvaživši početne uvjete $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in S$ i $y(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$ ($(\mathbf{x}_0, u_0(\mathbf{x}_0)) \in S^*$), dobivamo funkcije $\mathbf{x}(\tau)$ i $y(\tau)$. Sada za $\mathbf{x}$ *blizu* S definiramo $u(\mathbf{x}) := y(\tau)$; pri čemu je najprije izabrana integralna krivulja koja prolazi kroz danu točku $\mathbf{x}$, a potom je određen τ tako da je $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$. Tako definirana funkcija u je rješenje jednadžbe, jer je

$$\nabla u \cdot \mathsf{a}(\mathbf{x}, y) = \nabla u \cdot \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \frac{du}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau} = b \ ,$$

a očigledno je u jednako u_0 na plohi S.



Vrijedi i obratno: ako je u rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe, onda je vektorsko polje v tangencijalno na graf funkcije u, što pak znači da integralna krivulja tog vektorskog polja koja siječe graf u barem jednoj točki čitava pripada tome grafu.

Gornju diskusiju možemo i formalno iskazati u obliku teorema (neki detalji dokaza su preskočeni, v. [Folland]):

Teorem 6. *Neka je S hiperploha klase C^1 u $\mathbf{R}^N$, a a, b i u_0 realne C^1 funkcije na odgovarajućim domenama.*

Ako vektorsko polje $\mathsf{a}(\mathbf{x}, u_0(\mathbf{x}))$ nije tangencijalno na plohu S ni u kojoj točki $\mathbf{x} \in S$, onda postoji rješenje u klase C^1 jednadžbe

$$\mathsf{a}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$$

definirano na nekoj okolini plohe S, takvo da je $u_{|S} = u_0$.

Štoviše, svaka takva dva rješenja u se podudaraju na nekoj okolini plohe S. ∎

Primjeri.

Riješiti s pomoću karakteristika sljedeće Cauchyjeve zadaće:

1. $x_1\partial_1 u + 2x_2\partial_2 u + \partial_3 u = 3u$, $u = u_0$ na $x_3 = 0$ $\quad [u = u_0(x_1 e^{-x_3}, x_2 e^{-2x_3}) e^{3x_3}]$

2. $\partial_1 u + \partial_2 u = u$, $u = \cos x_1$ na $x_2 = 0$ $\quad [u = e^{x_2}\cos(x_1 - x_2)]$

3. $x_1^2\partial_1 u + x_2^2\partial_2 u = u^2$, $u = 1$ na $x_2 = 2x_1$ $\quad [u = \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2 - x_2 + 2x_1}]$

4. $u\partial_1 u + \partial_2 u = 1$, $u = \dfrac{s}{2}$ na $x_1 = x_2 = s$ $\quad [u = \frac{4x_2 - 2x_1 - x_2^2}{2(2 - x_2)}]$

5. $u_y = xuu_x$, $u(x, 0) = x$ $\quad [x = ue^{-yu}$ implicitno$]$

6. $xu_y - yu_x = u$, $u(\cdot, 0) = u_0$ $\quad [u = u_0(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{\operatorname{arc\,tg}(y/x)}]$

7. $u_x + u_y = u^2$, $u(\cdot, 0) = u_0$

8. $xu_x + yu_y + u_z = u$, $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

9. Za $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ riješiti Cauchyjevu zadaću za jednadžbu $\sum_{k=1}^n x_k\partial_k u = \alpha u$, uz početni uvjet $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1) = u_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$. $\quad \left[u(x_1, \ldots, x_n) = x_n^\alpha u_0\left(\frac{x_1}{x_n}, \cdots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)\right]$

10. (**Picone**) Neka je u C^1 rješenje jednadžbe $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = -u$ u zatvorenom jediničnom krugu, te neka je $a(x,y)x + b(x,y)y > 0$ na jediničnoj kružnici. Dokazati da je u identički jednaka nuli.

[Naputak: Pokazati $0 \leq \min u \leq \max u \leq 0$.]

11. Pokazati da je rješenje u kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe $u_y + a(u)u_x = 0$ s početnim uvjetom $u(0,x) = h(x)$ implicitno dano izrazom $u = h(x - a(u)y)$. Pokazati da to rješenje za neki pozitivan y postaje singularno osim ako je $a \circ h$ neopadajuća funkcija.

Lagrangeev postupak za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Postavlja se pitanje, slično kao kod običnih diferencijalnih jednadžbi, kako postupiti u slučaju da Cauchyjevi uvjeti nisu zadani, tj. ako se traži *opće rješenje* kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$\mathsf{a}(\mathbf{x}, u(\mathbf{x})) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}, u(\mathbf{x}))$$

Radi jednostavnosti zapisa pogledajmo slučaj dviju neovisnih varijabli $\mathbf{x} = (x,y)$:

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y = b(x,y,u)\ . \tag{11}$$

Pretpostavimo da je u rješenje jednadžbe, i promotrimo graf te funkcije. Vektor $(u_x, u_y, -1)$ ima smjer normale na taj graf; to je zapravo značenje relacije (izraza za totalni diferencijal):

$$du = u_x dx + u_y dy\ . \tag{12}$$

Jednadžba (11) upravo znači da je polje smjerova (a_1, a_2, b) tangencijalno na graf funkcije u. To polje smjerova se sastoji od tangenti na karakteristične krivulje, koje su rješenja sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b}\ . \tag{13}$$

Zaista, taj sustav upravo tvrdi da je (dx, dy, du) proporcionalno s (a_1, a_2, b), a što slijedi uspoređivanjem s (11) i (12).

Kako ovaj postupak usporediti s prethodnim, u kojem smo rješavali Cauchyjevu zadaću? Neka je zadana krivulja $x = x(t), y = y(t), u = u(t)$, kroz koju mora prolaziti graf funkcije u; to je početni uvjet za sustav (13), koji se lokalno može riješiti za svaki čvrsti t. Ako uvedemo parametar s (na primjer, duljinu luka) duž pripadnih integralnih krivulja, dobivamo jednadžbe plohe (u parametarskom obliku):

$$x = x(s,t)\ , \quad y = y(s,t)\ , \quad u = u(s,t)\ .$$

Eliminacijom parametara s i t dobivamo traženo rješenje $u = u(x,y)$. Uočimo da sustav (13) možemo zamijeniti sa sustavom (s ne mora biti jednako duljini luka):

$$\frac{dx}{ds} = a_1(x,y,u)\ , \quad \frac{dy}{ds} = a_2(x,y,u)\ , \quad \frac{du}{ds} = b(x,y,u)\ .$$

U (13) naprosto formalno označimo vrijednost tih jednakih kvocijenata s ds; ili preciznije, uočimo da je s (13) dana kanonska jednadžba pravca, čije parametarske jednadžbe glase kao gornji sustav.

Jedina se poteškoća pojavljuje pri eliminaciji parametara. To će za dovoljno male s biti moguće ako i samo ako je Jacobijan $J := \begin{vmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{vmatrix} \neq 0$ duž početne krivulje. Ukoliko je $J = 0$, to znači da je $\frac{x_t}{y_t} = \frac{x_s}{y_s} = \frac{a_1}{a_2}$, pa slijedi $\frac{u_t}{b} = \frac{y_t}{a_2} = \frac{x_t}{a_1}$; što je upravo jednadžba karakterističnih krivulja.

Dakle, nužan i dovoljan uvjet postojanja lokalnog rješenja je da početna krivulja nije karakteristična niti u jednoj svojoj točki.

Primjer. $xuu_x + yuu_y = -(x^2 + y^2)$

Ovoj jednadžbi pridružimo sustav dviju običnih diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{yu} = \frac{du}{-(x^2+y^2)} \ .$$

Prva nam jednakost daje $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, odakle integracijom slijedi $\ln y = \ln x + C$, odnosno $\varphi(x,y,u) := \frac{y}{x} = c_1$.

Iz jednadžbe $\frac{dx}{xu} = -\frac{du}{(x^2+y^2)}$ eliminirajmo y koristeći upravo dobiveni izraz $\frac{dx}{x} = -\frac{u\,du}{x^2(1+c_1^2)}$, odakle slijedi $x\,dx = -\frac{u\,du}{1+c_1^2}$; $(1+c_1^2)x^2 + u^2 = c_2$. Eliminiranjem c_1 konačno dobivamo drugi *integral* pridruženih običnih diferencijalnih jednadžbi: $\psi(x,y,u) := x^2+y^2+u^2 = c_2$.

Ako su funkcije φ i ψ *funkcionalno neovisne*, onda je Jacobijeva matrica $\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y,u)}$ ranga 2 u svakoj točki domene. Imamo sa su

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} = -2\frac{x^2+y^2}{x^2} \ , \ \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,u)} = -2\frac{uy}{x^2} \ , \ \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(y,u)} = 2\frac{u}{x}$$

različiti od nule čim je $xyu \neq 0$. U tom području je *opće rješenje* polazne jednadžbe svaka relacija

$$F\left(\frac{y}{x}, x^2+y^2+u^2\right) = 0 \ .$$

Razlog nazivu *opće rješenje* za relaciju $F(\varphi,\psi) = 0$ možemo vidjeti iz sljedećega.

Neka je F neprekinuto diferencijabilna funkcija koja zadovoljava gornju relaciju i za koju je $F_\psi \neq 0$. Tada ta relacija implicitno lokalno definira funkciju $u = f(x,y)$, koja je rješenje polazne parcijalne diferencijalne jednadžbe. Zaista, eliminirajmo F iz relacije deriviranjem po x i y:

$$\begin{aligned} F_\varphi(\varphi_x + \varphi_u f_x) + F_\psi(\psi_x + \psi_u f_x) = 0 \\ F_\varphi(\varphi_y + \varphi_u f_y) + F_\psi(\psi_y + \psi_u f_y) = 0 \end{aligned}$$

odakle eliminiranjem F_φ/F_ψ dobivamo $(\psi_x + \psi_u f_x)(\varphi_y + \varphi_u f_y) - (\psi_y + \psi_u f_y)(\varphi_x + \varphi_u f_x) = 0$, ili ljepše zapisano:

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,y)} f_x + \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,u)} f_y = -\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(x,y)} \ .$$

Uvrstimo gore izračunate vrijednosti za Jacobijeve determinante

$$-2\frac{u}{x} f_x - 2\frac{uy}{x^2} f_y = -2\frac{x^2+y^2}{x^2} \ ,$$

što je ekvivalentno polaznoj jednadžbi.

Opće se rješenje može zapisati i u obliku $y/x = g_1(x^2+y^2+u^2)$ i $x^2+y^2+u^2 = g_2(y/x)$, pri čemu su g_1 i g_2 proizvoljne funkcije. ∎

Općenito za dvije varijable imamo jednadžbu (11), i pripadni sustav (13). Podsjetimo se da ako je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, onda je i $\frac{\lambda a + \mu c}{\lambda b + \mu d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Iterirajući, pripadnom sustavu možemo dodati još jednu jednadžbu (za proizvoljne λ, μ i ν)

$$\frac{\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,du}{\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b} = \frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{du}{b} \ ,$$

što može pojednostaviti integraciju. Naime, ako možemo naći λ, μ i ν takve da je $\lambda a_1 + \mu a_2 + \nu b = 0$; onda mora biti i $\lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,du = 0$. Ako nađemo funkciju φ takvu da je $d\varphi = \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,du$, onda je $\varphi(x,y,u) = c_1$ integral pripadnog sustava običnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjeri.

1. $(y-x)u_x + (y+x)u_y = \dfrac{x^2+y^2}{u}$ $\qquad \left[F(x^2+xy-y^2, x^2-y^2+u^2) = 0\right]$

2. $(u^2-2yu-y^2)u_x+(xy+xu)u_y=xy-xu$ $\qquad\left[F(u^2-y^2+2uy,x^2+y^2+u^2)=0\right]$

3. $uu_x+yu_y=x$ $\qquad\left[F\left(x^2-u^2,\frac{x+u}{y}\right)=0\right]$

4. $yu_x-xu_y=x^3y+xy^3$ $\qquad\left[u=\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+f(x^2+y^2)\right]$

5. $x(y-u)u_x+y(u-x)u_y=u(x-y)$ $\qquad[xyu=f(x+y+u)]$

6. $a_1u_x+a_2u_y+a_3u_2+bu=0$ (a_i,b su konstante) $\qquad\left[u=e^{-bx/a_1}f(a_2x-a_1y,a_3x-a_1z)\ ,\ \ a_1\neq 0\right]$

7. $xu_x+yu_y+zu_z=nu$ $(n\in\mathbf{R})$ $\qquad\left[u=x^nf\left(\frac{x}{y},\frac{z}{x}\right)\right]$

8. $u_x+xu_y+xyu_z=xyzu$ $\qquad\left[f(x^2-2y,y^2-2z,ue^{-z^2/2})=0\right]$

9. $xu_x+yu_y+zu_z=u+\dfrac{xy}{z}$ $\qquad\left[u=xf\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)+\frac{xy\ln x}{z}\right]$

Cauchyjeva zadaća i Cauchy-Kowalevskin teorem

Željeli bismo dokazati za parcijalne diferencijalne jednadžbe proizvoljnog reda teorem analogan teoremima koji vrijede za obične diferencijalne jednadžbe. Za to će najprije biti potrebno definirati neke pojmove i utvrditi zapis parcijalnih derivacija.

Red parcijalnog diferencijalnog operatora jednak je redu najviše derivacije nepoznate funkcije. Ako gledamo operator na funkcijama dviju varijabli t i x, sve derivacije reda m su oblika $\partial_t^j\partial_x^{m-j}, j\leq m$.

Ukoliko, kao i kod običnih diferencijalnih jednadžbi, koristeći Teorem o implicitno zadanim funkcijama, jednadžbu lokalno riješimo po najvišoj derivaciji u t, dobivamo sljedeći oblik jednadžbe:

$$\partial_t^m u=G\left(t,x;(\partial_t^j\partial_x^k u)_{j<m}\right)\ . \tag{14}$$

Gornje oznake znače da je G funkcija od t,x,u i derivacija funkcije u reda po t manjeg ili jednakog $m-1$. Na primjer, $u_{tx}=0$ nije gornjeg oblika, dok valna jednadžba $u_{tt}=u_{xx}$ jest.

Ako je u glatko rješenje jednadžbe (14), onda poznavajući $\partial_t^\nu u(0,\cdot)=g_\nu$, za $\nu=0,1,\dots,m-1$ na nekoj okolini točke $x=0$ možemo odrediti sve derivacije funkcije u u točki $(0,0)$.

Zaista, iz početnih podataka možemo izračunati $\partial_t^\nu\partial_x^k u(0,\cdot)=\left(\frac{d}{dx}\right)^k g_\nu$. Induktivno, ako je za $n\geq m$ i svaki k poznato $\partial_t^\nu\partial_x^k u(0,\cdot)$ za $\nu<n$, onda iz jednadžbe slijedi:

$$\partial_t^n\partial_x^k u=\partial_t^{n-m}\partial_x^k\left(G\left(\cdot,\cdot;(\partial_t^j\partial_x^k u)_{j<m}\right)\right)=:G_{nk}\left(\cdot,\cdot;(\partial_t^j\partial_x^k u)_{j<m}\right)\ .$$

Za $t=0$ su argumenti funkcija G_{nk} poznati na nekoj okolini $x=0$ po induktivnoj pretpostavci, pa je i $\partial_t^n\partial_x^k u(t,x)$ poznato. Ovaj nam postupak može omogućiti računanje Taylorovog razvoja rješenja u oko $(0,0)$.

Vidjeli smo dosad na primjerima da za analitičke početne podatke jednadžbe imaju analitička rješenja. Međutim, to nije nužno uvijek slučaj, kao što to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer. (Cauchyjeva zadaća za jednadžbu provođenja)

$$\begin{cases} u_t=\kappa u_{xx} \\ u(0,\cdot)=g\ . \end{cases}$$

Derivacije funkcije u za $t=0$ računamo na sljedeći način:

$$u_t(0,x)=\kappa u_{xx}(0,x)=\kappa g''(x)$$

$$u_{tt}(0,x)=\kappa u_{xxt}(0,x)=\kappa^2u_{xxxx}(0,x)=\left(\kappa\frac{d^2}{dx^2}\right)^2g(x)$$

$$\partial_t^j\partial_x^k u(0,x)=\left(\kappa\frac{d^2}{dx^2}\right)^j\left(\kappa\frac{d}{dx}\right)^k g(x)\ .$$

Za Taylorov razvoj oko $(0, x_0)$ dobivamo:

$$u(0,x) \sim \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{\left(\kappa\frac{d^2}{dx^2}\right)^j \left(\kappa\frac{d}{dx}\right)^k g(x_0)}{j!k!} t^j (x-x_0)^k \ .$$

Ovaj red ne mora nužno konvergirati ako funkcija g ima konvergentan Taylorov red, jer koeficijent uz j-tu potenciju t sadrži derivacije reda $2j$ funkcije g (v. zadatak ?? za protuprimjer). ∎

Vidjeli smo dva moguća razloga za nekonvergenciju Taylorovog reda za rješenje u:

a) Funkcije G ili g_ν nisu analitičke.

b) Parcijalna diferencijalna jednadžba nije najvišeg reda po t.

Ukoliko gornja dva slučaja ne nastupaju, onda imamo konvergenciju. To je upravo čuveni rezultat Cauchyja (1842) i Kowalevske (1875).

Teorem 7. (Cauchy—Kowalevski) *Neka su funkcije g_j, za $j \in 0..m-1$ analitičke na okolini $x_0 \in \mathbf{R}$, te neka je G analitička funkcija na okolini točke $(0, x_0; (\partial_t^i \partial_x^k g_j(x_0))_{i \leq m-1, i+k \leq m})$. Tada postoji realno analitičko rješenje u Cauchyjeve zadaće:*

$$\begin{cases} \partial_t^m u = G(\cdot, \cdot; (\partial_t^i \partial_x^k u)_{i \leq m-1, i+k \leq m}) \\ \partial_t^j u(0, \cdot) = g_j \ , \ j \in 0..m-1 \end{cases}$$

definirano na okolini $(0, x_0)$ u $\mathbf{R}^2$.

To je rješenje jedinstveno u smislu da, ako su u i v analitička rješenja Cauchyjeve zadaće definirana na povezanoj okolini točke $(0, x_0)$, onda je $u = v$. ∎

Jedinstvenost u gornjem teoremu je vrlo jednostavna; za dokaz postojanja vidjeti seminarski zadatak. Teorem se može primijeniti na valnu jednadžbu, ali ne može na jednadžbu provođenja.

Primjer. Pogledajmo sljedeću početnu zadaću:

$$\begin{cases} u_t^2 + u_x^2 = 1 \\ u(0, \cdot) = g \ . \end{cases}$$

U $t = 0$ jednadžba $(u_t(0, \cdot))^2 = 1 - (g')^2$ je algebarski rješiva za $|g'| \leqslant 1$, ali $u_t(0, \cdot)$ nije jednoznačno određeno čak ni u $(0, 0)$: $u_t(0, 0) = \pm\sqrt{1 - (g'(0))^2}$

Izborom vrijednosti $u_t(0, 0)$ (+ ili − ispred korijena) jednoznačno rješavamo algebarsku jednadžbu, i tada možemo primijeniti teorem Cauchyja i Kowalevske za $(g')^2 \neq 1$. Ukupno tako dobivamo dva rješenja Cauchyjeve zadaće. ∎

Zadaci.

1. Pogledajmo jednadžbu provođenja $u_t = \kappa u_{xx}$ $(\kappa > 0)$, s početnom vrijednošću u_0, koja je polinom u x. Pokazati da rješenje jednadžbe u obliku Taylorovog reda ima radius konvergencije $R = \infty$. Pokazati i da je, za svaki čvrsti t, to rješenje polinom u x. Da li je rješenje i polinom u t?

2. Neka je zadan linearan parcijalni diferencijalni operator $P(\partial_t, \partial_x) = \partial_t^m + \sum A_j(\partial_x)\partial_t^{m-j}$, pri čemu su A_j operatori s konstantnim koeficijentima proizvoljnog reda. Ako su g_j polinomi, onda početna zadaća

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ \partial_t^j u(0, \cdot) = g_j \ , \ j = 0, \ldots, m-1 \end{cases}$$

ima jedinstveno analitičko rješenje u koje je definirano na čitavoj ravnini. Je li u polinom u t?

Poopćiti na slučaj $x \in \mathbf{R}^d$.

[Napomena. Ako je P reda višeg od m, rješenje nije jedinstveno u klasi C^∞.]

3. Pokazati da početna zadaća:

$$\begin{cases} u_t u_x = f(t,x,u) \\ u(0,\cdot) = u_0 \end{cases}$$

ima analitičko rješenje na okolini $(0,0)$, ako je f analitička na okolini $(0,0,u_0(0))$, a u_0 analitička na okolini 0 i $g'(0) \neq 0$.

Konstruirati primjer u kojem je $g'(0) = 0$, $g''(0) \neq 0$, te da su g i f analitičke, ali da početna zadaća nema niti C^1 rješenja na okolini $(0,0)$.

4. Pokazati da ako početna zadaća:

$$\begin{cases} u_{tt} + u_{xx} = 0 \\ u(0,\cdot) = 0 \\ u_t(0,\cdot) = u_1 \end{cases}$$

ima C^2 rješenje na okolini $(0,0)$, onda u_1 i u moraju biti analitičke na nekoj okolini 0, odnosno $(0,0)$.
[Naputak. Primijeniti Schwarzov princip refleksije i činjenicu da se harmoničke funkcije u ravnini mogu prikazati kao realan (ili imaginaran) dio analitičke funkcije.]

5. Pokazati da Cauchyjeva zadaća za Laplaceovu jednadžbu nije dobro postavljena.
[Naputak. Možemo se poslužiti Hadamardovim primjerom:

$$\begin{cases} \triangle u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \\ u(\cdot,0) = 0 \\ u_y(x,0) = \dfrac{\sin jx}{j} \end{cases}.$$

Pri $j \longrightarrow \infty$, $\frac{\sin jx}{j} \rightrightarrows 0$, ali rješenje ne konvergira k rješenju jednadžbe za $u_y(\cdot,0) = 0$.]

6. Za jednadžbu provođenja $u_t = \kappa u_{xx}$ $(\kappa > 0)$, s početnom vrijednošću $u_0(x) = \frac{1}{1-ix}$ (koja je realno analitička funkcija), pokazati da Taylorov red oko $(0,0)$ ne konvergira niti u jednoj točki ravnine gdje je $t \neq 0$.

7. Pokazati da zadaća:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(\cdot,0) = u_0 \\ u_x(\cdot,0) = u_1 \end{cases}$$

nije dobro postavljena.
[Naputak. Uzeti $u_0(t) = \frac{\cos 2jt}{j}$ i $u_1(t) = \frac{\cos 2jt - \sin 2jt}{\sqrt{j}}$]

Seminarski zadaci

- Dokazati teorem Cauchyja i Kowalevske. [Hadamard, John, Folland, Garabedian ili Courant-Hilbert]