Obične diferencijalne jednadžbe

1. Uvod i Cauchyjev teorem

Obična diferencijalna jednadžba m-tog reda glasi:

$$F(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(m)}(t)) = 0 \; .$$

Za dovoljno glatku funkciju F, po teoremu o implicitno zadanim funkcijama, tu jednadžbu (kao algebarsku jednadžbu) možemo riješiti po najvišoj derivaciji:

$$x^{(m)}(t) = G(t, x(t), \cdots, x^{(m-1)}(t)) \; .$$

To je *normalni oblik* gornje diferencijalne jednadžbe.

Zamjenom $x^1 = x, \ldots, x^m = x^{(m-1)}$; uz oznaku $\mathsf{x} = (x^1, \ldots, x^m)$, jednadžba se može zapisati u obliku sustava prvog reda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x^m(t) &= G(t, \mathsf{x}(t)) \\ \frac{d}{dt}x^{m-1}(t) &= x^m(t) \\ &\vdots \\ \frac{d}{dt}x^1(t) &= x^2(t) \; , \end{aligned}$$

koji konciznije zapisujemo u obliku $\mathsf{x}'(t) = \mathsf{a}(t, \mathsf{x}(t))$. Analogno se i sustav jednadžbi višeg reda može svesti na ekvivalentan sustav prvog reda, samo s većim brojem (recimo $d \geqslant m$) nepoznatih funkcija.

Uz gornji se sustav jednadžbi najčešće pridodaje i početni uvjet. Zadatak je riješiti Cauchyjevu zadaću; naći funkciju $\mathsf{x} : I \longrightarrow \mathbf{R}^d$ (pri čemu je I neki interval oko t_0) tako da vrijedi:

$$(CZ) \qquad \begin{cases} \mathsf{x}'(t) = \mathsf{a}(t, \mathsf{x}(t)) \\ \mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0 \; . \end{cases}$$

Poznata su tri klasična teorema za postojanje rješenja, čiji se rezultati neposredno prenose i na jednadžbe (odnosno sustave) višeg reda: Cauchyjev, Picardov i Peanov.

Najprije se podsjetimo da je funkcija $a : U \longrightarrow \mathbf{R}$ realna analitička funkcija na otvorenom skupu $U \subseteq \mathbf{R}^{d+1}$ (oznaka $a \in \mathrm{A}(U)$) ako se na nekoj okolini svake točke (t_0, x_0) toga skupa funkcija a može razviti u konvergentan red potencija:

$$a(t, \mathsf{x}) = \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_d = 0}^{\infty} c_{\alpha_0, \ldots, \alpha_d} (t - t_0)^{\alpha_0} (x^1 - x^1_0)^{\alpha_1} \cdots (x^d - x^d_0)^{\alpha_d} \; .$$

Tome je ekvivalentno da se funkcija a može proširiti do holomorfne funkcije na nekoj okolini točke (t_0, x_0) u $\mathbf{C}^{d+1}$. Vektorska je funkcija analitička ako su takve sve njezine komponente.

Teorem 1. **(Cauchy)** *Ako je funkcija* a *analitička na nekoj okolini točke* (t_0, x_0), *onda postoji jedinstveno rješenje* x *gornje Cauchyjeve zadaće, koje je analitičko na nekoj okolini točke* t_0. ∎

Naravno, prirodno je gornji teorem interpretirati za funkcije kompleksne varijable, što je zapravo proširenje analitičkih funkcija s dijela pravca (intervala) na dio ravnine (krug).

Na temelju Cauchyjevog teorema imamo sljedeći postupak za rješavanje Cauchyjeve zadaće (zapravo, to je upravo put kojim se Cauchyjev teorem dokazuje). Pretpostavimo da se nepoznata funkcija može razviti u konvergentan red potencija i taj red uvrstimo u jednadžbu, u kojoj smo sve funkcije koje se pojavljuju razvili u redove potencija. Izjednačavajući članove uz iste potencije $t - t_0$ možemo odrediti koeficijente u razvoju funkcije x.

Cauchyjev postupak počiva na ideji majorizirajućih funkcija. Neka je f holomorfna u $t_0 \in \mathbf{C}$; funkcija φ, holomorfna u t_0 *majorizira* f (u t_0), što pišemo $f \ll \varphi$, ako vrijedi:

$$(1) \qquad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \quad |f^{(n)}(t_0)| \leqslant \varphi^{(n)}(t_0) \; .$$

Nije posve jasno da takva funkcija φ, koja je zajedno sa svim svojim derivacijama nenegativna u t_0, zaista postoji (v. Zadatak ??).

Gornja definicija se lako poopćuje na holomorfne funkcije više varijabli; (1) naprosto mora vrijediti za sve mješovite derivacije.

Sustav diferencijalnih jednadžbi je *linearan* ako je oblika:

$$\mathsf{x}' = \mathbf{A}\mathsf{x} \; ,$$

pri čemu je $\mathbf{A} : I \longrightarrow \mathrm{M}_{d\times d}$. Za linearan sustav (uz odgovarajuće pretpostavke na glatkoću $\mathbf{A}$) se može pokazati da ima d linearno neovisnih rješenja $\mathsf{x}_1, \ldots, \mathsf{x}_d$, koja možemo posložiti kao stupce matrice $\mathbf{X}$. Time dobivamo *elementarno (fundamentalno) rješenje* linearnog sustava. Rješenje Cauchyjeve zadaće može se tada prikazati kao množenje početnog uvjeta elementarnim rješenjem (točnije, $\mathsf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathsf{x}_0$), a opće rješenje nehomogene jednadžbe

$$\mathsf{x}' = \mathbf{A}\mathsf{x} + \mathsf{b}$$

može se zapisati u obliku

$$(2) \qquad \mathsf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\left(\mathsf{c} + \int_{t_0}^{t} \mathbf{X}^{-1}(\tau)\mathsf{b}(\tau)d\tau\right) \; .$$

Naravno, gornje je formule lako formalno provjeriti; za odgovarajuću glatkoću funkcija može se pokazati da one i definiraju rješenja.

Zadaci.

1. Zapisati oblik matrice linearnog sustava dobivenog svođenjem homogene linearne jednadžbe m-tog reda

$$x^{(m)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$

na ekvivalentan sustav prvog reda.

2. Neka je $\mathbf{A} : I \longrightarrow \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C})$ holomorfna funkcija na jednostavno-povezanom području $I \subseteq \mathbf{C}$. Pokazati da tada Cauchyjeva zadaća:

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathsf{x}' = \mathbf{A}\mathsf{x} \\ \mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno holomorfno rješenje za proizvoljne $t_0 \in I$ i $\mathsf{x}_0 \in \mathbf{C}^d$, definirane na najvećem krugu K oko t_0 koji je sadržan u I.

Koristeći teorem monodromije, pokazati da se to rješenje može proširiti na čitavo jednostavno-povezano područje I.

[Naputak: Pretpostaviti da se x može razviti u red potencija oko t_0, tako da imamo:

$$\mathsf{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathsf{x}_n (t - t_0)^n \quad \text{i} \quad \mathbf{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}_n (t - t_0)^n \; .$$

Uvrštavanjem u $(*_1)$, te izjednačavanjem koeficijenata dobiva se

$$(n+1)\mathsf{x}_{n+1} = \sum_{m=0}^{n} \mathbf{A}_{n-m}\mathsf{x}_m \; ,$$

odakle se rekurzivno (koristeći poznati x_0) mogu izračunati koeficijenti reda x_n.

Majorizacijom provjeriti da je dobiveni formalni red potencija zaista rješenje: $|\mathsf{x}_n| \leqslant c_n$, pri čemu su c_n određeni s: $c_0 := |\mathsf{x}_0|$, $(n+1)c_{n+1} = c\sum_{m=0}^{n} K^{n-m} c_m$, pri čemu je $K > 1/\rho$ (ρ je radijus konvergencije reda za $\mathbf{A}$), a c neka konstanta koja ovisi o K.]

3. Legendreova jednadžba ($\mu \in \mathbf{C}$) glasi:

$$[(1-t^2)x']' + \mu x = 0 \; .$$

a) Odrediti za koje $t \in \mathbf{C}$ ta jednadžba ima holomorfne koeficijente.
b) Uvrstiti u jednadžbu red potencija oko nule za x, odrediti rekurziju za koeficijente i radijus konvergncije, bez eksplicitnog računanja koeficijenata u Taylorovom razvoju funkcije x.
c) Za $\mu = n(n+1)$, $n \in \mathbf{N}_0$, pokazati da Legendreova jednadžba ima jedno rješenje koje je polinom m-tog stupnja (*Legendreov polinom*).
d) Provjeriti da su vrijednosti μ iz (c) jedine za koje postoji netrivijalno polinomijalno rješenje.

4. Neka je $I \subseteq \mathbf{C}$ jednostavno-povezano područje, te $\mathbf{A} \in \mathrm{A}(I; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$. Ako $\mathbf{X} \in \mathrm{A}(I; \mathrm{M}_{d\times d}(\mathbf{C}))$ zadovoljava jednadžbu $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ na I, onda vrijedi:

$$(\forall\, t, t_0 \in I) \quad \det \mathbf{X}(t) = \det \mathbf{X}(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} \mathsf{tr}\mathbf{A}(\tau) d\tau} \; .$$

Stoga je posebno ili $\det \mathbf{X} = 0$, ili je $\mathbf{X}$ svuda regularna matrica.

5. Pokazati da uz pretpostavke Zadatka 2 postoji elementarno rješenje $\mathbf{X}$ za $(*_1)$, te da je jedinstveno rješenje za Cauchyjevu zadaću $(*)$ dano s

$$\mathsf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0)\mathsf{x}_0 \; .$$

6. Pokazati da su dva elementarna rješenja istog sustava jednaka do na množenje konstantnom regularnom matricom zdesna (tj. do na kombinaciju jednostavnih operacija po stupcima na njima).

7. Pokazati da su $\mathbf{X}$ elementarna rješenja za dani $\mathbf{A}$:
a) $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}t^k$, $\mathbf{X}(t) = e^{\frac{\mathbf{A}t^{k+1}}{k+1}}$.
b) $\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{B}(t)}$, ako $\mathbf{B}(t)$ i $\mathbf{A}(t)$ komutiraju, te je $\mathbf{B}' = \mathbf{A}$ (provjeriti da takav $\mathbf{B}$ ne mora nužno postojati, na primjer, za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$).

8. Ako je $\mathbf{X}$ holomorfna matrična funkcija, $\det \mathbf{X}(t) \neq 0$ za $t \in I$, naći $\mathbf{A}$ tako da je $\mathbf{X}$ pripadno elementarno rješenje za $(*_1)$.

9. Pokazati da nehomogeni linearni sustav s holomorfnim koeficijentima i desnom stranom ima jedinstveno holomorfno rješenje, te da je ono zaista dano formulom (2).

10. Za $\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathsf{b} & \mathbf{A} \end{bmatrix}$ pokazati da x rješava nehomogeni sustav ako i samo ako $\mathsf{y} := \begin{bmatrix} 1 \\ \mathsf{x} \end{bmatrix}$ rješava homogeni sustav $\mathsf{y}' = \mathbf{B}\mathsf{y}$.

11. U ovom se zadatku razvijaju osnovna svojstva majorizirajućih funkcija, koja će se koristiti za dokaz Cauchyjevog teorema u sljedećem zadatku. Za detalje vidjeti [Tricomi].
a) Provjeriti da funkcija $\varphi(t) := \frac{M}{1-\frac{t-t_0}{r}}$, gdje je $M := \max_{t\in \mathrm{K}(t_0,r)} |f(t)|$ (r je izabran tako da je f holomorfna na $\mathrm{K}(t_0, r)$), majorizira f.
[Na $\mathrm{K}(t_0, r)$ funkcija φ se podudara s geometrijskim redom

$$M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t-t_0}{r}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} M \frac{n!}{r^n} \frac{/t-t_0)^n}{n!} \; ,$$

dok je po Cauchyjevoj formuli $|f^{(n)}(t_0)| \leqslant N\frac{n!}{r^n}$.]
b) Ako φ majorizira f u t_0, onda ako je t unutar kruga konvergencije Taylorovog reda za φ oko t_0, onda u t konvergira i Taylorov red za f u t_0; posebno je $|f(t)| \leqslant \varphi(t_0 + |t-t_0|)$.
c) Pokazati rezultat iz (a) za funkcije dviju (pa i više, analogno) varijabli.
$[\varphi(t,s) := \frac{M}{(1-\frac{t-t_0}{r})(1-\frac{s-s_0}{r'})}$, dok Cauchyjeva formula daje $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial t^m \partial s^n}(t_0, s_0) = \frac{m!}{2\pi i} \int \frac{\frac{\partial^n f}{\partial s^n}(t,s_0)}{(t-t_0)^{m+1}} dt.]$

12.* Dokazati Cauchyjev teorem.
[Naputak: Pomakom u domeni i kodomeni, radi jednostavnosti zapisa gledamo poseban slučaj kada je $t_0 = 0$ i $\mathsf{x}(0) = \mathsf{0}$. Pretpostavimo da se nepoznata funkcija x može razviti u red potencija, odakle izjednačavanjem članova uz iste potencije za koeficijente (sve vrijednosti funkcija su u 0, odnosno $(0, \mathsf{0})$) dobivamo: $\mathsf{x}' = \mathsf{a}$, $\mathsf{x}'' = \partial_t \mathsf{a} + (\nabla_{\mathsf{x}} \mathsf{a})\mathsf{a}$, ... Uočimo da su komponente $\mathsf{x}^{(n)}$ polinomi stupnja n u komponentama a i njihovim derivacijama do reda $n-1$, s koeficijentima koji su pozitivni.

Dakle, ako sustav ima rješenje, ono oko 0 mora biti oblika $\mathsf{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{x}^{(n)}(0)\frac{t^n}{n!}$. Kako bismo primijenili postupak majorizirajućih funkcija, umjesto polaznog sustava pogledajmo

$$\begin{cases} \mathsf{y}' = \boldsymbol{\varphi}(\cdot, \mathsf{y}) \\ \mathsf{y}(0) = \mathsf{0} , \end{cases}$$

pri čemu komponente $\boldsymbol{\varphi}$ majoriziraju odgovarajuće komponente a. Pokazati da su tada komponente rješenja y majorizirajuće funkcije za komponente x. Za $\boldsymbol{\varphi}$ uzeti funkcije kao u prethodnom zadatku. Eksplicitno odrediti radijus konvergencije.

Jedinstvenost je poseban slučaj jedinstvenosti dokazane u Picardovom teoremu (v. niže).]

13.* Zapisati rezultat Cauchyjevog teorema za skalarnu jednadžbu drugog reda $x'' = f(\cdot, x, x')$, uz početne uvjete $x(t_0) = x_0$ i $x'(t_0) = x_1$.

14.* Pretpostavimo da, uz uvjete Cauchyjevog teorema, funkcija a analitički ovisi i o kompleksnom parametru λ. Pokazati da tada i rješenje x analitički ovisi o tom parametru.

15. Pretpostaviti rješenje diferencijalne jednadžbe $x'' + x = 0$ u obliku reda potencija $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$. Naći dva takva linearno neovisna rješenja i identificirati ih preko elementarnih funkcija.

16. Razvojem u red riješiti sljedeće diferencijalne jednadžbe:
a) $x'' - 2tx' - 4x = 0$,
b) $x'' + (2 - 4t^2)x' - 8tx = 0$.

17. Razvojem u red riješiti sljedeće nehomogene diferencijalne jednadžbe:
a) $x'' + tx' - 4x = 6e^t$,
b) $x'' + 2t^2x' + tx = 2\cos t$.

2. Singularne točke običnih diferencijalnih jednadžbi i Fuchsov teorem

U prethodnoj smo točki vidjeli da je u okolini točke t_0, u kojoj je a analitička funkcija, i rješenje analitičko. Naravno, to ne mora više vrijediti ukoliko se odmaknemo od točke t_0.

Primjer. Pogledajmo jednostavnu jednadžbu $x' + x^2 = 0$, koja ima opće rješenje oblika $x(t) = \frac{1}{t-c}$, pri čemu konstanta c ovisi o početnom uvjetu. To rješenje ima pol prvog reda u točki c. ∎

Poteškoća opisana u gornjem primjeru, promjenjivi singularitet, ne pojavljuje se kod jednadžbi s *čvrstim singularitetima*, koje posebno obuhvaćaju linearne jednadžbe. Naglasimo da su sve promatrane funkcije analitičke na području, osim eventualno u izoliranim točkama.

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2. *Jedine moguće konačne singularne točke rješenja linearne diferencijalne jednadžbe n-tog reda:*

$$x^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + p_0 x = 0 ,$$

čiji su koeficijenti analitičke funkcije (osim u izoliranim točkama gdje imaju singularitete), su singulariteti koeficijenata. ∎

Pogledajmo linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 , \tag{3}$$

gdje su p i q kompleksne funkcije s izoliranim singularitetom u točki t_0, ali su analitičke na području $K \ldots 0 < |t - t_0| < a$. Za svaku točku $t \in K$ postoji rješenje (3), a uz odgovarajući početni uvjet to rješenje je i jedinstveno. Svako se takvo rješenje može produljiti do točke t_0 (osim u samoj točki t_0), koju zovemo *singularnom točkom* gornje jednadžbe.

Primjer. Takve se jednadže prirodno pojavljuju polazeći od jednadžbi oblika $ax''+bx'+cx=0$, dijeleći s a. Singulariteti p i q se nalaze u nultočkama a (ako pritom b i c nisu nula u tim točkama). Pogledajmo poseban slučaj

$$a(t) = a_2(t-t_0)^2 \ , \quad b(t) = b_1(t-t_0) \qquad \text{i} \qquad c(t) = c_0 \ .$$

Postoje dva linearno neovisna rješenja, od kojih je barem jedno oblika $x(t) = (t-t_0)^\mu$. Pokušajmo s tim ansatzom; uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo kvadratnu jednadžbu za μ:

$$a_2\mu(\mu-1) + b_1\mu + c_0 = 0 \ .$$

Ako ta jednadžba ima dva različita rješenja μ, onda nam taj ansatz daje dva linearno neovisna rješenja (i imamo sva ostala rješenja kao njihove linearne kombinacije). Ukoliko ta jednadžba ima dvostruku nultočku, onda imamo samo jedno rješenje $x_1(t) = (t-t_0)^\mu$. Drugo rješenje možemo potražiti u obliku (snižavanje reda!) $x_2 = x_1 w$, i za w dobivamo jednadžbu prvog reda koja za rješenje ima $w(t) = \ln(t-t_0)$, pa je drugo linearno neovisno rješenje u ovom slučaju $x_2(t) = (t-t_0)^\mu \ln(t-t_0)$.
∎

Ukoliko postoje *konačni* limesi

$$\lim_{t\to t_0}(t-t_0)p(t) \qquad \text{i} \qquad \lim_{t\to t_0}(t-t_0)^2 q(t) \ ,$$

onda je t_0 *regularna singularna točka* jednadžbe (3). U protivnom je t_0 *iregularna singularna točka.*

Neka je $p(t) := \frac{1}{t-t_0}P(t)$, a $q(t) := \frac{1}{(t-t_0)^2}Q(t)$. Funkcije P i Q imaju prikaz u obliku Taylorovog reda:

$$P(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t-t_0)^n \ , \quad Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(t-t_0)^n \ .$$

Pretpostavimo rješenje oblika $x(t) = (t-t_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n$, i uzmimo da je $a_0 = 1$ (zbog homogenosti jednadžbe i funkcija x pomnožena proizvoljnom konstantom ponovno je rješenje). Uvrstivši:

$$\begin{aligned}(t-t_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)(t-t_0)^n + (t-t_0)^r P(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(t-t_0)^n \\ + (t-t_0)^r Q(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t-t_0)^n = 0\end{aligned} \tag{4}$$

Uvrštavanjem redova za P i Q i uspoređivanjem, član uz $(t-t_0)^0$ nam daje *indicijalnu (karakterističnu) jednadžbu*

$$r(r-1) + rp_0 + q_0 = 0 \ .$$

Ako su r_1 i r_2 korijeni te jednadžbe, $s := r_1 - r_2$ (tako da je $\mathrm{Re}\, s \geq 0$). Uvrštavanjem $r = r_1$ u (2) dobivamo rekurzivne relacije iz kojih možemo odrediti koeficijente a_n. Tako dobiveno rješenje označimo s x_1.

Ako je $s \notin \mathbf{N}_0$, onda je i na sličan način dobiveno rješenje x_2 (uz $r = r_2$) drugo linearno neovisno rješenje jednadžbe (1).

Ako je $s \in \mathbf{N}_0$, onda s r_2 dobivamo isto rješenje kao i s r_1. Zato drugo linearno neovisno rješenje moramo tražiti preko formule za snižavanje reda: $x = x_1 + \int z(t)\,dt$, odakle za z slijedi jednadžba:

$$z' + \left(\frac{P(t)}{(t-t_0)} + \frac{2x_1'(t)}{x_1(t)}\right) z = 0 \ .$$

Rješenje x_2 se konačno može zapisati u obliku:

$$x_2(t) = x_1(t)\left[\beta \ln(t-t_0) + \varphi_2(t)(t-t_0)^\alpha\right] \ ,$$

gdje je φ_2 analitička funkcija na K.

Teorem 3. (Fuchs) *Nužan i dovoljan uvjet da jednadžba (3) ima elementaran skup rješenja x_1, x_2 (dakle, svako rješenje je linearna kombinacija ta dva rješenja), koja su u okolini singularne točke t_0 opisani kao gore je da je t_0 regularna singularna točka jednadžbe, tj. da p ima najviše pol prvog reda, a q najviše pol drugog reda u točki t_0.*
∎

Zadaci.

1. Dokazati Teorem 2 za jednadžbu drugog reda.

[Naputak: Pogledati u [Tricomi].]

2. Diskutirati singularitete sljedeće jednadžbe, u ovisnosti o konstantama h i k:

$$x'' + \frac{h}{t}x' + \frac{k}{t}x = 0 \; .$$

[Naputak: Potražiti rješenja u obliku t^r.]

3. Točka t_0 je regularna singularna točka jednadžbe prvog reda $bx' + cx = 0$, gdje su b i c analitičke na okolini t_0, ako postoji konačan limes

$$\lim_{t \to t_0} \frac{(t - t_0)c(t)}{b(t)} \; .$$

Pokazati da je za $b(t) := (t - t_0)^2$ i $c(t) := c_0$ točka t_0 iregularna singularna točka, da je rješenje $x(t) = Ae^{-\frac{c_0}{t-t_0}}$, ali da u $t = t_0$ ima bitan singularitet.

4. Uzmimo da p i q imaju najviše pol prvog reda u $t_0 = 0$; njihovi Laurentovi redovi su oblika:

$$p(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} p_n t^n \qquad \text{i} \qquad q(t) = \sum_{n=-1}^{\infty} q_n t^n \; .$$

Uvrstiti Taylorov red za rješenje: $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$ i izjednačiti koeficijente uz iste potencije t. Diskutirati rezultat.

[Dobivamo samo jedno rješenje, osim za $p_{-1} \in \mathbf{N}_0$, kada ne moramo uopće dobiti rješenje.]

5. Riješiti $x'' - \frac{2}{(t-t_0)}x' + \frac{2}{(t-t_0)^2}x = 0$.

6. Riješiti $2t^2x'' + (3t - 2t^2)x' - (t + 1)x = 0$.

7. Riješiti $4tx'' + 2x' + x = 0$.

8. Riješiti $(1 + t)x' - nx = 0$.

9. Riješiti $9t(1 - t)x'' - 12x' + 4x = 0$.

10. Riješiti $2t^2x'' + tx' - (1 + t)x = 0$.

11. Riješiti $t^2x'' + t(3 - t)x' + x = 0$, za $t > 0$.

12. Riješiti $t^2x'' + tx' - (4 + t)x = 0$, za $t > 0$.

3. Picardov teorem

Cauchyjev teorem zahtijeva preveliku regularnost. Matematičari se najčešće pozivaju na Picardov teorem, u kojem se pretpostavlja da je funkcija a neprekinuta po t (taj se uvjet može oslabiti do izmjerivosti) i Lipschitzova po x. Taj se teorem dokazuje s pomoću Banachovog teorema o čvrstoj točki, koji daje i praktičnu metodu za konstrukciju (Picardovih) aproksimacija rješenja. Prisjetimo se da je funkcija *izmjeriva* ako je praslika svakog otvorenog skupa u kodomeni izmjeriv skup u domeni. Posebno je svaka neprekinuta funkcija izmjeriva (ukoliko su topološka struktura i σ-algebra izmjerivih skupova usklađeni, što jest slučaj na $\mathbf{R}^d$).

Spomenimo i to da se pretpostavke na funkciju a mogu još oslabiti, te zahtijevati samo da je funkcija a neprekinuta po $\mathbf{x}$, ali se pritom gubi jedinstvenost. Taj slučaj opisuje Peanov teorem (v. niže).

U daljem koristimo sljedeću oznaku: za $h, r > 0$ valjak visine $2h$ i promjera $2r$ u $\mathbf{R}^{1+d}$ označujemo sa

$$S := \langle t_0 - h, t_0 + h \rangle \times \mathrm{K}[\mathbf{x}_0, r] \; .$$

Uzimamo da je $\mathsf{a} : S \longrightarrow \mathbf{R}^d$ neprekinuta funkcija, omeđena s M (mogli smo pretpostaviti i da je a neprekinuta na zatvaraču S ako su h i r konačni).

Ako je za $T \leqslant h$ funkcija $\mathsf{x} \in \mathrm{C}^1(\langle t_0 - T, t_0 + T\rangle; \mathrm{K}[\mathsf{x}_0, r])$ rješenje (CZ), onda vrijedi ocjena:

$$|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0| = \Big|\int_{t_0}^{t} \mathsf{a}(s, \mathsf{x}(s))ds\Big| \leqslant M|t - t_0| \ ,$$

pa za $|t - t_0| < \frac{r}{M}$ rješenje ostaje u kugli polumjera r oko početnog uvjeta x_0.

Lema 1. *Ako je $T \leqslant \min\{h, \frac{r}{M}\}$, a x C^1 rješenje (CZ) za $|t - t_0| \leqslant T$, onda je $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant r$ za $|t - t_0| \leqslant T$.*

Dem. Definirajmo skup

$$F := \{T' \in [0, T] : (\forall\, t \in [t_0 - T', t_0 + T']) \quad \mathsf{x}(t) \in \mathrm{K}[\mathsf{x}_0, r]\} \ ,$$

koji je očito zatvoren zbog neprekinutosti x i zatvorenosti $\mathrm{K}[\mathsf{x}_0, r]$. Označimo njegov supremum (koji postoji u $\mathbf{R}$) s T_1, i pokažimo da je $T_1 = T$, tj. da je $F = [0, T]$.

U suprotnom, neka je $T_1 < T$, odakle je po definiciji F:

$$(\forall\, t \in \langle t_0 - T_1, t_0 + T_1\rangle)\ |\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant T_1 M < r \ .$$

Zbog neprekinutosti x je tada i neka okolina točaka $\pm T_1$ u F, pa je $T_1 < \sup F$, protivno pretpostavci.

Q.E.D.

Teorem 4. **(Picard)** *Neka je a neprekinuta i omeđena s M na S, te Lipschitzova po drugoj varijabli:*

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, t \in \langle t_0 - h, t_0 + h\rangle)(\forall\, \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathrm{K}[\mathsf{x}_0, r]) \quad |\mathsf{a}(t, \mathsf{x}) - \mathsf{a}(t, \mathsf{y})| \leqslant C|\mathsf{x} - \mathsf{y}| \ .$$

Tada (CZ) ima jedinstveno C^1 rješenje barem na $\langle t_0 - T, t_0 + T\rangle$, za svaki $T \leqslant \min\{h, \frac{r}{M}\}$.

Dem. Rješenje konstruiramo koristeći *Picardove sukcesivne aproksimacije*, to jest polazimo od x_0 i induktivno rješavamo Cauchyjeve zadaće:

$$\begin{cases} \mathsf{x}_k'(t) = \mathsf{a}(t, \mathsf{x}_{k-1}(t)) \\ \mathsf{x}_k(t_0) = \mathsf{x}_0 \ . \end{cases}$$

Naravno, takvu Cauchyjevu zadaću lako rješavamo integriranjem:

$$\mathsf{x}_k(t) = \mathsf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{a}(s, \mathsf{x}_{k-1}(s))ds \ , \tag{5}$$

za $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$. Da bi a bila dobro definirana, treba dokazati da je $|\mathsf{x}_k(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant r$ na segmentu $[t_0 - T, t_0 + T]$. Induktivno (baza je očigledna) iz gornje jednakosti zaključujemo da je

$$|\mathsf{x}_k(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant \int_{t_0}^{t} |\mathsf{a}(s, \mathsf{x}_{k-1}(s))|ds \leqslant |t - t_0|M \leqslant TM \leqslant r \ .$$

Pokažimo da je (x_k) Cauchyjev niz u prostoru $\mathrm{C}[t_0 - T, t_0 + T]$. Iz (5) dobivamo

$$|\mathsf{x}_k(t) - \mathsf{x}_{k-1}(t)| \leqslant \Big|\int_{t_0}^{t} \Big(\mathsf{a}(s, \mathsf{x}_{k-1}(s)) - \mathsf{a}(s, \mathsf{x}_{k-2}(s))\Big)ds\Big| \leqslant C\int_{t_0}^{t} \Big|\mathsf{x}_{k-1}(s) - \mathsf{x}_{k-2}(s)\Big|ds \ .$$

Kako je $|\mathsf{x}_1(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant M|t - t_0|$, to je indukcijom i

$$|\mathsf{x}_k(t) - \mathsf{x}_{k-1}(t)| \leqslant MC^{k-1}\frac{|t - t_0|^k}{k!} \leqslant \frac{M}{C}\frac{(CT)^k}{k!} \ .$$

Poznato je da je
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(CT)^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(CT)^k}{k!} = e^{CT} < \infty \;,$$
pa je niz $\mathsf{x}_k = \mathsf{x}_k - \mathsf{x}_{k-1} + \mathsf{x}_{k-1} - \cdots + \mathsf{x}_1 - \mathsf{x}_0$ Cauchyjev, i stoga jednoliko konvergira zbog potpunosti prostora $\mathrm{C}[t_0 - T, t_0 + T]$ nekom limesu x, koji je neprekinuta funkcija na $[t_0 - T, t_0 + T]$, takva da je $|\mathsf{x}(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant r$ na tom segmentu (limes niza ostaje u kugli koja sadrži niz), te vrijedi
$$\mathsf{x}(t) = \mathsf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathsf{a}(s, \mathsf{x}(s))ds \;.$$
Stoga je taj limes i klase C^1, te rješava Cauchyjevu zadaću.

Kako bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da je $\tilde{\mathsf{x}}$ drugo takvo rješenje, te pogledajmo razliku:
$$\mathsf{x}(t) - \tilde{\mathsf{x}}(t) = \int_{t_0}^{t} \Big(\mathsf{a}(s, \mathsf{x}(s)) - \mathsf{a}(s, \tilde{\mathsf{x}}(s))\Big)ds \;.$$
Stoga je $|\mathsf{x}(t) - \tilde{\mathsf{x}}(t)| \leqslant 2M|t - t_0|$, pa je (zaključak slijedi kao i za $\mathsf{x}_k - \mathsf{x}_{k-1}$ gore)
$$|\mathsf{x}(t) - \tilde{\mathsf{x}}(t)| \leqslant \frac{2M}{C} \frac{(CT)^k}{k!} \;.$$
Na limesu $k \longrightarrow \infty$ dobivamo da je $\mathsf{x} = \tilde{\mathsf{x}}$.

Q.E.D.

▲ Može li se jedinstvenost zaključiti s pomoću Gronwallove leme? ∎

Korolar 1. *Uz pretpostavke prethodnog teorema, označimo rješenje* x *za dani početni uvjet* y *s* $\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y})$. *Tada ta zadaća ima jedinstveno rješenje za* $|t - t_0| \leqslant h$ *i* $M|t - t_0| + |\mathsf{y} - \mathsf{x}_0| \leqslant r$, *te vrijedi:*
$$|\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z})| \leqslant e^{C|t-t_0|}|\mathsf{y} - \mathsf{z}| \;,$$
za $|t - t_0| \leqslant h$ *i* $M|t - t_0| + \max\{|\mathsf{y} - \mathsf{x}_0|, |\mathsf{z} - \mathsf{x}_0|\} \leqslant r$.

Dem. Postojanje rješenja slijedi iz prethodnog teorema i nejednakosti trokuta.

Kako bismo pokazali jedinstvenost, označimo $R(t) := |\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z})|$; imamo da je:
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(R^2(t)\Big) &= \Big(\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z})\Big) \cdot \frac{d}{dt}\Big(\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z})\Big) \\ &= \Big(\boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y}) - \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z})\Big) \cdot \Big(\mathsf{a}(t, \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{y})) - \mathsf{a}(t, \boldsymbol{\varphi}(t; \mathsf{z}))\Big) \;, \end{aligned}$$
pa je
$$\left|\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(R^2(t)\Big)\right| \leqslant C\Big(R^2(t)\Big) \;,$$
odakle lako zaključujemo da je $|R'| \leqslant CR$, što separiranjem i integriranjem vodi na nejednakost:
$$R(t) \leqslant e^{C|t-t_0|}R(t_0) \;,$$
a što je upravo (5). Uzimanjem $\mathsf{y} = \mathsf{z}$ slijedi jedinstvenost.

Q.E.D.

Napomenimo da prethodni korolar uz ograničenje da je $t \geqslant t_0$ vrijedi i ako Lipschitzov uvjet zamijenimo slabijim:
$$(\mathsf{y} - \mathsf{z}) \cdot \Big(\mathsf{a}(t, \mathsf{y}) - \mathsf{a}(t, \mathsf{z})\Big) \leqslant C|\mathsf{y} - \mathsf{z}|^2 \;.$$
U jednodimenzionalnom slučaju to se svodi na jednostrani Lipschitzov uvjet
$$z \leqslant y \quad \Longrightarrow \quad a(t, y) - a(t, z) \leqslant C(y - z) \;.$$

▲ Moguće je rješavanje diferencijalnih nejednakosti. ∎

Korolar 2. *Ako je* $\mathbf{A} \in \mathrm{C}([t_0 - h, t_0 + h]; \mathrm{M}_{d\times d})$, *onda Cauchyjeva zadaća*

$$\begin{cases} \mathsf{x}' = \mathbf{A}\mathsf{x} \\ \mathsf{x}(t_0) = \mathsf{x}_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje na čitavom intervalu $[t_0 - h, t_0 + h]$, *te je štoviše* $\mathsf{x}(t) = \mathbf{F}(t)\mathsf{x}_0$, *pri čemu elementarno rješenje* $\mathbf{F}$ *rješava sljedeću Cauchyjevu zadaću*

$$\begin{cases} \mathbf{F}' = \mathbf{A}\mathbf{F} \\ \mathbf{F}(t_0) = \mathbf{I}\ . \end{cases}$$

Ako je $|\mathbf{A}(t)| \leqslant M$ *za neku konstantu* M *na tom intervalu, onda vrijedi*

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}| &\leqslant e^{|t-t_0|M} \\ |\mathbf{F}^{-1}| &\leqslant \mathbf{I} \\ \det \mathbf{F}(t) &= e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}\mathbf{A}(s)\,ds}\ . \end{aligned}$$

∎

Korolar 3. *Neka je* $\mathsf{a} : S \longrightarrow \mathbf{R}^d$ *neprekinuta funkcija omeđena s* M *(kao i dosad), te k tome neka je* $\nabla_{\mathsf{x}}\mathsf{a}$ *neprekinuta na* S. *Tada je rješenje* $\boldsymbol{\varphi}$ *Cauchyjeve zadaće is Korolara 1 klase* C^1 *za* $|t - t_0| \leqslant h$ *i* $|t - t_0|M + |\mathsf{y} - \mathsf{x}_0| \leqslant r$, *te Jacobijeva matrica* $\mathbf{J} := \nabla_{\mathsf{y}}\boldsymbol{\varphi}$ *zadovoljava:*

$$\begin{cases} \mathbf{J}' = \nabla_{\mathsf{x}}\mathsf{a}\Big(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \mathsf{y})\Big)\mathbf{J}(t, \mathsf{y}) \\ \mathbf{J}(t_0, \mathsf{y})\mathbf{I}\ . \end{cases}$$

Posebno je

$$\det \mathbf{J}(t, \mathsf{y}) = e^{\int_{t_0}^t \mathrm{tr}\nabla_{\mathsf{x}}\mathsf{a}(s,\boldsymbol{\varphi}(s,\mathsf{y}))ds}.$$

∎

Zadaci.

1. Koristeći Picardov teorem, dokazati Cauchyjev.
[Naputak: Radi jednostavnosti uzmimo da je $d = 1$. Po pretpostavci se a može razviti u konvergentan red potencija za $|t - t_0| < h'$ i $|x - x_0| < r'$, a isto vrijedi i za $\partial_x a$. Stoga su za svaki $h < h'$ i $r < r'$ funkcije $|a|$ i $|\partial_x a|$ neprekinute na kompaktu $D := [t_0 - h, t_0 + h] \times [x_0 - r, x_0 + r]$, pa su omeđene s M i K; K je Lipschitzova konstanta za a (u varijabli x) na D, pa možemo primijeniti Picardove sukcesivne aproksimacije.

Nije teško provjeriti da je jednoliki limes aproksimacija u ovom slučaju i analitička funkcija, što daje tvrdnju Cauchyjevog teorema.]

2. Neka su p i q neprekinute funkcije na $[0, l]$.

a) Zamjenom $u(x) = y(x)e^{-\frac{1}{2}\int_0^x p(\xi)\,d\xi}$ svesti jednadžbu

$$u'' + pu' + qu = 0 \tag{$*$}$$

na kanonski oblik $y'' + Ay = 0$.

b) Množenjem jednadžbe $(*)$ s $a(x) := e^{\int_0^x p(\xi)\,d\xi}$ svesti je na *Sturm-Liouvilleov* oblik $(au')' - bu = 0$.

3. Napisati sljedeće jednadžbe u kanonskom i Sturm-Liouvilleovom obliku:

a) $x^2u'' + xu' + (x^2 - n^2)u = 0$.
b) $u'' + (\mathrm{ctg}x)u' + u = 0$.
c) $(1 - x^2)u'' - 2xu' + n(n + 1)u = 0$.
d) $u'' + p(x)u = 0$.

4. Naći opće rješenje jednadžbe $u''' + 2u'' - u' - 2u = xe^{-x}$. Postoji li partikularno rješenje u_p ove jednadžbe za koje vrijedi: $\lim_{x\leftarrow\infty} u_p(x)$ je konačan, $u_p(0) = 0$ i $u_p'(0) = 0$?

5. Odrediti partikularno rješenje u_p jednadžbe $u^{(4)} + 2u'' - 3u = 10$ koje je parna funkcija i $u_p(0) = u_p''(0) = 0$.

6. Integrirati jednadžbu $9x\sqrt[3]{x}y'' + 6\sqrt[3]{x}y' - y = 0$ i odrediti rješenje čiji je graf simetričan s obzirom na y os i prolazi kroz točku $(0,1)$. [zamjena: $x = t^3$]

7. Postoji li rješenje jednadžbe $x^2u'' + 4xu' + 2u = x$ koje je ograničeno u nuli?

8. Neka je S operator na linearnom prostoru realnih neprekinutih funkcija zadan s $Sf(x) := \int_0^x f(\xi)\,d\xi$. Odrediti lijevi inverz operatora S i dokazati da je simboličko rješenje diferencijalne jednadžbe $y' - y = f$ dano formulom $y = (1 + S + S^2 + \cdots)(Sf + C)$, pri čemu je C proizvoljna konstanta. Provjeriti da li vrijedi:

$$(S + S^2 + S^3 + \cdots)f(x) = e^x \int_0^x e^{-\xi} f(\xi)\,d\xi\ .$$

9. a) Naći nužne i dovoljne uvjete na neprekinute realne funkcije a i f na $[0,T]$ da bi za rješenje u Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = a(t)u(t) + f(t) \\ u(0) = v \end{cases}$$

vrijedilo: $v \geqslant 0 \Longrightarrow (\forall\, t \in [0,T])\ u(t) \geqslant 0$.

b*) Pokušati odrediti nužne i dovoljne uvjete na neprekinute funkcije $\mathbf{A} : [0,T] \longrightarrow \mathrm{M}_{d\times d}$ i $\mathsf{f} : [0,T] \longrightarrow \mathbf{R}^d$ da bi za rješenje u Cauchyjeve zadaće

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathsf{u}}{dt}(t) = \mathbf{A}(t)\mathsf{u}(t) + \mathsf{f}(t) \\ \mathsf{u}(0) = \mathsf{v} \end{cases}$$

vrijedilo: $\mathsf{v} \geqslant \mathsf{0} \Longrightarrow (\forall\, t \in [0,T])\ \mathsf{u}(t) \geqslant \mathsf{0}$. (Kažemo da je $\mathsf{v} \geqslant \mathsf{0}$ ako za svako $i = 1, \ldots, d$ vrijedi $v_i \geqslant 0$. Pretpostavljamo da je T takav da rješenje postoji na $[0,T]$)

[Pokušajte odrediti nužne i dovoljne uvjete na $\mathbf{A}$ i f odvojeno, pretpostavljajući da je, na primjer, $\mathsf{f} = \mathsf{0}$, a $\mathbf{A} \geqslant 0$]

4. Obične diferencijalne jednadžbe uz pretpostavku neprekinutosti

Teorem 5. *(**Peano**) Ako je funkcija a neprekinuta i omeđena s konstantom M na S, onda (CZ) ima barem jedno rješenje klase C^1 na intervalu $|t - t_0| \leqslant T$, za neki $T \leqslant \min\{h, \frac{r}{M}\}$.*

Dem. Najprije proširimo funkciju a na $[t_0 - h, t_0 + h] \times \mathbf{R}^d$, tako da van kugle $\mathrm{K}[\mathbf{x}_0, r]$ stavimo da je a radijalno proširena sa sfere:

$$\mathsf{a}(t, \mathbf{x}) := \mathsf{a}(t, \mathbf{x}_0 + r\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|})\ ,$$

za $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| > r$.

Regularizacijom funkcije a po varijabli $\mathbf{x}$, koristeći standardni regularizator, dobivamo niz funkcija $\mathsf{a}_n \in \mathrm{C}([t_0 - h, t_0 + h]; \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d))$, takav da $\mathsf{a}_n \rightrightarrows \mathsf{a}$ na S, te je $|\mathsf{a}| \leqslant M$. Po Picardovom teoremu Cauchyjeva zadaća

$$\begin{cases} \mathsf{x}_n' = \mathsf{a}_n(\cdot, \mathsf{x}_n) \\ \mathsf{x}_n(t_0) = \mathsf{x}_0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje na $|t - t_0| \leqslant T$, za koje vrijedi $|\mathsf{x}_n(t) - \mathsf{x}_0| \leqslant r$ i $|\mathsf{x}_n'| \leqslant M$, pa taj niz ima jednoliko konvergentan podniz (po Arzelà-Ascolijevom teoremu), $\mathsf{x}_n \rightrightarrows \mathsf{x}$, te vrijedi

$$\mathsf{x}_n' = \mathsf{a}_n(\cdot, \mathsf{x}_n) \rightrightarrows \mathsf{a}(\cdot, \mathsf{x})\ ,$$

pa je i to gomilište x rješenje Cauchyjeve zadaće.

Q.E.D.

5. Rezultati uz izmjerivost

Lema 2. **(Gronwall)** *Ako je* $w : \langle 0, T\rangle \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ *izmjeriva i omeđena funkcija (dakle,* $w \in \mathrm{L}^\infty(\langle 0, T\rangle; \mathbf{R}_0^+)$*), te za neku konstantu* $M \in \mathbf{R}_0^+$ *i funkciju* $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0, T\rangle; \mathbf{R}_0^+)$ *vrijedi nejednakost:*

$$w(t) \leqslant M + \int_0^t p(s)w(s)\,ds \qquad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\ ,$$

onda w *zadovoljava i precizniju nejednakost:*

$$w(t) \leqslant M e^{\int_0^t p(s)\,ds} \qquad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\ .$$

Dem. Najprije pokažimo da za funkciju $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0, T\rangle)$ za svako $t \in \langle 0, T\rangle$ vrijedi jednakost:

$$\int_0^t p(s)e^{\int_0^s p(\sigma)\,d\sigma} ds = e^{\int_0^t p(s)\,ds} - 1 \qquad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\ . \tag{6}$$

Ukoliko je p neprekinuta funkcija, onda je formulom $q(t) := e^{\int_0^t p(s)\,ds}$ definirana funkcija klase C^1 na $\langle 0, T\rangle$. Za njezinu derivaciju vrijedi:

$$q'(t) = \frac{d}{dt}\left(e^{\int_0^t p(s)\,ds}\right) = p(t)e^{\int_0^t p(s)\,ds}\ ,$$

odakle primjenom Newton-Leibnitzove formule $\int_0^t q'(s)\,ds = q(t) - q(0)$ slijedi tvrdnja.

Uzmimo sada funkciju $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0, T\rangle)$, te je aproksimirajmo nizom neprekinutih funkcija $p_n \longrightarrow p$ u prostoru $\mathrm{L}^1(\langle 0, T\rangle)$. Po prethodnom, $q_n(t) := e^{\int_0^t p_n(s)\,ds}$ je funkcija klase C^1; k tome, $q_n \rightrightarrows q$ (što nije teško pokazati). Zbog toga u formuli

$$\int_0^t p_n(s)q_n(s)ds = q_n(s) - 1$$

možemo prijeći na limes po $n \longrightarrow \infty$, te dobivamo da (6) vrijedi i za $p \in \mathrm{L}^1(\langle 0, T\rangle)$.

Prijeđimo na dokaz tvrdnje teorema. Kako je w omeđena funkcija, to postoji (jer je $\int p \geqslant 0$) $C \in \mathbf{R}^p$ takva da je

$$w(t) \leqslant Ce^{\int_0^t p(s)\,ds} \qquad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\ .$$

Ako je taj $C \leqslant M$, tvrdnja je dokazana.

Pogledajmo skup svih valjanih konstanti C za gornju nejednakost. Lako se vidi da je infimum tog skupa ponovno valjana konstanta (jer nejednakost nije stroga). Pokažimo još da ako je $C > M$, da onda postoji i bolja ocjena s $C' < C$, odakle će slijediti tvrdnja.

Zaista, iz pretpostavke imamo da je

$$\begin{aligned} w(t) &\leqslant M + \int_0^t p(s)Ce^{\int_0^s p(\sigma)\,d\sigma}\,ds \\ &= M + Ce^{\int_0^t p(s)\,ds} - C \leqslant C'e^{\int_0^t p(s)\,ds}\ , \end{aligned}$$

pri čemu je $C' < C$ izračunat iz sljedeće jednadžbe:

$$C - C' = (C - M)e^{-\int_0^T p(s)\,ds}\ .$$

Q.E.D.

Najprije definirajmo pojam *Carathéodoryjeve* funkcije, izmjerive po prvoj, i neprekinute po drugoj varijabli. Posebno je svaka neprekinuta funkcija Carathéodoryjeva.

Rezultat Peanovog teorema možemo dobiti za širu klasu funkcija. Neka je $\mathsf{f} : S \to \mathbf{R}^d$ izmjeriva funkcija, gdje je

$$S = \langle t_0 - a, t_0 + a\rangle \times \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b) \subseteq \mathbf{R}^{1+d}.$$

Želimo riješiti Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathsf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \tag{7}$$

na nekoj okolini t_0, te pretpostavljamo ograničenje $|\mathsf{f}(t, \mathbf{x})| \leqslant M(t)$ (ss t), $\mathbf{x} \in \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b)$, za neku funkciju $M \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R})$. Proširimo li f nulom van S, pretpostavke će biti ispunjenje na čitavom $\mathbf{R}^{1+d}$, te stoga bez smanjenja općenitosti možemo promatrati $S = \mathbf{R} \times \mathrm{K}(\mathbf{x}_0, b)$.

Funkciju $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}_0^+)$ takvu da je $\operatorname{supp} \rho \subseteq \mathrm{K}(\mathbf{0}, 1))$ i $\int_{\mathbf{R}^d} \rho = 1$ nazivamo izglađivačem. Tom nazivu je porijeklo u tome što pri konvoluciji neke proizvoljne funkcije $\psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^d)$ s ρ:

$$\psi_\rho(\mathbf{x}) = (\psi * \rho)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \psi(\mathbf{x} - \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,,$$

dobivamo $\psi_\rho \in \mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d)$, jer derivacije parcijalnom integracijom prelaze na ρ u integralu. Izglađivači će biti često korišteni u sljedećem poglavlju.

Promatramo, za neki $\varepsilon > 0$, regularizaciju (izglađenje) funkcije f

$$\mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbf{R}^d} \mathsf{f}(t, \mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{y})\rho(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}\,,$$

za koju, što se lako vidi, vrijedi ista ograda $|\mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leqslant M(t)$ (ss t), $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$. Za tako dobivenu f_ε imamo da je funkcija $t \mapsto \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}(t))$ integrabilna za svaku neprekinutu funkciju $\mathbf{x}$, te pritom zadovoljava ocjenu:

$$|\nabla_{\mathbf{x}} \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x})| \leqslant \frac{CM(t)}{\varepsilon}\,,$$

pri čemu je

$$C = \int |\nabla_{\mathbf{y}} \rho|\, d\mathbf{y}\,.$$

Uzmimo fiksan $\varepsilon > 0$. Prethodne ocjene nam omogućuje da, za T takav da je

$$C \int_{-T}^{T} M(t) dt < \varepsilon\,,$$

riješimo integralnu jednadžbu na $[-T, T]$:

$$\mathbf{x}_\varepsilon(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathsf{f}_\varepsilon(s, \mathbf{x}_\varepsilon(s)) ds\,, \tag{8}$$

koja je, zasad formalno, ekvivalentna Cauchyjevoj zadaći (8) ukoliko funkciju f zamijenimo s izgladjenjem f_ε. Rješenje tražimo pomoću uzastopnih aproksimacija

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^k(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathsf{f}_\varepsilon(s, \mathbf{x}^{k-1}(s)) ds, \\ \mathbf{x}^0(t) &= \mathbf{x}_0. \end{aligned}$$

Za taj niz jednostavno se dobije ocijena

$$|\mathbf{x}^k(t) - \mathbf{x}^{k-1}(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{C} \left(\frac{C \int_{-T}^{T} M(s) ds}{\varepsilon} \right)^k\,,$$

iz čega, kako je

$$\mathbf{x}^k(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\mathbf{x}^i(t) - \mathbf{x}^{i-1}(t)\right) ,$$

slijedi da $\mathbf{x}^k$ ima uniformni limes $\mathbf{x}_\varepsilon$ (kad $k \to \infty$) koji zadovoljava integralnu jednadžbu (8). Stoga je $\mathbf{x}_\varepsilon$ apsolutno neprekinuta za $|t| \leqslant T$ i vrijedi $\dot{\mathbf{x}}_\varepsilon(t) = \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t))$ skoro svuda. Budući da su realne vrijednosti $\mathbf{x}_\varepsilon(\pm T)$ dobro definirane, to možemo rješavati integralne jednadžbe s njima kao početnim uvijetima dok ne dobijemo $\mathbf{x}_\varepsilon(t)$ za $|t| < a$, za koji vrijedi

$$|\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{x}_0| \leqslant \int_{-a}^{a} M(s) ds \,,$$
$$|\dot{\mathbf{x}}_\varepsilon(t)| \leqslant M(t)$$

za skoro svaki $t \in \langle -a, a\rangle$. Kad bisno dobili da postoji $a_0 < a$ takav da je $\mathbf{x}_\varepsilon$ definiran samo za $t < a_0$, imali bismo omeđenu apsolutno neprekinutu funkciju $\mathbf{x}_\varepsilon$ koju bi bilo moguće dodefinirati i na rubu za $t = a_0$. Ponavljanjem prethodnog argumenta dolazimo do tražene funkcije $\mathbf{x}_\varepsilon$ definirane na $\langle -a, a\rangle$.

Uočimo da su ocjene dobivene za $\mathbf{x}_\varepsilon$ neovisne o ε, pa ćemo dobiti iste ocjene jednoliko na $(\mathbf{x}_\varepsilon)_{\varepsilon \in K}$ kad je $K \subseteq \mathbf{R}^+$.

Dakle, $(\mathbf{x}_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{R}^+}$ je uniformno ograničen i ekvineprekidan, iz čega nam po Arzelá-Ascolijevom teoremu slijedi pretkompaktnost. Za neko gomilište $\mathbf{x}$ dobiveno kao limes funkcija $\mathbf{x}_{\varepsilon_k}$ gdje je (ε_k) niz pozitivnih brojeva koji teži u nulu, imamo da je neprekidna funkcija. Stoga je dobro je definirana derivacija $\dot{\mathbf{x}}$ u smislu teorije distribucija. Za test funkciju $\boldsymbol{\psi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}; \mathbf{R}^d)$ dobivamo

$$|\langle \dot{\mathbf{x}}_{\varepsilon_k}, \boldsymbol{\psi}\rangle| \leqslant \int M|\boldsymbol{\psi}| dt \,,$$

što na limesu povlači

$$|\langle \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\psi}\rangle| \leqslant \int M|\boldsymbol{\psi}| dt \,,$$

iz čega zaključujemo da je $\dot{\mathbf{x}} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^d)$, i da mu je norma manja od M skoro svuda.

Postavlja se pitanje na koji način takav $\mathbf{x}$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu. Kad bi f bila Carathéodoryjeva, tada bismo imali $\mathsf{f}_\varepsilon \to \mathsf{f}$ po točkama, za $\varepsilon \searrow 0$ na S, što opet daje jedno proširenje Peanovog teorema.

Prije nego li nastavimo s daljnjim razmatranjem, primijetimo da je za svaku izmjerivu funkciju $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ i $\operatorname{vrai\,sup}_y f(\cdot, y) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ izmjeriva funkcija. To slijedi iz Fubinijevog teorema tako da primijetimo da je

$$e^{\operatorname{vrai\,sup}_y f(\cdot,y)} = \left\| e^{f(\cdot,y)} \right\|_\infty ,$$

odnosno imamo da je

$$\operatorname{vrai\,sup} f(\cdot, y) = \ln \| e^{f(\cdot,y)} \|_\infty \,,$$

a $\| \cdot \|_\infty$ je izmjeriva funkcija.

Definirajmo funkciju

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \lim_{\delta \searrow 0} \operatorname*{vrai\,sup}_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta} \mathsf{f}(t, \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\xi} \,,$$

za koju se lako vidi da je konveksna i pozitivno homogena po $\boldsymbol{\xi}$, pa po [Hö2, Theorem 5] zaključujemo da je podupiruća za neki zatvoren konveksan podskup $\mathbf{R}^d$ koji je pridružen $(t, \mathbf{x})$, i kojeg označimo s $F(t, \mathbf{x})$; odnosno vrijedi

$$H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sup_{\mathbf{y} \in F(t, \mathbf{x})} \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\xi} \,.$$

Budući da je $H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ odozgo poluneprekinuta funkcija u $\mathbf{x}$, to je $F(t, \mathbf{x})$ odozgo poluneprekinuta skupovna funkcija po $\mathbf{x}$. Čak i više, $F(t, \mathbf{x})$ je najmanji zatvoren konveksan skup takav da svaka njegova okolina sadrži skoro svaki $\mathsf{f}(t, \mathbf{y})$ za $\mathbf{y}$ iz neke okoline točke $\mathbf{x}$.

Pogledajmo funkciju $\mathbf{x}_\varepsilon$ u nekim točkama $t_1, t_2 \in \langle -a, a\rangle$, pri čemu je $t_1 \leqslant t_2$

$$(\mathbf{x}_\varepsilon(t_2) - \mathbf{x}_\varepsilon(t_1)) \cdot \boldsymbol{\xi} = \int_{t_1}^{t_2} \mathsf{f}_\varepsilon(t, \mathbf{x}_\varepsilon(t)) \cdot \boldsymbol{\xi}\, dt\,.$$

Za neki $\delta > 0$ odaberimo ε takav da vrijedi $\varepsilon + |\mathbf{x}_\varepsilon(t) - \mathbf{x}(t)| < \delta$, što je moguće, jer $\mathbf{x}_{\varepsilon_k} \to \mathbf{x}$. Tada lako dolazimo do ocjene

$$(\mathbf{x}_\varepsilon(t_2) - \mathbf{x}_\varepsilon(t_1)) \cdot \boldsymbol{\xi} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \operatorname*{vrai\,sup}_{|y-\mathbf{x}(t)|<\delta} \mathsf{f}_\varepsilon(t, y) \cdot \boldsymbol{\xi}\, dt\,,$$

što s obzirom da je vrai sup izmjeriva funkcija, u limesu $\varepsilon \searrow 0$, a potom i $\delta \searrow 0$, daje

$$(\mathbf{x}(t_2) - \mathbf{x}(t_1)) \cdot \boldsymbol{\xi} \leqslant \int_{t_1}^{t_2} H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dt\,,$$

odnosno u točkama gdje $\mathbf{x}$ ima derivaciju $\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\boldsymbol{\xi} \leqslant H(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$, što opet povlači da je $\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(t, \mathbf{x})$.

Iz izlaganja zaključujemo da vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 6. *Uz pretpostavke s početka poglavlja Cauchyjeva zadaća* (7) *ima rješenje u smislu da je $\dot{\mathbf{x}}(t) \in F(t, \mathbf{x})$, gdje je $F(t, \mathbf{x})$ najmanji zatvoren konveksan skup takav da svaka njegova okolina sadrži skoro svaki $\mathsf{f}(t, \mathbf{y})$ za $\mathbf{y}$ iz neke okoline od $\mathbf{x}$.* ∎

Što nam konkretno daje ovaj teorem?

Pretpostavimo da je $\mathsf{f} : \mathbf{R}^{1+d} \to \mathbf{R}^d$ funkcija neprekinuto diferencijabilna na zatvaraču svake strane neke glatke C^1 plohe P na kojoj f ima prekid prve vrste. S Ω_+ odnosno Ω_- označimo te otvorene skupove, a s f_- i f_+ limese funkcije f na plohi P iz Ω_+ i Ω_-. Pretpostavimo dalje da su za rubne vrijednosti (vektore) f_- i f_+ s obje strane plohe vektorska polja $(1, \mathsf{f}_\pm)$ transverzalna (normalna komponenta je različita od nule) na P. Ako su oba polja usmjerena na istu stranu plohe, tada će integralne krivulje prolaziti kroz nju. Nadalje, ako su usmjerena na stranu različitu od one na kojoj su definirana, vektori $(1, \mathsf{f}_\pm)$ su usmjereni prema skupovima $\Omega_\mp$, tada integralne krivulje ostaju u plohi P kao integralne krivulje jednadžbe

$$\dot{\mathbf{x}} = \lambda \mathsf{f}_+ + (1-\lambda)\mathsf{f}_-\,,$$

gdje je $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ odabran tako da je $(1, \lambda\mathsf{f}_+ + (1-\lambda)\mathsf{f}_-)$ tangencijalan na P, i na kraju ako su usmjereni od P, integralne krivulje mogu teći kroz P do neke točke u kojoj napuštaju plohu, te idu na neku stranu kao standarna integralna krivulja.

Dokažimo sada teorem jedinstvenosti koji će u skalarnom slučaju dopuštati negativne skokove funkcije f.

Teorem 7. *Ako uz pretpostavke prethodnog teorema, za $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^d$ te $t \in [t_0 - a, t_0 + a]$ vrijedi i*

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot (\mathsf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathsf{f}(t, \mathbf{z})) \leqslant C|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2\,, \tag{9}$$

tada obična diferencijalna jednadžba (7_1)*, s početnim uvjetom $\mathbf{x}(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, ima jedinstveno rješenje $\mathbf{x}(t, \mathbf{y})$, te za $t \in [t_0, t_0 + a]$ vrijedi*

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{z})| \leqslant e^{C(t-t_0)}|\mathbf{y} - \mathbf{z}|\,. \tag{10}$$

Dem. Najprije primijetimo da za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$(a+b)^2 \leqslant (1+\varepsilon)a^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon})b^2\,.$$

Neka su $\varepsilon, \delta > 0$, $|\mathbf{y}' - \mathbf{y}| < \delta$ i $|\mathbf{z}' - \mathbf{z}| < \delta$. Tada po (9) vrijedi

$$\begin{aligned}(\mathbf{y}' - \mathbf{z}') \cdot (\mathsf{f}(t, \mathbf{y}') - \mathsf{f}(t, \mathbf{z}')) &\leqslant C|\mathbf{y}' - \mathbf{z}'|^2 \\ &\leqslant C((1+\varepsilon)|\mathbf{y} - \mathbf{z}|^2 + (1 + \tfrac{1}{\varepsilon})4\delta^2)\,,\end{aligned}$$

odnosno

$$(\mathbf{y}-\mathbf{z})\cdot(\mathsf{f}(t,\mathbf{y}')-\mathsf{f}(t,\mathbf{z}')) \leqslant C((1+\varepsilon)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2+(1+\tfrac{1}{\varepsilon})4\delta^2)+4\delta M(t).$$

U limesu kad $\delta \searrow 0$ zaključujemo da za $Y \in F(t,\mathbf{y})$ i $Z \in F(t,\mathbf{z})$ vrijedi

$$(\mathbf{y}-\mathbf{z})\cdot(Y-Z) \leqslant C(1+\varepsilon)|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2\,,$$

iz čega u limesu kad $\varepsilon \searrow 0$ slijedi

$$(\mathbf{y}-\mathbf{z})(Y-Z) \leqslant C|\mathbf{y}-\mathbf{z}|^2\,.$$

Neka $\mathbf{x}(t,\mathbf{y})$ označava rješenje za početni $\mathbf{y}$. Ako pokažemo (10) jedinstvenost rješena će slijediti iz $\mathbf{y}=\mathbf{z}$. Definirajmo

$$R(t) = |\mathbf{x}(t,\mathbf{y})-\mathbf{x}(t,\mathbf{z})|\,.$$

Za skoro svaki t imamo:

$$\begin{aligned} R(t)\frac{d}{dt}R(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}R^2(t) \\ &= (\mathbf{x}(t,\mathbf{y})-\mathbf{x}(t,\mathbf{y}))\cdot(\dot{\mathbf{x}}(t,\mathbf{y})-\dot{\mathbf{x}}(t,\mathbf{y})) \\ &= (\mathbf{x}(t,\mathbf{y})-\mathbf{x}(t,\mathbf{y}))\cdot(Y-Z)\,, \end{aligned}$$

gdje su $Y \in F(t,\mathbf{y})$ i $Z \in F(t,\mathbf{z})$, što upravo povlači

$$R(t)\frac{d}{dt}R(t) \leqslant CR^2(t)\,,$$

odnosno skoro svuda tamo gdje $R(t) \neq 0$ imamo

$$\frac{d}{dt}R(t) \leqslant CR(t)\,,$$

što konačno daje

$$R(t) \leqslant e^{C(t-t_0)}R(t_0)$$

za $t \in [t_0, t_0+a]$

Q.E.D.

Zadaci.

1. Neka je φ ograničena nenegativna funkcija na $[0,T]$ koja zadovoljava:

$$\varphi(t) \leqslant a + b\int_0^t \varphi^2(s)\,ds, \qquad t \in [0,T].$$

Koju gornju ocjenu za φ povlači ta nejednakost? Naći $a, b, T > 0$ za koje možete konstruirati niz takvih funkcija φ s L^∞ normom koja teži prema beskonačnosti.

2. a) Za funkciju $\mathsf{f} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$ definiramo funkciju $\omega : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \bar{\mathbf{R}}$, *modul neprekinutosti:*

$$\omega(\delta) := \sup\{|\mathsf{f}(\mathbf{x})-\mathsf{f}(\mathbf{y})| : \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbf{R}^d \;\&\; |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leqslant \delta\}\,.$$

Ako modul neprekinutosti ω funkcije f zadovoljava za neki $M \in \mathbf{R}^+$

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_\varepsilon^M \frac{1}{\omega(\delta)}\,d\delta = \infty\,,$$

onda Cauchyjeva zadaća za diferencijalnu jednadžbu $\dot{\mathbf{x}} = \mathsf{f}(\mathbf{x})$ ima jedinstveno lokalno rješenje.
b*) Pokazati da funkcija f zadovoljava uvjete pod (a) ako vrijedi

$$(\exists\, C \in \mathbf{R}^+)(\forall\, \mathbf{x}, \mathsf{h} \in \mathbf{R}^d) \quad |\mathsf{f}(\mathbf{x}+2\mathsf{h})+\mathsf{f}(\mathbf{x})-2\mathsf{f}(\mathbf{x}+\mathsf{h})| \leqslant C|\mathsf{h}|\,.$$

c*) Ako je $\mathsf{f} \in \mathrm{H}^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ pokazati da zadovoljava uvjete pod (b).
[Funkcija u je u $\mathrm{H}^2(\mathbf{R}^2;\mathbf{R}^2)$ ako je, zajedno sa svojom prvom i drugom derivacijom u $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^2)$; alternativno, ako je $(1+4\pi^2|\boldsymbol{\xi}|^2)\hat{u}$ u L^2.]

3. Pokazati da ako dvije funkcije A i B zadovoljavaju diferencijalnu nejednakost:

$$\begin{cases} \dot{A} \geqslant B^2 \,, & A(0) = A_0 > 0 \\ \dot{B} \geqslant A^2 \,, & B(0) = B_0 > 0 \,, \end{cases}$$

onda A ili B teži prema ∞ za neku konačnu vrijednost T_c. Koja je najveća moguća vrijednost T_c, ovisno o A_0 i B_0.

6. Osgoodova pretpostavka i beskonačnodimenzionalni slučaj

Lema 3. *Neka je $\rho \geqslant 0$ izmjeriva funkcija na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathbf{R}^+_0)$ i $\omega : \mathbf{R}^+_0 \longrightarrow \mathbf{R}^+_0$ neprekinuta i neopadajuća funkcija takva da je $\omega(0) = 0$ i*

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty \,.$$

Nadalje, neka za neki $a \in \mathbf{R}^+_0$ funkcija ρ zadovoljava nejednakost

$$\rho(t) \leqslant a + \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(\rho(s))\, ds \,.$$

Ako je $a = 0$, onda je i $\rho = 0$. Inače, za $\Omega(x) := \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{dr}{\omega(r)}$, vrijedi

$$-\Omega(\rho(t)) + \Omega(a) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(\tau)\, d\tau \,. \tag{11}$$

Dem. Definirajmo apsolutno neprekinutu i rastuću funkciju

$$R_a(t) := a + \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(\rho(s))\, ds \,.$$

Deriviranjem, uz korištenje pretpostavke, imamo $R'_a = \alpha\, \omega \circ \rho \leqslant \alpha\, \omega \circ R_a$.

Ako je $a > 0$, onda iz definicije zbog pozitivnosti α i $\omega \circ \rho$ neposredno slijedi da je $R_a > 0$. Nadalje, $\Omega \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}^+)$, pa imamo

$$-\frac{d}{dt}(\Omega \circ R_a) = \frac{R'_a}{\omega \circ R_a} \leqslant \alpha \,, \tag{12}$$

odakle integriranjem od t_0 do t slijedi tvrdnja u tom slučaju, jer je $\omega \circ \rho \leqslant \omega \circ R_a$.

Ako je $a = 0$, a da je $\rho \neq 0$, onda postoji $t \geqslant t_0$ takav da je $\rho > 0$ nadesno od t. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je taj t upravo t_0. Definirajmo

$$\tilde{\rho}(t) := \sup_{s \in [t_0, t]} \rho(s) \,,$$

za koji vrijedi nejednakost

$$\tilde{\rho}(t) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(\tilde{\rho}(s))\, ds \,,$$

pa postoji $t_1 > t_0$ takav da je $\delta := \int_{t_0}^{t_1} \alpha(s)\omega(\tilde{\rho}(s))\, ds > 0$. Koristeći nejednakost u dokazu slučaja $a > 0$, za proizvoljni $a' > 0$ vrijedi

$$\Omega(a') \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)\, d\tau + \Omega(a' + \delta) \,.$$

Kako je Ω nerastuća, to za proizvoljni $a' > 0$ imamo

$$\Omega(a') \leqslant \int_{t_0}^{t_1} \alpha(\tau)\, d\tau + \Omega(\delta) \,,$$

a što je kontradikcija s time da je $\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = \infty$.

Q.E.D.

Neka je F metrički prostor, E Banachov prostor, a funkcija $\omega : \mathbf{R}_0^+ \longrightarrow \mathbf{R}_0^+$ neprekinuta i neopadajuća funkcija takva da je $\omega(0) = 0$. S $\mathrm{C}_\omega(F; E)$ označujemo skup svih omeđenih funkcija $u : F \longrightarrow E$ takvih da je

$$(\exists\, C > 0)(\forall\, x, y \in F) \quad \|u(x) - u(y)\|_E \leqslant C\omega(d(x, y)) \ .$$

Lako se vidi da je $\mathrm{C}_\omega(F; E)$ vektorski prostor, štoviše i Banachov s normom

$$\|u\|_{\mathrm{C}_\omega} := \|u\|_{\mathrm{L}^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{\omega(d(x, y))} \ .$$

Teorem 8. *Neka je E Banachov prostor, a $\Omega \subseteq E$ otvoren podskup. Nadalje, neka je $I \subseteq \mathbf{R}$ otvoren interval, $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ i $F \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathrm{C}_\omega(\Omega; E))$, pri čemu za ω kao gore vrijedi*

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty \ .$$

Tada postoji interval $J \subseteq I$ koji sadrži t_0, te za koji jednadžba

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, x(s))ds$$

ima točno jedno neprekinuto rješenje definirano na J.

Dem. Kako bismo pokazali jedinstvenost, pretpostavimo da su x_1 i x_2 dva rješenja na nekoj okolini $\tilde{J}$ oko t_0, te definirajmo funkciju

$$\rho(t) := \|x_1(t) - x_2(t)\|_E \ ,$$

za koju vrijedi nejednakost

$$0 \leqslant \rho(t) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(s)\omega(\rho(s))ds \ ,$$

pri čemu smo uzeli $\alpha \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(I; \mathbf{R}_0^+)$ takvu da vrijedi

$$\|F(s, x_1(s)) - F(s, x_2(s))\|_E \leqslant \alpha(s)\omega(\rho(s)) \ .$$

Neposredna primjena prethodne leme daje jedinstvenost.

Kako bismo pokazali postojanje rješenja, koristimo Picardove iteracije:

$$x_{k+1}(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(\tau, x_k(\tau))d\tau \ .$$

Nije teško provjeriti da se za dovoljno mali interval J ne izlazi iz domene funkcije F, te da je niz (x_k) omeđen u $\mathrm{L}^\infty(J; E)$.

Pokažimo da je (x_k) Cauchyjev niz u $\mathrm{C}(\mathsf{Cl}\, J; E)$.

Ako definiramo $\rho_{k+1,n}(t) := \|x_{k+1+n}(t) - x_{k+1}(t)\|_E$, vrijedi nejednakost:

$$0 \leqslant \rho_{k+1,n}(t) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(\tau)\omega(\rho_{k,n}(\tau))d\tau \ .$$

Uz daljnju oznaku $\rho_k(t) := \sup_n \rho_{k,n}(t)$, zbog neopadanja ω zaključujemo

$$0 \leqslant \rho_{k+1}(t) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(\tau)\omega(\rho_k(\tau))d\tau \ .$$

Primjenom Fatouove leme imamo

$$\tilde{\rho}(t) := \limsup \rho_k(t) \leqslant \int_{t_0}^t \alpha(\tau)\omega(\tilde{\rho}(\tau))d\tau \ .$$

Ponovnom primjenom Leme 3 slijedi da je $\tilde{\rho}$ identički nula na nekoj okolini t_0, što pokazuje da je (x_k) Cauchyjev niz, pa ima i limes koji je rješenje integralne jednadžbe.

Q.E.D.

7. Rubne zadaće

Ovo su zadaci uz materijal u knjizi: I. Aganović, K. Veselić: Linearne diferencijalne jednadžbe.

Zadaci.

1. Interpretirati Dirichletov, Neumannov i Robinov rubni uvjet u svakom od primjera 1, 2 i 3 na stranicama 6 i 7.

2. Teška homogena žica napeta je koso utegom mase $M > 0$ na kraju $x = 0$. Odrediti ravnotežni progib ako je drugi kraj slobodan.

3. Teška homogena žica napeta je horizontalno utegom mase M na kraju $x = 0$, a nalazi se u homogenom sredstvu s koeficijentom elastičnosti b. Odrediti ravnotežni progib ako je drugi kraj slobodan.

4. Teška homogena žica napeta je horizontalno utegom mase M na kraju $x = 0$. Na dio $\langle x_0, l\rangle$ djeluje elastična sila s koeficijentom $b \in \mathbf{R}^+$. Odrediti progib ako je drugi kraj žice učvršćen.

5. Teška žica sastavljena je od dvaju homogenih komada $\langle 0, x_0\rangle$ i $\langle x_0, l\rangle$, s linijskim gustoćama mase ρ_1 i ρ_2, i napeta je vertikalno utegom mase M. Odrediti ravnotežni progib ako je $u(0) = 0$, a $u(l) = d \in \mathbf{R}^+$.

6. Postaviti i riješiti rubnu zadaću za $(au')' + f = 0$ ako je kraj $x = 0$ učvršćen, a kraj $x = l$ *oslonjen*.

7. Riješiti jednadžbu $u'' + u = 0$ uz rubne uvjete:
a) $u(0) = 0, u(\pi) = 1$.
b) $u(0) = 0, u(\pi) = 0$.
c) $u(0) + 2u'(0) = 0, u(\pi) + u'(\pi) = 0$.

8. Riješiti rubne zadaće:
a) $u'' + f = 0, u(a) = u(b) = 0$;
b) $u'' + k^2u + f = 0, u(0) = u(l) = 0$;
gdje je $f \in C[a, b]$. Kako glase Greenove funkcije ovih zadaća?

9. Konstruirati Greenovu funkciju za rubne zadaće:
a) $u'' + k^2u = 0, u(0) = u(1) = 0$.
b) $x^2u'' + xu' - n^2u = 0$, u je ograničeno u 0, $u(1) = 0$.
c) $\big((1 - x^2)u'\big)' = 0$, $u(0) = 0$, u je ograničeno u 1.
d) $x^2(\ln x - 1)u'' - xu' + u = 0$, u je ograničeno u 0, $u(1) = 0$.

10. Riješiti rubnu zadaću

$$u'' - u = x$$
$$u(0) = u(1) = 0\ .$$

a) Koristeći Greenovu funkciju.
b) Nalazeći najprije opće rješenje i računajući proizvoljne konstante.

11. Koristeći Greenovu funkciju riješiti sljedeće rubne zadaće:
a) $u'' + \pi^2u = \cos x, u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)$.
b) $xu'' + u' = x, u(1) = u(l) = 0$.
c) $u'' + u = x^2, u(0) = u(\pi/2) = 0$.

12. Odrediti Greenovu funkciju i riješiti rubnu zadaću za običnu diferencijalnu jednadžbu

$$-x^4u'' - 4x^3u' - 2x^2u = x^2 - x\ ,\ \ u(1) = 0,\ u(2) + u'(2) = 0$$

na segmentu $[1, 2]$.

13. Naći Greenovu funkciju i riješiti rubnu zadaću na segmentu $[1, 2]$:

$$
\begin{aligned}
-x^2y'' - 2xy' &= x \sin x \\
y'(1) &= 0 \\
y(2) &= 0 \;.
\end{aligned}
$$

14. Odrediti realan broj λ tako da rješenje diferencijalne jednadžbe $u'' + 4u' + (\lambda^2 + 4)u = 0$ zadovoljava rubne uvjete $u(0) = 0$ i $u(2\pi) = 0$, te da se točno k puta anulira unutar intervala $\langle 0, 2\pi \rangle$.

15. Za $k \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ riješiti rubnu zadaću $u^{(4)} - k^4 u = 0$, $u(0) = u''(0) = u''(1) = u'''(1) - u(1) = 0$.

16. Riješiti nelinearnu rubnu zadaću $2yy'' = (y')^2$, $y(0) = y(2\pi) = \frac{\pi}{4}$.

Literatura:

Herbert Amann: Ordinary differential equations, De Gruyter, 1990.

Werner Balser: Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations, Springer, 2000.

Vojislav Marić, Marija Skendžić: Obične diferencijalne jednačine, Naučna knjiga, Beograd, 1980.

Kôsaku Yosida: Lectures on differential and integral equations, Dover, 1991.

Francesco Giacomo Tricomi: Differential equations, Blackie & Son, Glasgow, 1961.