Znanstveno računanje 2

3. dio vježbi
Modeli s diferencijalnim jednadžbama

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu (skraćeno ODJ) oblika

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in \langle a, b \rangle, \tag{1}$$

  - uz zadani početni uvjet $y(a) = y_0$ — **inicijalni problem**
  - ili uz zadani rubni uvjet $r(y(a), y(b)) = 0$, gdje je r neka zadana funkcija — **rubni problem**.
- Sustav običnih diferencijalnih jednadžbi je općenitiji problem:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Koristeći vektorsku notaciju

$$\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_n]^T \quad \text{i} \quad \mathbf{f} = [f_1, \ldots, f_n]^T$$

sustav pišemo u obliku analognom jednadžbi (1):

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)),$$

te primijenjujemo iste numeričke metode kao za rješavanje diferencijalne jednadžbe (1) vodeći računa o tome da se umjesto skalarnih funkcija y i f javljaju vektorske funkcije $\mathbf{y}$ i $\mathbf{f}$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Diferencijalne jednadžbe višeg reda

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

supstitucijama

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \ldots, \quad y_n = y^{(n-1)}$$

svodimo na sustav jednadžbi prvog reda:

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2, \\ y_2' &= y'' = y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y^{(n-1)} = y_n, \\ y_n' &= y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = f(x, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n), \end{aligned}$$

te i u ovom slučaju možemo koristiti metode razvijene za diferencijalnu jednadžbu (1).

Eulerova metoda

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Eulerova metoda je zasigurno najjednostavnija metoda za rješavanje inicijalnog problema za ODJ oblika
$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0.$$
- Metoda se zasniva na ideji da se y' u gornjoj jednadžbi zamijeni s podijeljenom razlikom
$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + \mathcal{O}(h),$$
pa rješenje diferencijalne jednadžbe zadovoljava
$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \mathcal{O}(h^2) = y(x) + hf(x, y(x)) + \mathcal{O}(h^2)$$
- Interval $[a, b]$ podijelimo na n jednakih dijelova te stavimo
$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

- Eulerova metoda, se tada može kraće zapisati rekurzijom

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

  gdje je početni uvjet y_0 zadan kao inicijalni uvjet diferencijalne jednadžbe.
- Dobivene vrijednosti y_i su aproksimacije rješenja diferencijalne jednadžbe u točkama x_i.

Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

Algoritam (Eulerova metoda)

y_0, *a*, *b* *i* *n* *zadani;*
funkcija f *zadana;*
$h = \frac{b-a}{n}$;
$x(1) = a$;
$y(1) = y_0$;
for $i = 1 : n$
  $x(i+1) = a + i * h$;
  $y(i+1) = y(i) + h * f(x(i), y(i))$;
end

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Eulerova metoda

Runge–Kutta metode

Konvergencija jednokoračnih metoda

Zadaci

Runge–Kutta–Fehlbergove metode

Zadaci

Implicitna trapezna metoda

Zadaci

Linearne višekoračne metode

Konvergencija linearnih višekoračnih metoda

Prediktor–korektor par

Zadaci

Primjeri iz primjene

Rubni problem

Runge–Kutta metode

- Koristeći sličnu ideju kao u Eulerovoj metodi, diferencijalnu jednadžbu

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_0 \tag{2}$$

na intervalu $[a, b]$, možemo rješavati tako da podijelimo interval $[a, b]$ na n jednakih podintervala, označivši

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih, \quad i = 0, \ldots, n.$$

- Sada y_{i+1}, aproksimaciju rješenja u točki x_{i+1}, računamo iz y_i korištenjem aproksimacije oblika

$$y(x + h) \approx y(x) + h\Phi(x, y(x), h; f), \tag{3}$$

te dobivamo rekurziju:

$$y_{i+1} = y_i + h\Phi(x_i, y_i, h; f), \quad i = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

- Funkciju Φ nazivamo **funkcija prirasta**, a različit izbor te funkcije definira različite metode.
- Tako je npr. u Eulerovoj metodi

$$\Phi(x, y, h; f) = f(x, y).$$

- Metode oblika (4) zovemo **jednokoračne metode** (jer za aproksimaciju y_{i+1} koristimo samo vrijednost y_i u prethodnoj točki x_i).
- O odabiru funkcije Φ ovisi i točnost metode.
- Za očekivati je da ako izaberemo Φ tako da aproksimacija točnog rješenja $y(x + h)$ dana s (3) bude što točnija, da će točnija biti i aproksimacija y_i za $y(x_i)$ dana rekurzijom (4).

- Pogrešku aproksimacije (3):

$$\tau(x;h) = \Delta(x;h) - \Phi(x, y(x), h), \tag{5}$$

gdje je $y(x)$ točno rješenje diferencijalne jednadžbe (2) i

$$\Delta(x;h) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h},$$

nazivamo **lokalna pogreška diskretizacije.**

- Za razumne jednokoračne metode zahtjevat ćemo da je

$$\lim_{h\to 0} \tau(x;h) = 0.$$

- U tom slučaju je

$$0 = \lim_{h\to 0} (\Delta(x;h) - \Phi(x, y(x), h)) = f(x,y) - \lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x), h)$$

tj.

$$\lim_{h\to 0} \Phi(x, y(x), h) = f(x,y).$$

Definicija

Jednokoračnu metodu zovemo ***konzistentnom*** *ako za svaki $f \in F_1(a,b)$, $x \in [a,b]$ i $y \in \mathbb{R}$ lokalna pogreška diskretizacije τ zadovoljava*

$$\lim_{h \to 0} \tau(x;h) = 0.$$

Ukoliko je još $f \in F_p(a,b)$ i

$$\tau(x;h) = \mathcal{O}(h^p)$$

kažemo da je metoda reda p.

- Sa $F_p(a,b)$ označavamo skup funkcija f za koje postoje sve parcijalne derivacije do reda p na traci $S = \{(x,y) | a \le x \le b,\ y \in \mathbb{R}^n\}$, a i b konačni, i na njoj su su neprekidne i ograničene.
- Što je veći p metoda je točnija.

- Pod točnošću metode podrazumijevamo ponašanje pogreške
$$y(x_i) - y_i.$$
- Zbog jednostavnosti promatrat ćemo pogrešku u fiksiranoj točki b.
- Ako je jednokoračna metoda reda p, tada se može pokazati (teorem kasnije)
$$y(b) - y_n = \mathcal{O}(h^p).$$
tj. $\lim_{n\to\infty}(y(b) - y_n) = 0$ za sve $x \in [a, b]$ i $f \in F_1(a, b)$, te kažemo da je jednokoračna metoda **konvergentna.**
- Uočimo da je $h = (b - a)/n$ te da je y_n uvijek (za svaki n) aproksimacija za $y(b)$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Najpoznatije jednokoračne metode su **Runge–Kutta metode.**
- Kod njih je funkcija Φ oblika

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{j=1}^{r} \omega_j k_j(x, y, h),$$

a k_j su zadani s

$$k_j(x, y, h) = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^{r} a_{jl} k_l(x, y, h, f)\right), \quad j=1,\ldots,r. \tag{6}$$

- Broj r zovemo broj stadija Runge–Kutta (RK) metode, i on označava koliko puta moramo računati funkciju f u svakom koraku.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Različit izbor koeficijenata ω_j, c_j i a_{jl} definira različite metode.
- Ovi koeficijenti se najčešće biraju tako da red metode bude što je moguće veći.
    - Iz izraza (6) vidimo da se k_j nalazi na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe, tj. zadan je implicitno te govorimo o **implicitnoj** Runge–Kutta metodi.
    - U praksi se najviše koriste metode gdje je $a_{jl} = 0$ za $l \geq j$. Tada k_j možemo izračunati preko $k_1, \ldots, k_{j-1}$, tj. funkcije k_j su zadane eksplicitno. Takve RK metode nazivamo **eksplicitnima**.
- Nadalje, obično se dodaje uvjet (teorem kasnije)

$$\sum_{l=1}^{r} a_{jl} = c_j.$$

- Odabrat ćemo koeficijente za RK metodu s dva stadija:

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,h) =& \omega_1 k_1(x,y,h) + \omega_2 k_2(x,y,h),\\ k_1(x,y,h) =& f(x,y),\\ k_2(x,y,h) =& f(x+ah, y+ahk_1).\end{aligned}$$

- Razvojem rješenja diferencijalne jedadžbe u Taylorov red, i primjenom definicije lokalne pogreške diskretizacije dobivamo sljedeće uvjete na koeficijente:
  - Da bi metoda bila reda 1 koeficijente treba odabrati tako da je:
  $$1 - \omega_1 - \omega_2 = 0.$$
  - Da bi metoda bila reda 2 koeficijente treba odabrati tako da je još i:
  $$\frac{1}{2} - \omega_2 a = 0$$

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Uvođenjem slobodnog koeficijenta t rješenje ove dvije jednadžbe možemo napisati u obliku:

$$\omega_2 = t \neq 0, \quad \omega_1 = 1 - t, \quad a = \frac{1}{2t}.$$

- t ne možemo odabrati tako da metoda bude reda 3.

Eulerova metoda $\omega_2 = t = 0$, metoda s jednim stadijem — metoda reda 1

Heunova metoda $t = \frac{1}{2}$ — metoda reda 2

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \\
k_1 &= f(x, y), \\
k_2 &= f(x + h, y + hk_1),
\end{aligned}$$

modificirana Eulerova metoda $t = 1$ — metoda reda 2

$$\Phi = f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)\right).$$

- Najraširenije su metode sa četiri stadija.
- Odgovarajuće jednadžbe koje moraju zadovoljavati koeficijenti RK-4 metoda su:

$$
\begin{aligned}
\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= 1, && (8)\\
\omega_2 c_2 + \omega_3 c_3 + \omega_4 c_4 &= \tfrac{1}{2}, && (9)\\
\omega_2 c_2^2 + \omega_3 c_3^2 + \omega_4 c_4^2 &= \tfrac{1}{3}, && (10)\\
\omega_3 c_2 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) &= \tfrac{1}{6}, && (11)\\
\omega_2 c_2^3 + \omega_3 c_3^3 + \omega_4 c_4^3 &= \tfrac{1}{4}, && (12)\\
\omega_3 c_2^2 a_{32} + \omega_4 (c_2^2 a_{42} + c_3^2 a_{43}) &= \tfrac{1}{12}, && (13)\\
\omega_3 c_2 c_3 a_{32} + \omega_4 (c_2 a_{42} + c_3 a_{43}) c_4 &= \tfrac{1}{8}, && (14)\\
\omega_4 c_2 a_{32} a_{43} &= \tfrac{1}{24}, && (15)
\end{aligned}
$$

gdje je

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0, & c_2 &= a_{21},\\
c_3 &= a_{31} + a_{32}, & c_4 &= a_{41} + a_{42} + a_{43}.
\end{aligned}
$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Uvjet (8) treba biti zadovoljen da bi metoda bila reda 1,
- uvjet (9) za red 2,
- uvjeti (10)–(11) za red 3,
- dok za red 4 trebaju biti ispunjeni i uvjeti (12)–(15).

Ukupno imamo 10 koeficijenata i 8 jednadžbi ukoliko je metoda reda 4.

- Međutim, metoda s četiri stadija može postići najviše red četiri, tj. ne možemo dva stupnja slobode iz sustava jednadžbi iskoristiti da red metode podignemo na pet.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Općenito vrijedi:
  - Za metode s 1, 2, 3 i 4 stadija najveći mogući red metode odgovara broju stadija.
  - Za metode s 5, 6 i 7 stadija najveći mogući red je 4, 5 i 6.
  - Za metode s 8 i više stadija najveći mogući red je barem za dva manji od broja stadija.
- To je razlog zašto su metode s 4 stadija najpopularnije (RK-4).
- Slijedi nekoliko primjera RK-4 metoda.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

"Klasična" Runge–Kutta metoda (RK-4)

$$\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x, y),\\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_2\right),\\
k_4 &= f\left(x + h, y + hk_3\right).
\end{aligned}$$

$3/8$-ska metoda

$$
\begin{aligned}
\Phi &= \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4),\\
k_1 &= f(x, y),\\
k_2 &= f\left(x + \frac{h}{3}, y + \frac{h}{3}k_1\right),\\
k_3 &= f\left(x + \frac{2}{3}h, y - \frac{h}{3}k_1 + hk_2\right),\\
k_4 &= f(x + h, y + h(k_1 - k_2 + k_3))
\end{aligned}
$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Gillova metoda

$$
\begin{aligned}
\Phi =& \frac{1}{6}\left(k_1 + (2-\sqrt{2})k_2 + (2+\sqrt{2})k_3 + k_4\right),\\
k_1 =& f(x, y),\\
k_2 =& f\left(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2}k_1\right),\\
k_3 =& f\left(x + \frac{h}{2}, y + h\frac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + h\frac{2-\sqrt{2}}{2}k_2\right),\\
k_4 =& f\left(x + h, y - h\frac{\sqrt{2}}{2}k_2 + h\frac{2+\sqrt{2}}{2}k_3\right).
\end{aligned}
$$

Algoritam (Runge–Kutta metoda (RK-4))

y_0, a, b i n zadani;
funkcija f zadana;
$h = \frac{b-a}{n}$;
$x(1) = a$;
$y(1) = y_0$;
for $i = 1 : n$
  $x(i+1) = a + i * h$;
  $k1 = f(x(i), y(i))$;
  $k2 = f\left(x(i) + \frac{h}{2}, y(i) + \frac{h}{2}k_1\right)$;
  $k3 = f\left(x(i) + \frac{h}{2}, y(i) + \frac{h}{2}k_2\right)$;
  $k4 = f\left(x(i+1), y(i) + hk_3\right)$;
  $y(i+1) = y(i) + \frac{h}{6} * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4)$;
end

Neka svojstva Runge–Kutta metoda

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Teorem

Runge–Kutta metoda sa r stadija ima red konzistencije veći ili jednak 1 ako i samo ako je

$$\sum_{j=1}^{r} \omega_j = 1.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

Teorem

Neka je RK metoda zadana s

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} \tilde{k}_j, \qquad \tilde{k}_j = f\left(x + \tilde{c}_j h, y + h \sum_{l=1}^{s} a_{jl} \tilde{k}_l\right)$$

reda konzistencije $\tilde{p}$, te neka je p red konzistencije metode

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} k_j, \qquad k_j = f\left(x + c_j h, y + h \sum_{l=1}^{s} a_{jl} k_l\right),$$

gdje je $c_j = \sum_{l=1}^{s} a_{jl}$. Tada je $p \geq \tilde{p}$.

Konvergencija jednokoračnih metoda

- Za fiksirani $x \in [a, b]$ definiramo korak

$$h_n = \frac{x - x_0}{n}$$

i **globalnu pogrešku diskretizacije**

$$e(x; h_n) = y_n - y(x).$$

- Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $x_n = x$, te možemo promatrati globalnu pogrešku diskretizacije kada $n \to \infty$.

Definicija

Jednokoračna metoda je ***konvergentna*** *ako*

$$\lim_{n\to\infty} e(x; h_n) = 0$$

za sve $x \in [a, b]$ i sve $f \in F_1(a, b)$.

Teorem

Za $x_0 \in [a, b]$, $y_0 \in \mathbb{R}$, *promatramo inicijalni problem*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

koji ima jedinstveno rješenje $y(x)$. *Neka je funkcija* Φ *neprekidna na*

$$G = \{(x, y, h) \mid x \in [a, b],\ |y - y(x)| \leq \gamma,\ |h| \leq h_0\},$$

za $h_0 > 0$, $\gamma > 0$ *i neka postoje pozitivne konstante* M *i* N *takve da je*

$$|\Phi(x, y_1; h) - \Phi(x, y_2; h)| \leq M|y_1 - y_2|$$

za sve $(x, y_i, h) \in G$, $i = 1, 2$, *i*

Teorem (nastavak)

$$|\tau(x;h)| = |\Delta(x;h) - \Phi(x, y(x); h)| \leq N|h|^p, \quad p > 0$$

za sve $x \in [a,b]$, $h \leq h_0$. *Tada postoji* $\bar{h}$, $0 < \bar{h} \leq h_0$, *takav da globalna pogreška diskretizacije zadovoljava*

$$|e(x;h_n)| \leq |h_n|^p N \frac{e^{M|x-x_0|} - 1}{M}$$

za sve $x \in [a,b]$ *i* $h_n = (x - x_0)/n$, $n = 1, 2, \ldots$, *uz* $|h_n| \leq \bar{h}$. *Ako je* $\gamma = \infty$, *tada je* $\bar{h} = h_0$.

Zadaci

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_euler()` *koja implementira Eulerovu metodu za rješavanje inicijalnog problema za ODJ. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju* f
- *rubove segmenta* a *i* b
- *početni uvjet* y_0
- *broj podintervala* n

i izlazne parametre

- *vektor* x *duljine* $n + 1$ *s vrijednostima* x_i
- *vektor* y *duljine* $n + 1$ *s vrijednostima* y_i

Zadatak

Svoju funkciju `odj_euler()` *primijenite na sljedeći inicijalni problem*

$$\begin{aligned} y'(x) &= -y(x) - 5e^{-x}\sin(5x), \quad x \in [0,3], \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

pri čemu je $n = 30$.

- f *uzmite kao pokazivač na anonimnu funkciju.*
- *Nacrtajte graf vašeg aproksimativnog rješenja, tako da točke* (x_i, y_i) *označite sa zvjezdicama, a točke međusobno povežete isprekidanom linijom.*
- *Označite osi sa 'x' i 'y'.*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak (nastavak)

- *Na istoj slici nacrtajte i graf egzaktnog rješenja*

$$y(x) = e^{-x}\cos(5x),$$

pomoću naredbe za crtanje funkcija

```
fplot('exp(-x)*cos(5*x)',[0 3],'r-');
```

- *Napišite prigodnu legendu.*
- *Izračunajte maksimalnu grešku* $\max_i |y(x_i) - y_i|$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_rk4()` *koja implementira Runge–Kutta metodu (RK-4) za rješavanje inicijalnog problema za ODJ. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju* f
- *rubove segmenta* a *i* b
- *početni uvjet* y_0
- *broj podintervala* n

i izlazne parametre

- *vektor* x *duljine* $n+1$ *s vrijednostima* x_i
- *vektor* y *duljine* $n+1$ *s vrijednostima* y_i

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Svoju funkciju `odj_rk4()` *primijenite na prethodni primjer, na isti način prikažite aproksimativno i egzaktno rješenje, te izračunajte maksimalnu grešku.*

Runge–Kutta–Fehlbergove metode

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Kod prethodnih jednokoračnih metoda pretpostavili smo da je korak integracije h konstantan tijekom cijelog postupka rješavanja diferencijalne jednadžbe.
- Ali, h se može mijenjati u svakom koraku integracije, pa jednokoračnu metodu možemo pisati u obliku:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \Phi(x_i, y_i, h_i).$$

- Želimo odrediti duljinu koraka h_i tako da bude postignuta neka unaprijed zadana točnost ε.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Neka su s Φ i $\bar{\Phi}$ zadane dvije metode reda p i $p+1$. Tada računamo aproksimacije

$$\begin{aligned} y_{i+1} =& y_i + h_i\Phi(x_i, y_i, h_i), \\ \bar{y}_{i+1} =& y_i + h_i\bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i). \end{aligned}$$

- Znamo da vrijedi:

$$\begin{aligned} y(x_i + h_i) =& y(x_i) + h_i\Phi(x_i, y(x_i), h_i) + C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}), \\ y(x_i + h_i) =& y(x_i) + h_i\bar{\Phi}(x_i, y(x_i), h_i) + \mathcal{O}(h_i^{p+2}). \end{aligned}$$

- Cilj je da pogreška u i-tom koraku bude manja od ε.
- Stoga ćemo pretpostaviti da je aproksimacija y_i za $y(x_i)$ točna za male h, tj. $y_i \approx y(x_i)$.

- Iz prve dvije jednakosti oduzimanjem slijedi

$$\bar{y}_{i+1} - y_{i+1} = h_i[\bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i) - \Phi(x_i, y_i, h_i)],$$

- a iz druge dvije, uz pretpostavku $y_i \approx y(x_i)$,

$$h_i[\bar{\Phi}(x_i, y_i, h_i) - \Phi(x_i, y_i, h_i)] \approx C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}).$$

- Kombiniranjem prethodnih izraza dobit ćemo

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i+1} - y_{i+1} &\approx C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}) \\ y(x_{i+1}) - y_{i+1} &\approx C(x_i)h_i^{p+1} + \mathcal{O}(h_i^{p+2}) \end{aligned}$$

  iz čega možemo zaključiti da je $\bar{y}_{i+1} - y_{i+1}$ dobra aproksimacija za grešku u x_{i+1}.
- Zanemarivanjem viših članova u razvoju pogreške, dobivamo

$$\bar{y}_{i+1} - y_{i+1} \approx C(x_i)h_i^{p+1}$$

$$\bar{y}_i - y_i \approx C(x_{i-1})h_{i-1}^{p+1}.$$

- Uz pretpostavku da se član $C(x)$ u pogrešci ne mijenja brzo, tj. $C(x_i) \approx C(x_{i-1})$, uvjet da pogreška u i-tom koraku bude manja od ε sada glasi:

$$\varepsilon \geq |y(x_{i+1}) - y_{i+1}| \approx |C(x_i) h_i^{p+1}| \approx |C(x_{i-1}) h_i^{p+1}| \approx \left| \frac{\bar{y}_i - y_i}{h_{i-1}^{p+1}} \right| h_i^{p+1}$$

odnosno

$$h_i^{p+1} \leq h_{i-1}^{p+1} \frac{\varepsilon}{|\bar{y}_i - y_i|}.$$

- Iz ovoga slijedi da za novi korak trebamo izabrati

$$h_i = h_{i-1} \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{|\bar{y}_i - y_i|}}.$$

- Ukoliko je prethodni korak bio uspješan, tada je zadovoljeno

$$|\bar{y}_i - y_i| \leq \varepsilon,$$

te je stoga $h_i \geq h_{i-1}$.

- Ako prethodna nejednakost ne vrijedi, $(i-1)$-vi korak treba ponoviti uz manji h_{i-1}.
- Mnogi iz prakse preporučaju izbor koraka
$$h_i = \alpha h_{i-1} \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{|\bar{y}_i - y_i|}}.$$
gdje je α pogodno odabran korigirajući faktor, koji služi da ispravi pogrešku nastalu odbacivanjem viših članova u ocjeni pogreške.
- Obično je $\alpha = 0.9$.
- Čim izračunamo h_i najbolje je odmah provjeriti da li će biti ispunjeno $|\bar{y}_{i+1} - y_{i+1}| \leq \varepsilon$, i ukoliko to nije ispunjeno izračunati novi h_i^{novi} iz starog $h_i^{stari} = h_i$
$$h_i^{novi} = \alpha h_i^{stari} \sqrt[p+1]{\frac{\varepsilon}{|\bar{y}_{i+1} - y_{i+1}|}}.$$
na isti način kao što se h_i računa iz h_{i-1}.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Prikazani izbor koraka vrijedi za bilo koji par jednokoračnih metoda reda p i $p+1$.
- Primjena Runge–Kutta metoda zahtijevala bi jednu metodu sa s stadija i jednu sa $s+1$ stadija, što općenito znači da bismo u svakom koraku funkciju f iz diferencijalne jednadžbe trebali računati $2s+1$ puta.
- Postupak se može pojednostavniti ako prvih s stadija $k_1, \ldots, k_s, k_{s+1}$ korištenih za računanje funkcije prirasta $\bar{\Phi}$ iskoristimo za računanje funkcije Φ:

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^{s} \omega_i k_i(x, y, h),$$

$$\bar{\Phi}(x, y, h) = \sum_{i=1}^{s+1} \bar{\omega}_i k_i(x, y, h).$$

- Sada u svakom koraku funkciju f računamo $s+1$ puta.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Važno je napomenuti da je glavna metoda ona reda p, a metoda reda $p+1$ je samo pomoćna.
- Ovu ideju ćemo ilustrirati na paru Runge–Kutta metoda reda 2 i 3.
- Promatramo metode s 3 i 4 stadija:

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i k_i(x,y,h),$$

$$\bar{\Phi}(x,y,h) = \sum_{i=1}^{4} \bar{\omega}_i k_i(x,y,h).$$

- Da bi metoda definirana s $\bar{\Phi}$ bila reda 3 trebaju biti zadovoljeni uvjeti (8)–(11), što je ukupno 4 jednadžbe i 10 koeficijenata.
- Nadalje, metoda reda 2 s 3 stadija ima 3 dodatna koeficijenta (ω_1, ω_2 i ω_3) i treba zadovoljavati 2 dodatna uvjeta (8)–(9).

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Sveukupno, 13 koeficijenata u ovom paru metoda treba zadovoljavati 6 uvjeta.
- Preostalih 7 stupnjeva slobode iskoristit ćemo za smanjivanje broja računanja funkcije f.
- Zahtijevat ćemo da $k_4(x_i, y_i, h_i, f)$, zadnji stadij iz računanja $\bar{\Phi}$ u i-tom koraku, iskoristimo kao $k_1(x_{i+1}, y_{i+1}, h_{i+1}, f)$, prvi stadij u $(i+1)$-om koraku:

$$\begin{aligned} f(x_i + c_4 h_i, y_i + h_i(a_{41}k_1 + a_{42}k_2 + a_{43}k_3)) = f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ = f(x_i + h_i, y_i + h_i\Phi(x_i, y_i, h_i, f)) \\ = f(x_i + h_i, y_i + h_i(\omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 + \omega_3 k_3)) \end{aligned}$$

- Odavde slijede dodatna 3 uvjeta:

$$a_{41} = \omega_1, \quad a_{42} = \omega_2, \quad a_{43} = \omega_3.$$

- Uvjet $c_4 = 1$ automatski je ispunjen zbog

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 1.$$

- Jedno od rješenja ovog sustava jednadžbi je prikazano u sljedećoj tablici.

i	c_i	a_{ij} $j=1$	$j=2$	$j=3$	ω_i	$\bar{\omega}_i$
1	0				$\frac{214}{891}$	$\frac{533}{2106}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$			$\frac{1}{33}$	0
3	$\frac{27}{40}$	$-\frac{189}{800}$	$\frac{729}{800}$		$\frac{650}{891}$	$\frac{800}{1053}$
4	1	$\frac{214}{891}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{650}{891}$		$-\frac{1}{78}$

Zadaci

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_rk23()` *koja implementira Runge–Kutta–Fehlbergovu metodu za rješavanje inicijalnog problema za ODJ. Metoda je kombinacija Runge–Kutta metoda reda 2 i 3. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju f*
- *rubove segmenta a i b*
- *početni uvjet y_0*
- *toleranciju na grešku tol*

i izlazne parametre

- *vektor x duljine $n+1$ s vrijednostima x_i*
- *vektor y duljine $n+1$ s vrijednostima y_i*

gdje je n broj podintervala.

Zadatak (nastavak)

- *Početni korak je* $h_0 = b - a$.
- *Za svaku novu iteraciju najprije izračunajte* h_i, *i provjerite da li će biti* $|\bar{y}_{i+1} - y_{i+1}| \leq tol$. *Ukoliko to nije ispunjeno novi* h_i *računajte po formuli*

$$h_i^{novi} = 0.9 h_i^{stari} \sqrt[p+1]{\frac{tol}{|y_{i+1} - \bar{y}_{i+1}|}}.$$

  Analogno računajte i početni h_{i+1}.
- *Obratite pozornost na slučaj kada je* $x_i + h_i > b$. *U tom slučaju uzmite* $h_i = b - x_i$ *i* $x_{i+1} = b$.

Zadatak

- *Svoju funkciju* `odj_rk23()` *primijenite na problem*

$$y'(x) = \begin{cases} 1 - y(x) & x \in [0, \pi] \\ -5y(x) & x \in \langle \pi, 4] \end{cases}, \qquad y(0) = 0$$

za koji je točno rješenje

$$y(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x \in [0, \pi] \\ (1 - e^{-\pi})e^{-5(x-\pi)} & x \in \langle \pi, 4] \end{cases}.$$

- *Uzmite* $tol = 10^{-5}$*, prikažite aproksimativno i egzaktno rješenje, te na x-osi označite korake koje je metoda napravila. Izračunajte maksimalnu grešku.*
- *Usporedite sa rješenjem dobivenim samo Runge–Kutta metodom reda 2 iz Runge–Kutta–Fehlbergove metode na ekvidistantnoj mreži sa istim brojem koraka.*

Implicitna trapezna metoda

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Jednokoračne metode možemo shvatiti kao primjenu kvadraturnih formula na integraciju ODJ

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

- Integracijom prethodne jednadžbe slijedi

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx = \mathcal{I}_i.$$

- Dakle, vrijednost $y(x_{i+1})$ možemo izračunati iz stare vrijednosti $y(x_i)$ ako znamo izračunati integral $\mathcal{I}_i$.
- Korištenjem kvadraturnih formula dobivamo:
  - *formula lijevog ruba* $\longrightarrow$ **Eulerova metoda**

$$\mathcal{I}_i \approx hf(x_i, y(x_i))$$

  - *formula desnog ruba* $\longrightarrow$ **implicitna Eulerova metoda**

$$\mathcal{I}_i \approx hf(x_{i+1}, y(x_{i+1}))$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- *formula srednje točke* $\longrightarrow$ **modificirana Eulerova metoda**

$$\mathcal{I}_i \approx hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right),$$

  pri čemu se koristi aproksimacija

$$y(x_i + h/2) \approx y(x_i) + \frac{h}{2}y'(x_i) = y(x_i) + \frac{h}{2}f(x_i, y(x_i)).$$

- *trapezna formula* $\longrightarrow$ **Imlicitna trapezna metoda** ili **Crank–Nicolsonova metoda**

$$\mathcal{I}_i \approx \frac{h}{2}(f(x_i, y(x_i)) + f(x_{i+1}, y(x_{i+1})))$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Dakle, primjenom trapezne formule na integraciju ODJ dobit ćemo metodu oblika

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})).$$

- Budući da se y_{i+1} javlja i na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe, radi se o implicitnoj metodi.
- U svakoj iteraciji rješava se gornji problem nekom od metoda za numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi, npr. Newtonovom metodom sa fiksnim brojem iteracija.
- Implicitna trapezna metoda je reda 2, budući da je takva točnost i trapezne kvadraturne formule.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zašto koristimo implicitne metode, kada kod njih u svakom koraku moramo rješavati nelinearnu jednadžbu?

- Kod Runge–Kutta–Fehlbergove metode vidjeli smo da red konzistencije utječe na izbor koraka h_i.
- S druge strane, kod rješavanja npr. inicijalnih problema oblika $y' = \lambda y$, $y(x_0) = y_0$ znamo da je egzaktno rješenje oblika $y = y_0 e^{\lambda x}$.
- Za $\lambda < 0$ za rješenje vrijedi $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$, što bi trebalo vrijediti i za aproksimaciju rješenja y_i.
- Za standardne eksplicitne metode sa fiksnim korakom h to nije uvijek tako.
- Produkt λh mora biti u određenom intervalu da bi to vrijedilo i za y_i, a izvan tog intervala se pojavljuju rastuće oscilacije u aproksimativnom rješenju.

Definicija

Interval apsolutne stabilnosti numeričke metode je interval produkta λh za koji aproksimacija y_i rješenja $y(x_i) = y_0 e^{\lambda x_i}$ inicijalnog problema $y' = \lambda y$, $y(x_0) = y_0$ teži ka nuli kada $i \to \infty$.

Intervali apsolutne stabilnosti za metode koje smo do sada radili su:

Euler. m.	RK-1	RK-2	RK-3	RK-4	Impl. trap.
$\langle -2,0 \rangle$	$\langle -2,0 \rangle$	$\langle -2,0 \rangle$	$\langle -2.51,0 \rangle$	$\langle -2.78,0 \rangle$	$\langle -\infty,0 \rangle$

prema tome implicitna trapezna metoda je **apsolutno stabilna.**

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

Implicitne metode su puno efikasnije za rješavanje **krutih (“stiff”) jednadžbi.**

- Primjenom numeričke metode na krutu jednadžbu veći utjecaj na veličinu koraka h_i ima interval apsolutne stabilnosti nego uvjet na održavanje male lokalne pogreške diskretizacije.
- Takve jednadžbe se teško rješavaju pomoću eksplicitnih Runge–Kutta metoda jer zahtijevaju puno vrlo sitnih koraka, dok za implicitnu trapeznu metodu to nije slučaj.

Zadaci

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_impl_trapez()` *koja implementira implicitnu trapeznu metodu za rješavanje inicijalnog problema za ODJ. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju* f
- *rubove segmenta* a *i* b
- *početni uvjet* y_0
- *broj podintervala* n

i izlazne parametre

- *vektor* x *duljine* $n+1$ *s vrijednostima* x_i
- *vektor* y *duljine* $n+1$ *s vrijednostima* y_i

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak (nastavak)

Svoju funkciju implementirajte na sljedeći način.

- *U svakom koraku metode definirajte funkciju $g(z)$ čija nultočka je y_{i+1} pomoću pokazivača na anonimnu funkciju.*
- *Budući da nam za Newtonovu metodu treba i $g'(z)$, koristit ćemo MATLAB-ove simboličke izraze:*

```
w=sym('w');
g=@(z) ...;
gs=g(w);
dgs=diff(gs);
dg=@(z) double(subs(dgs,z));
```

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak (nastavak)

- *Objašnjenja:*

`sym()` `w=sym('w')`	*kreira simboličke brojeve, varijable i objekte* `w` *je simbolička varijabla*
`g(w)`	*simbolički izraz*
`diff()`	*derivira simbolički izraz*
`subs()`	*zamjena simboličke varijable sa novom vrjednosti*
`double()`	*konverzija simboličkog izraza u numerički oblik*

- *Napišite pomoćnu M-file funkciju* `odj_newton` *koja implementira Newtonovu metodu za rješavanje nelinearne jedadžbe.*
- `odj_newton` *neka ima ulazne parametre*
  - *pokazivač na funkciju f*
  - *pokazivač na derivaciju funkcije df*
  - *početnu iteraciju z_0*
  - *broj iteracija k*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak (nastavak)

- *Funkcija* `odj_newton` *neka vraća aproksimaciju rješenja.*
- *U svakom koraku implicitne trapezne metode računajte* y_{i+1} *pomoću* `odj_newton`, *i uzmite da je* $z_0 = y_i$ *ili* $z_0 = y_i + hf(x_i, y_i)$ *i* $k = 5$.

Zadatak

Svoju funkciju `odj_impl_trapez()` *primijenite na problem*

$$\begin{aligned} y'(x) &= -100(y(x) - \cos x) - \sin x, \quad x \in [0,1], \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

za koji je točno rješenje

$$y(x) = \cos x.$$

- *Za* $h = 1/n$, $n = 20, 30, 40, 50$ *računajte vrijednost aproksimacije u zadnjoj točci* (y_{n+1}) *pomoću implicitne trapezne metode i Runge–Kutta metode reda 2 iz Runge–Kutta–Fehlbergove metode. Usporedite greške u odnosu na točno rješenje.*
- *Za koji* h *se* λh *nalazi u interavalu apsolutne stabilnosti?*

Linearne višekoračne metode

- Kod jednokoračnih metoda je za aproksimaciju y_{i+1} u točki x_{i+1} bilo potrebno poznavanje samo aproksimacije y_i u točki x_i.
- Promatrajmo ponovno diferencijalnu jednadžbu

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- Integracijom, te primjenom formule srednje točke za aproksimaciju integrala, slijedi da je

$$y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} y'(x)\, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$$
$$\approx 2hf(x_i, y(x_i)).$$

- Gornja formula vodi na rekurzivno definiranu aproksimaciju

$$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hf(x_i, y_i).$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- U ovoj metodi za određivanje vrijednosti y_{i+1} trebamo poznavati prethodne vrijednosti y_i i y_{i-1} — **dvokoračna metoda**
- Aproksimacija y_{i+1} zadana je eksplicitno izrazom na desnoj strani — **eksplicitna metoda**
- Prethodno opisana metoda zove se **metoda preskoka** i reda je 2.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Ako umjesto formule srednje točke pri računanju integrala primijenimo Simpsonovu formulu, dobivamo drugu aproksimaciju:

$$
\begin{aligned}
y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}) &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx \\
&\approx \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}, y(x_{i-1})) + 4f(x_i, y(x_i)) + \right. \\
&\quad \left. + f(x_{i+1}, y(x_{i+1}))\right],
\end{aligned}
$$

- Prethodna formula vodi na metodu

$$
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{3}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 4f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right].
$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Ovdje se y_{i+1} javlja i na lijevoj strani i na desnoj strani kao argument, općenito nelinearne, funkcije f.
- Dakle, y_{i+1} je zadan implicitno — **implicitna dvokoračna metoda**

Napomena

- *Uočimo da gornjim formulama ne možemo odrediti y_1, pa za njegovo određivanje treba upotrebiti jednu od jednokoračnih metoda.*
- *Višekoračne metode se koriste kada je funkcija f vrlo "skupa" za računanje, jer se u iteracijama koriste već izračunate vrijednosti $f(x_j, y_j)$ a ne neke nove vrijednosti kao kod Runge–Kutta metoda.*

- Općenito, linearne višekoračne metode su oblika

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f_{i+1-j},$$

gdje je $f_k = f(x_k, y_k)$, $\alpha_0 \neq 0$ i $|\alpha_r| + |\beta_r| \neq 0$.

- Ovu metodu zovemo ***r*-koračna metoda**:
  - za $\beta_0 = 0$ metoda je još i **eksplicitna**,
  - a za $\beta_0 \neq 0$ metoda je **implicitna**.
- Prikaz višekoračne metode pomoću koeficijenata α_j i β_j nije jedinstven jer npr. koeficijenti $2\alpha_0, \ldots, 2\alpha_r$ i $2\beta_0, \ldots, 2\beta_r$ definiraju istu metodu.
- Često se koristi normalizacija $\alpha_0 = 1$ te je zapis metode oblika:

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h\beta_0 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{r} \beta_j f_{i+1-j}.$$

- Primjenom različitih integracijskih metoda možemo dobiti cijeli niz višekoračnih metoda.
- Integracijom jednadžbe $y'(x) = f(x, y(x))$ na nekom zadanom intervalu $[x_{p-j}, x_{p+k}]$ dobivamo

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) = \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} f(t, y(t))\, dt.$$

- Ukoliko podintegralnu funkciju $f(t, y(t))$ zamijenimo interpolacijskim polinomom P_q stupnja q koji interpolira $f(t, y(t))$ u točkama x_i, tj. ako je

$$P_q(x_i) = y'(x_i) = f(x_i, y(x_i)), \quad i = p, p-1, \ldots, p-q,$$

korištenjem interpolacijskog polinoma u Lagrangeovoj formi

$$P_q(x) = \sum_{i=0}^{q} f(x_{p-i}, y(x_{p-i}))\ell_i(x), \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq i}}^{q} \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}},$$

dobivamo

$$y(x_{p+k}) - y(x_{p-j}) \approx \sum_{i=0}^{q} f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} \ell_i(t)\,dt$$
$$= h \sum_{i=0}^{q} \beta_{qi} f(x_{p-i}, y(x_{p-i})),$$

gdje smo, uz substituciju

$$x_{p-l} = x_p - l \cdot h, \quad t = x_p + s \cdot h, \quad dt = h \cdot ds,$$

s β_{qi} označili

$$\beta_{qi} = \frac{1}{h} \int_{x_{p-j}}^{x_{p+k}} \ell_i(t)\,dt = \int_{-j}^{k} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq i}}^{q} \frac{s+l}{-i+l}\,ds, \quad i = 0, \ldots, q.$$

- Zamjenom vrijednosti $y(x_{p-i})$ aproksimacijama y_{p-i} dobivamo višekoračnu metodu oblika

$$y_{p+k} = y_{p-j} + h \sum_{i=0}^{q} \beta_{qi} f_{p-i}.$$

- U **Adams–Bashforthovoj metodi** je $k = 1$ i $j = 0$, pa je ona eksplicitna, $(q+1)$-koračna i glasi:

$$y_{p+1} = y_p + h(\beta_{q0} f_p + \beta_{q1} f_{p-1} + \cdots + \beta_{qq} f_{p-q}).$$

- Sljedeća tablica prikazuje koeficijente β_{qi} za ovu metodu.

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	3	-1			
$12\beta_{2i}$	23	-16	5		
$24\beta_{3i}$	55	-59	37	-9	
$720\beta_{4i}$	1901	-2774	2616	-1274	251

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Izborom $k = 0$ i $j = 1$ dobivamo **Adams–Moultonovu metodu**, koja je implicitna, q-koračna i glasi:

$$y_{p+1} = y_p + h(\beta_{q0} f_{p+1} + \beta_{q1} f_p + \cdots + \beta_{qq} f_{p+1-q}).$$

- Koeficijenti su im prikazani u sljedećoj tablici.

	i				
β_{qi}	0	1	2	3	4
β_{0i}	1				
$2\beta_{1i}$	1	1			
$12\beta_{2i}$	5	8	-1		
$24\beta_{3i}$	9	19	-5	1	
$720\beta_{4i}$	251	646	-264	106	-19

- Sada ćemo definirati **lokalnu pogrešku diskretizacije** za višekoračnu metodu:

$$\tau(x;h) = \frac{1}{h}\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y(x-jh) - \sum_{j=0}^{r} \beta_j y'(x-jh),$$

gdje je y egzaktno rješenje ODJ.

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo konzistentnom *ako za svaki $f \in F_1(a,b)$, $x \in [a,b]$ i $y \in \mathbb{R}$ lokalna pogreška diskretizacije τ zadovoljava*

$$\lim_{h\to 0} \tau(x;h) = 0.$$

Ukoliko je još $f \in F_p(a,b)$ i

$$\tau(x;h) = \mathcal{O}(h^p)$$

kažemo da je metoda reda p.

Primjer

- *Red $(r+1)$-koračne Adams–Bashforthove metode jednak je $r+1$.*
- *Red r-koračne Adams–Moultonove metode za jedan je veći od broja koraka i iznosi $r+1$.*

- Koeficijenti α_j i β_j za dani r određuju se tako da red metode bude što je moguće veći.
- Kod jednokoračnih metoda:

  konzistentnost $\Longrightarrow$ konvergencija

  kod višekoračnih metoda:

  konzistentnost + stabilnost $\Longrightarrow$ konvergencija

Konvergencija linearnih višekoračnih metoda

Višekoračna metoda

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=0}^{r} \beta_j f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$$

definira dva polinoma

$$\rho(z) = \sum_{j=0}^{r} \alpha_j z^{r-j} \qquad \text{i} \qquad \sigma(z) = \sum_{j=0}^{r} \beta_j z^{r-j}.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Definicija

Za višekoračnu metodu kažemo da je **stabilna** *ako nultočke z_j polinoma $\rho(z)$ zadovoljavaju*

1. *Sve nultočke su po apsolutnoj vrijednosti manje od 1* $(|z_j| \leq 1)$.
2. *Ako je* $|z_j| = 1$ *tada je* z_j *jednostruka nultočka* $(\rho'(z_j) \neq 0)$.

Zajedno uvjete 1 i 2 zovemo **uvjet stabilnosti**.

Teorem

Linearna višekoračna metoda je konvergentna ako i samo ako je konzistentna i stabilna.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Napomena

Može se pokazati da stabilna r-koračna metoda ima red

$$p \leq \begin{cases} r+1, & \textit{ako je } r \textit{ neparan,} \\ r+2, & \textit{ako je } r \textit{ paran.} \end{cases}$$

- Konvergencija metode ponovo ovisi o ponašanju **globalne pogreške diskretizacije**:

$$e(x;h) = y_n - y(x),$$

  gdje je $x \in \langle a, b \rangle$, $h = h_n = (x-a)/n$.
- Globalna pogreška diskretizacije ovisi o
  1. lokalnoj pogrešci diskretizacije
  2. r izračunatih početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$.

- Da bismo startali r-koračnu metodu, prvo je potrebno izračunati r početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$.
- Dok y_0 možemo odrediti iz početnog uvjeta diferencijalne jednadžbe, ostale vrijednosti moramo odrediti nekom drugom, najčešće jednokoračnom, metodom.
- Pri njihovom određivanju javit će se pogreška ε_i:

$$y(x_i) = y_i + \varepsilon_i, \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

- Ova pogreška ne ovisi o promatranoj višekoračnoj metodi, već o načinu na koji određujemo početne vrijednosti.
- Očito je, da ako želimo da globalna pogreška diskretizacije teži nuli kada $n \to \infty$, pogreške početnih vrijednosti trebaju zadovoljavati

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_i = 0, \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Definicija

Višekoračnu metodu zovemo konvergentnom ako je

$$\lim_{n\to\infty} e(x; h_n) = 0, \quad h_n = \frac{x-a}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

za sve $x \in [a, b]$, *sve* $f \in F_1(a, b)$ *i sve* y_i, $i = 0, \ldots, r-1$ *za koje je*

$$\lim_{n\to\infty} (y(x_i) - y_i) = 0, \quad i = 0, \ldots, r-1.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Korolar

Neka je linearna višekoračna metoda stabilna i konzistentna reda p, te $f \in F_p(a,b)$. Tada globalna pogreška diskretizacije zadovoljava

$$e(x; h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$$

za sve $h_n = (x - x_0)/n$ čim pogreške ε_i zadovoljavaju

$$|\varepsilon_i| \leq \varepsilon(h_n), \quad i = 0, \ldots, r-1$$

uz $\varepsilon(h_n) = \mathcal{O}(h_n^p)$.

- Ovaj korolar ujedno kazuje koju metodu moramo izabrati za određivanje početnih vrijednosti $y_0, \ldots, y_{r-1}$.
- Iz teorema o konvergenciji jednokoračnih metoda slijedi da možemo izabrati jednokoračnu metodu reda p da bi se pogreška višekoračne metode ponašala kao $\mathcal{O}(h^p)$.

Prediktor–korektor par

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

- Dosad je ostalo otvoreno pitanje kako izračunati y_{i+1} u implicitnoj metodi (korektor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* y_{i+1-j} = \beta_0^* hf(x_{i+1}, y_{i+1}) + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}.$$

- Ako označimo

$$c = -\sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}, \quad \varphi(y) = \beta_0^* hf(x_{i+1}, y) + c,$$

  y_{i+1} je rješenje nelinearne jednadžbe $y = \varphi(y)$.
- Budući da možemo izabrati dovoljno malen korak integracije h takav da je nejednakost

$$|\varphi'(y)| = h|\beta_0^*| \left| \frac{\partial f(x_{i+1}, y)}{\partial y} \right| < 1$$

  zadovoljena, čime je φ kontrakcija, pa

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- slijedi da jednostavne iteracije

$$y^{[m+1]} = \varphi(y^{[m]}), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergiraju prema rješenju jednadžbe.

- Za odabir početne aproksimacije $y^{[0]}$ koristi se neka od eksplicitnih metoda (prediktor)

$$y_{i+1} + \sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} = h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j}.$$

- Sada možemo zapisati cijeli algoritam:

$$
\begin{aligned}
y_{i+1}^{[0]} &= -\sum_{j=1}^{\bar{k}} \alpha_j y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{\bar{k}} \beta_j f_{i+1-j}, \\
y_{i+1}^{[m+1]} &= \beta_0^* h f(x_{i+1}, y_{i+1}^{[m]}) - \sum_{j=1}^{k} \alpha_j^* y_{i+1-j} + h \sum_{j=1}^{k} \beta_j^* f_{i+1-j}, \\
&\qquad m = 0, \ldots, M-1, \\
y_{i+1} &= y_{i+1}^{[M]}.
\end{aligned}
$$

- Broj iteracija (M) može biti unaprijed zadan ili se iteracije provode dok se jednadžba ne riješi do na neku unaprijed zadanu točnost.
- U primjeni, broj iteracije nije velik, uvijek se radi o nekoliko iteracija.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

- Kako odabrati korektor–prediktor par?
- Točnost metode definirana je s točnošću korektora, tj. implicitne metode.
- Uobičajeno je da se za prediktor–korektor par uzimaju eksplicitna i implicitna metoda istoga reda.
- Često korišten par je k-koračna Adams–Bashforthova metoda kao prediktor i $(k-1)$-koračna Adams–Moultonova metoda kao korektor.
- Uz ovakav odabir prediktor-korektor para govorimo o Adams–Bashforth–Moultonovim metodama.

Zadaci

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_pred_kor()` *koja implementira par prediktor–korektor za rješavanje inicijalnog problema za ODJ. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju f*
- *rubove segmenta a i b*
- *početni uvjet y_0*
- *broj podintervala n*
- *broj iteracija korektora m*

i izlazne parametre

- *vektor x duljine $n+1$ s vrijednostima x_i*
- *vektor y duljine $n+1$ s vrijednostima y_i*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Rubni problem

Zadatak (nastavak)

Svoju funkciju implementirajte na sljedeći način.

- *Za prediktor uzmite 4-koračnu Adams–Bashforthovu metodu.*
- *Za korektor uzmite 3-koračnu Adams–Moultonovu metodu.*
- *Za određivanje y_1, y_2 i y_3 iskoristite Runge–Kutta metodu RK-4.*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene

Rubni problem

Zadatak

Svoju funkciju `odj_pred_kor()` *primijenite na prethodni primjer sa problemom*

$$y'(x) = -y(x) - 5e^{-x}\sin(5x), \quad x \in [0,3],$$
$$y(0) = 1$$

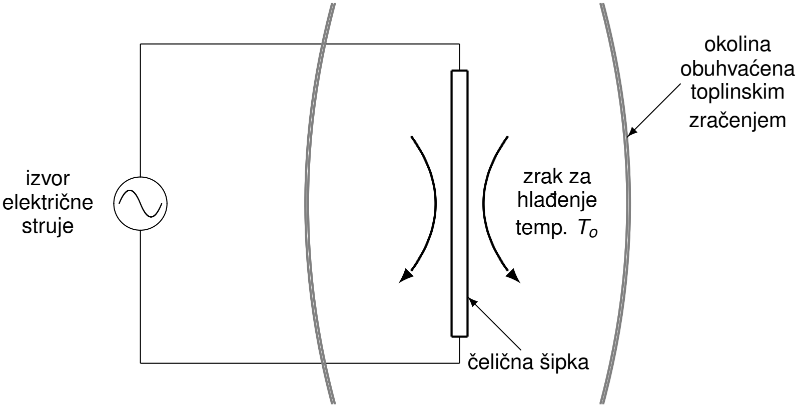
Na isti način prikažite aproksimativno i egzaktno rješenje, te izračunajte maksimalnu grešku.

- *Varirajte parametre n i m.*

Primjeri iz primjene: Termička obrada metalne šipke

Primjer

- *Čvrstoća metala kontrolira se njegovim kemijskim sastavom i postupcima mehaničkog oblikovanja koji su korišteni za njegovo dobivanje.*
- *Nakon što se rastopljeni metal skrutio, ali prije nego što se potpuno ohladio, oblikuje se u poluge, ploče ili šipke.*
- *Zatim, metal se ostavlja da se ohladi i nakon toga se podvrgava pažljivo kontroliranim promjenama temperature u procesu koji se zove* ***termička obrada****.*
- *Jednostavan model termičke obrade je dan nelinearnom ODJ 1. reda za temperaturu metala kao funkcije o vremenu.*



Slika: Termička obrada čelične šipke.

Primjer (nastavak)

- *Čelik se oblikuje u duge šipke, koje se zagrijavaju kako bi se oslobodile naprezanja nastalih za vrijeme postupka oblikovanja.*
- *Šipke se zagrijavaju propuštanjem električne struje kroz njih.*
- *Nakon što šipke dostignu određenu temperaturu, struja se isključuje i uključuju se ventilatori koji ih hlade.*
- *U obje faze grijanja i hlađenja šipke razmjenjuju toplinu s okolinom pomoću konvekcije i zračenja.*
- *Prijenos topline konvekcijom događa se zbog micanja zraka oko šipaka i modeliran je jednadžbom*

$$Q_k = HA_p(T - T_o),$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

gdje je

- Q_k *snaga hlađenja konvekcijom*
- H *empirička konstanta nazvana koeficijent prijenosa topline*
- A_p *površina plašta šipke*
- T *temperatura šipke (uz pretpostavku da je ona uniformna)*
- T_o *temperatura okolnog zraka*

- *Prijenos topline zračenjem događa se posredstvom elektormagnetskih valova u infracrvenom spektru.*
- *Šipke razmjenjuju toplinu sa bilo kojom plohom koje su u vidljivom dosegu.*
- *Pretpostavit ćemo da su sve plohe koje okružuju šipke temperature T_o.*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *Model u tom slučaju glasi*

$$Q_z = \epsilon\sigma A_p(T^4 - T_o^4),$$

gdje je

  - Q_z *snaga hlađenja zračenjem*
  - ϵ *relativna snaga zračenja topline koju ima površina šipke* ($\epsilon \in [0, 1]$)
  - $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} W/(m^2 K^4)$ *Stefan–Boltzmannova konstanta*

- *Kod prijenosa topline zračenjem temperatura mora biti izražena u* $^\circ K$, *a poslije se može prebaciti u* $^\circ C$

$$T(^\circ K) = T(^\circ C) + 273.15$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *U svakom trenutku vremena, ravnoteža energije izražena je sa*

$$mc\frac{dT}{dt} = Q_e - Q_k - Q_z,$$

gdje je

  - t *vrijeme*
  - m *masa šipke*
  - c *specifični toplinski kapacitet*
  - Q_e *snaga topline generirane električnom strujom.*

- *Uvrštavanjem izraza za* Q_k *i* Q_z *u prethodnu jednadžbu dobit ćemo*

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{mc}\{Q_e - A_p[H(T - T_o) + \epsilon\sigma(T^4 - T_o^4)]\}.$$

Primjer (nastavak)

- *Budući da se termička obrada odvija u dvije faze:*
  1. *Uključeno je grijanje električnom strujom i ventilatori su isključeni: Q_k je smanjen jer se hlađenje odvija slobodnom konvekcijom tj. prirodnim strujanjem zraka.*
  2. *Isključena je električna struja (što utječe na Q_e) i uključeni su ventilatori: Q_k je povećan zbog prisilne konvekcije.*
- *Zbog toga imamo sljedeću situaciju*

$$H(t) = \begin{cases} H_1 & \text{za } t < t_h \quad \text{(slobodna konvekcija)} \\ H_2 & \text{za } t \geq t_h \quad \text{(prisilna konvekcija)} \end{cases}$$

gdje je t_h trenutak u kojem je isključeno grijanje i uključeno hlađenje ventilatorima.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak

Izračunjte temeperaturu u ovisnosti o vremenu u modelu toplinske obrade metalne šipke. Parametri modela su sljedeći:

duljina šipke	$l = 1m$
promjer šipke	$\Phi = 1cm$
gustoća čelika	$\rho = 7822\frac{kg}{m^3}$
specifični toplinski kapacitet čelika	$c = 444\frac{J}{kg\cdot{}^\circ K}$
relativna snaga zračenja topline površine	$\epsilon = 0.7$
koeficijenti prijenosa topline	$H_1 = 15\frac{W}{m^2\cdot{}^\circ K}$
	$H_2 = 100\frac{W}{m^2\cdot{}^\circ K}$
temperatura okolnog zraka	$T_o = 21^\circ C$
vrijeme isključenja grijanja i uključenja hlađenja	$t_h = 70s$
ukupno vrijeme simulacije	$210s$
snaga topline generirane električnom strujom	$Q_e = 3000W$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak (nastavak)

- *Napišite M-file funkciju* `term_obrada_funkcija(t,T)` *koja treba implementirati funkciju desne strane u ODJ modela*

$$f(t,T) = \frac{1}{mc}\{Q_e - A_p[H(t)(T - T_o) + \epsilon\sigma(T^4 - T_o^4)]\}$$

sa zadanim parametrima.

- *Kod računanja A_p ne trebate uračunati krajnje kružne plohe.*
- *Problem riješite vašom funkcijom* `odj_rk23()` *za $tol = 10^{-3}$.*
- *Nađite rješenje i sa funkcijom* `odj_rk4()` *pri čemu broj podintervala neka bude isti kao i kod* `odj_rk23()`.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak (nastavak)

- *Nacrtajte oba rješenja na istom grafu sa linijama u različitim bojama, i sa različitim oznakama točaka.*
- *Adekvatno označite osi i legendu.*
- *Koje je rješenje točnije?*
- *U točnost svoga odgovora uvjerite se tako da udvostručite broj podintervala za* `odj_rk4()` *funkciju.*

Model grabežljivca i plijena

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer

- *Promatramo dinamiku populacija dviju međusobno povezanih životinjskih vrsta:*
  1. *plijen (zec) je primarni izvor hrane druge vrste*
  2. *grabežljivac (vuk)*
- *Označimo sa $p_1(t)$ populaciju plijena, a sa $p_2(t)$ populaciju grabežljivca.*
- *Stope prirasta kod obiju populacija možemo prikazati modelom*

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt} &= \alpha_1 p_1 - \delta_1 p_1 p_2\\ \frac{dp_2}{dt} &= \alpha_2 p_1 p_2 - \delta_2 p_2,\end{aligned}$$

gdje su α_1 i α_2 koeficijenti stope rasta, a δ_1 i δ_2 koeficijenti stope mortaliteta.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *U 1. jednadžbi:*
  - *Iraz* $\alpha_1 p_1$ *opisuje plodnost plijena, za koju se pretpostavlja da ovisi samo o dostupnosti partnera.*
  - *Pretpostavlja se da plijen uvijek ima dostupnu dovoljnu količinu hrane.*
  - *Izraz* $\delta_1 p_1 p_2$ *je stopa mortaliteta plijena, koja raste s rastom populacija grabežljivca (jer ih jedu) i rastom same populacije plijena.*
  - *Koeficijent* δ_1 *predstavlja efikasnost u lovu grabežljivaca.*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *U 2. jednadžbi:*
  - *Grabežljivci se reproduciraju u ovisnosti o njihovom broju, ali njihova reprodukcija je ograničena dostupnom hranom (p_1).*
  - *Koeficijent α_2 opisuje i plodnost grabežljivaca, ali i hranjivu vrijednost plijena.*
  - *Mortalitet grabežljivaca raste s rastom populacije grabežljivaca (jer se hrana brže troši).*
- *Početni uvjeti $p_1(0)$ i $p_2(0)$, kao i koeficijenti α_1, δ_1, α_2 i δ_2 moraju doći iz bioloških studija.*
- *Model je idealiziran jer su zanemareni uvjeti iz okoline, poput dostupnosti hrane plijena, bolesti, klima. . .*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak

- *Napišite M-file funkcije* `odj_rk4v()` *i* `odj_rk23v()` *koje će biti vektorske verzije funkcija* `odj_rk4()` *i* `odj_rk23()`*, pogodne za rješavanje sustava od m ODJ.*
- *Parametar y0 je sada stupčani m-dimenzionirani vektor a y je* $m \times (n+1)$ *matrica kod koje je i-ti stupac*

$$y(1:m, i) \approx y(x(i)).$$

- *Napišite M-file funkciju* `grab_plijen_funkcija(t,p)` *koja treba implementirati funkciju desne strane u ODJ modela, i koja vraća stupčani vektor od dva elementa* $\frac{dp_1}{dt}$ *i* $\frac{dp_2}{dt}$.

Zadatak (nastavak)

- *Nađite rješenje sustava modela grabežljivca i plijena sa parametrima*

α_1	*2*
δ_1	*0.02*
α_2	*0.0002*
δ_2	*0.8*
$p_1(0)$	*5000*
$p_2(0)$	*100*

  pomoću metoda `odj_rk4v()` *i* `odj_rk23v()` *u periodu od 30 vremenskih jedinica.*
- *Za* `odj_rk4v()` *uzmite* $n = 300$, *a za* `odj_rk23v()` *uzmite* $tol = 10^{-2}$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak (nastavak)

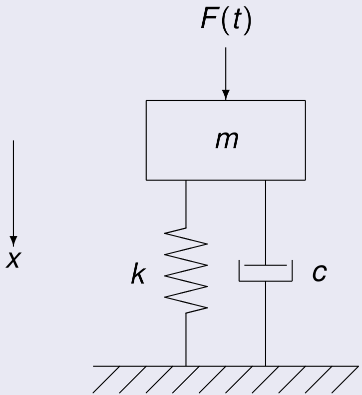
- *Nacrtajte dva grafa na jednoj slici koristeći MATLAB-ovu funkciju* `subplot()`.
- *U gornjem dijelu nacrtajte graf rješenja za plijen (p_1), a u donjem graf rješenja za grabežljivce (p_2).*
- *Kod oba grafa pravilno označite osi, i stavite adekvatne naslove.*

Mehanički sustav

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer

Promatramo mehanički sustav sastavljen od utega, opruge i prigušivača.



Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *Vanjska sila koja ovisi o vremenu primijenjena je na objekt mase m uzrokujući njegovo gibanje.*
- *Opruga djeluje povratnom silom, a prigušivač troši energiju.*
- *Ravnoteža sila koje djeluju na objekt izražena je relacijom*

$$\sum F = ma,$$

gdje je $\sum F$ *suma svih sila koje djeluju na objekt, a a je akceleracija objekta.*
- *Sila opruge djeluje u negativnom* x *smjeru, i proporcionalna je skračenju opruge:*

$$F_{opruga} = -kx,$$

gdje je k *konstanta opruge.*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *Prigušivač se opire kretanju objekta, i sila prigušivača se povećava s brzinom objekta:*

$$F_{prigušivač} = -c\dot{x},$$

gdje je $\dot{x} = dx/dt$ trenutna brzina mase.

- *Uvrštavajući dvije prethodne jednadžbe u jednadžbu ravnoteže sila dobivamo ODJ drugog reda*

$$F(t) - kx - c\dot{x} = m\ddot{x},$$

gdje je $\ddot{x} = d^2x/dt^2$ trenutna akceleracija mase.

- *Prethodna jednadžba se obično piše u obliku*

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F}{m},$$

Primjer (nastavak)

gdje je ζ bezdimenzionalni koeficijent prigušivanja a ω_n je prirodna frekvencija:

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

- *Jednadžbu drugog reda, zapisujemo sada kao ekvivalentni sustav ODJ prvog reda pomoću transformacija:*

$$y_1 = x, \qquad y_2 = \dot{x}.$$

- *Dakle, imamo*

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{F}{m} - 2\zeta\omega_n y_2 - \omega_n^2 y_1. \end{aligned}$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Primjer (nastavak)

- *Postoje mnoge moguće funkcije sile* $F(t)$.
- *Zbog jednostavnosti, koristit ćemo tzv. "step" funkciju koja je ekvivalentna postavljanju dodatne mase* m_s *na vrh objekta mase* m *u jednom trenutku u vremenu.*
- *U tom slučaju iznos sile primijenjene na objekt je* gm_s, *gdje je* $g = 9.8m/s^2$ *akceleracija gravitacije.*
- *Matematički opis step funkcije primijenjene u trenutku* t_0 *je*

$$F(t) = \begin{cases} 0, & za\ t < t_0 \\ F_0 & za\ t \geq t_0. \end{cases}$$

- *U našem slučaju je* $F_0 = ma_0$, *gdje je* $a_0 = g$.

Zadatak

- *Napišite M-file funkciju* `meh_sustav_funkcija(t,y)` *koja treba implementirati funkciju desne strane u sustavu ODJ modela, i koja vraća stupčani vektor od dva elementa* $\frac{dy_1}{dt}$ *i* $\frac{dy_2}{dt}$.
- *Nađite rješenje sustava modela mehaničkog sustava s oprugom i prigušivačem*

a_0	$9.8\frac{m}{s^2}$
ζ	0.1
ω_n	$35\frac{rad}{s}$
$y_1(0) = x(0)$	$0m$
$y_2(0) = \dot{x}(0)$	$0\frac{m}{s}$

pomoću metode `odj_rk23v()` *u periodu od 0 do 1.5 sekundi* ($t_0 = 0$). *Uzmite* $tol = 10^{-5}$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu
Eulerova metoda
Runge–Kutta metode
Konvergencija jednokoračnih metoda
Zadaci
Runge–Kutta–Fehlbergove metode
Zadaci
Implicitna trapezna metoda
Zadaci
Linearne višekoračne metode
Konvergencija linearnih višekoračnih metoda
Prediktor–korektor par
Zadaci
Primjeri iz primjene
Termička obrada metalne šipke

Zadatak (nastavak)

- *Nacrtajte dva grafa na jednoj slici koristeći MATLAB-ovu funkciju* `subplot()`.
- *U gornjem dijelu nacrtajte graf rješenje za* x*, a u donjem graf rješenja za* $\dot{x}$.
- *Kod oba grafa pravilno označite osi, i stavite adekvatne naslove.*

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

- Rubni problemi su općenitiji od inicijalnih problema.
- Kod rubnog problema traži se rješenje $y(x)$ sustava običnih diferencijalnih jednadžbi

$$y' = f(x, y), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad f(x, y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \ldots, y_n) \end{bmatrix},$$

koje zadovoljava rubne uvjete

$$r(y(a), y(b)) = 0,$$

gdje je

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} r_1(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \\ \vdots \\ r_n(u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n) \end{bmatrix}.$$

- Specijalni slučaj su *linearni rubni uvjeti* oblika

$$Ay(a) + By(b) = c,$$

gdje su $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, i $c \in \mathbb{R}^n$. Oni su linearni (odnosno afini) po $y(a)$ i $y(b)$.

- U primjeni su često rubni uvjeti *razdvojeni*:

$$A_1 y(a) = c_1, \quad B_2 y(b) = c_2,$$

tj. reci matrica općenitih linearnih rubnih uvjeta A, B i c mogu se tako izpermutirati da budu oblika

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

- Prema tome, inicijalni problem može se smatrati specijalnim slučajem rubnog problema za

$$A = I, \quad a = x_0, \quad c = y_0, \quad B = 0.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Napomena

Dok za inicijalni problem obično postoji jedinstveno rješenje, rubni problem može imati više rješenja ili niti jedno.

Jednostavna metoda gađanja

- Metodu ćemo objasniti na primjeru rubnog problema

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

sa razdvojenim rubnim uvjetima.

- Za njega znamo da je ekvivalentan 2×2 sustavu $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$, gdje je $y_1 = y$ a $y_2 = y'$.
- S druge strane, inicijalni problem

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s$$

općenito ima jedinstveno rješenje $y(x) = y(x; s)$ koje ovisi o izboru inicijalne vrijednosti s za $y'(a)$.

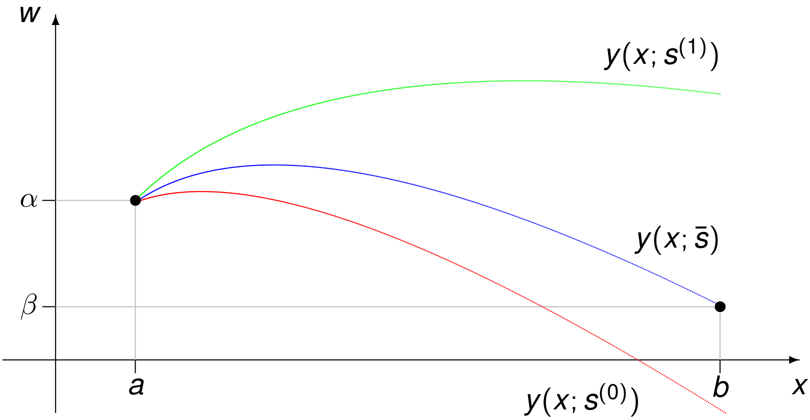
- Kako bismo riješili rubni problem moramo odrediti $s = \bar{s}$ takav da je zadovoljen drugi rubni uvjet

$$y(b) = y(b; \bar{s}) = \beta.$$

- Drugim riječima, moramo naći nultočku $\bar{s}$ funkcije

$$F(s) = y(b; s) - \beta.$$

- Za računanje vrijednosti $F(s)$ za svaki s potrebno je naći rješenje inicijalnog problema.
- Za računanje nultočke $\bar{s}$ od $F(s)$ možemo koristiti bilo koju numeričku metodu:
    - metodu bisekcije
    - Newtonovu metodu



Slika: Jednostavna metoda gađanja. Ako znamo vrijednosti $s^{(0)}$ i $s^{(1)}$ za koje je $F(s^{(0)}) < 0$ i $F(s^{(1)}) > 0$, $\bar{s}$ možemo izračunti pomoću **metode bisekcije**.

- Kako je $y(b;s)$, a onda i $F(s)$ općenito neprekidno diferencijabilna funkcija od s, možemo također koristiti i **Newtonovu metodu** za određivanje $\bar{s}$.
- Počevši od početne aproksimacije $s^{(0)}$, iterativno računamo

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - \frac{F(s^{(i)})}{F'(s^{(i)})}.$$

- $y(b, s^{(i)})$ i $F(s^{(i)})$ mogu se odrediti rješavanjem inicijalnog problema

$$y'' = f(x, y, y'),$$

$$y(a) = \alpha, \quad y'(a) = s^{(i)}.$$

- Derivaciju $F'(s^{(i)})$ aproksimiramo kvocijentom diferencija

$$\Delta F(s^{(i)}) = \frac{F(s^{(i)} + \Delta s^{(i)}) - F(s^{(i)})}{\Delta s^{(i)}},$$

gdje je $\Delta s^{(i)}$ “dovoljno mali”.
- $F(s^{(i)} + \Delta s^{(i)})$ se ponovo dobiva rješavanjem inicijalnog problema.
- Zbog mogućih numeričkih problema, često se uzima

$$\Delta s^{(i)} = \sqrt{\text{eps}} \cdot s^{(i)}.$$

- U ovom konkretnom slučaju kada imamo samo **jednu** diferencijalnu jednadžbu 2. reda, Newtonovu metodu možemo izvesti i **egzaktno**.
- Parcijalno derivirajmo cijelu jednadžbu inicijalnog problema po s, pri čemu dobivamo:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)'' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x;s), y'(x;s))\frac{\partial y}{\partial s}(x;s) + \\ + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x;s), y'(x;s))\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)'(x;s)$$

$$\frac{\partial y}{\partial s}(a;s) = 0, \qquad \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)'(a;s) = 1.$$

- Ovime smo dobili sustav od dvije diferencijalne jedadžbe 2. reda, koje ćemo prikazati kao ekvivalentan sustav od 4 jednadžbe 1.reda, s nepoznanicama $y_1 = y(x;s)$, $y_2 = y'(x;s)$, $y_3 = \frac{\partial y}{\partial s}(x;s)$ i $y_4 = \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)'(x;s)$:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(x, y, y') \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_1, y_2) y_3 + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y_1, y_2) y_4, \end{aligned}$$

s inicijalnim uvjetima

$$y_1(a) = \alpha, \quad y_2(a) = s, \quad y_3(a) = 0, \quad y_4(a) = 1.$$

- Dobivene vrijednosti $y_1(b)$ i $y_3(b)$ su nam potrebne u iteraciji Newtonove metode:

$$
\begin{aligned}
s^{(i+1)} &= s^{(i)} - \frac{F(s^{(i)})}{F'(s^{(i)})} \\
&= s^{(i)} - \frac{y(b; s^{(i)}) - \beta}{\frac{\partial y}{\partial s}(b; s^{(i)})}
\end{aligned}
$$

Primjer

- *Razmatramo rubni problem*

$$y'' = \frac{3}{2}y^2,$$

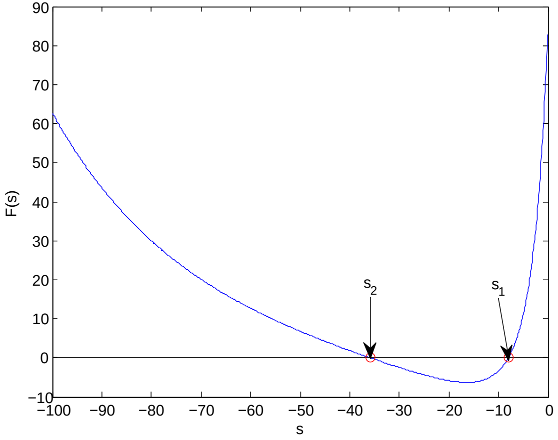
$$y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

- *Rješavamo li ovaj problem metodom gađanja, tada moramo naći rješenja inicijalnih problema*

$$y'' = \frac{3}{2}y^2,$$

$$y(0;s) = 4, \quad y'(0;s) = s.$$

- *Graf funkcije $F(s) = y(1;s) - 1$ prikazan je na sljedećoj slici.*

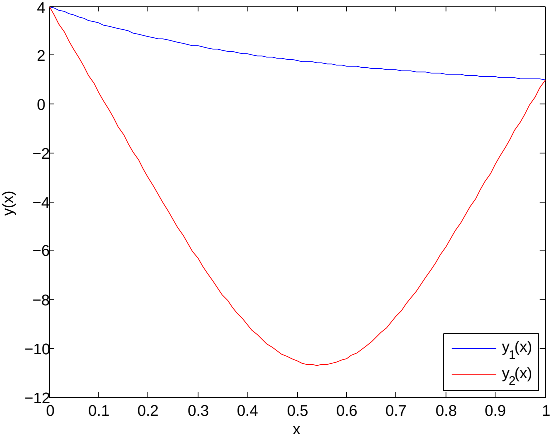

90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
−10
F(s)
−100
−90
−80
−70
−60
−50
−40
−30
−20
−10
0
s
s2
s1

Primjer (nastavak)

- *Može se pokazati da funkcija $F(s)$ ima dvije nultočke $\bar{s}_1$ i $\bar{s}_2$.*
- *Iteracije metoda gađanja, pri kojima inicijalni problem rješavamo egzaktno, dat će*

$$\begin{aligned} \bar{s}_1 &= -8.000\,000\,0000, \\ \bar{s}_2 &= -35.858\,548\,7278, \end{aligned}$$

a odgovarajuća rješenja rubnog problema označit ćemo sa $y_1(x)$ i $y_2(x)$.


4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
x
y(x)
y1(x)
y2(x)

- Za računanje rješenja općenitog rubnog problema sa n nepoznatih funkcija $y_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$

$$y' = f(x, y), \quad y = [\; y_1 \quad \cdots \quad y_n \;]^T,$$

$$r(y(a), y(b)) = 0,$$

gdje su $f(x, y)$ i $r(u, v)$ vektori od n funkcija, postupak je sličan kao u prethodnom primjeru.
- Trebamo naći početni vektor $s \in \mathbb{R}^n$ za inicijalni problem

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = s,$$

takav da rješenje inicijalnog problema $y(x) = y(x; s)$ zadovoljava rubne uvjete

$$r(y(a; s), y(b; s)) = r(s, y(b; s)) = 0.$$

- Znači, moramo naći rješenje $s = [\ s_1 \quad s_2 \quad \cdots \quad s_n\ ]^T$ jednadžbe

$$F(s) = 0, \quad F(s) = r(s, y(b; s)).$$

- Rješenje jednadžbe može se izračunati Newtonovom metodom

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - DF(s^{(i)})^{-1} F(s^{(i)}).$$

- U svakoj iteraciji Newtonove metode moramo
  - naći rješenje $y(x, s^{(i)})$ inicijalnog problema $y' = f(x, y)$, $y(a) = s^{(i)}$,
  - izračunati $F(s^{(i)}) = r(s^{(i)}, y(b; s^{(i)}))$,
  - izračunati $DF(s^{(i)})$ ili neku njegovu aproksimaciju,
  - riješiti sustav linearnih jednadžbi

$$DF(s^{(i)})d^{(i)} = F(s^{(i)}), \quad \text{gdje je } d^{(i)} = s^{(i)} - s^{(i+1)}.$$

- $DF(s^{(i)})$ aproksimiramo pomoću kvocijenata diferencija

$$\Delta F(s) = [\Delta_1 F(s), \ldots, \Delta_n F(s)],$$

gdje su

$$\Delta_j F(s) = \frac{F(s_1, \ldots, s_j + \Delta s_j, \ldots, s_n) - F(s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)}{\Delta s_j}$$

- Računanje $\Delta_j F(s)$ zahtijeva računanje $y(b; s) = y(b; s_1, \ldots, s_n)$ i $y(b; s_1, \ldots, s_j + \Delta s_j, \ldots, s_n)$ za koje trebamo naći rješenja odgovarajućih inicijalnih problema.

- Za linearne rubne uvjete
$$r(u, v) = Au + Bv - c,$$
imamo sljedeću situaciju
$$\begin{aligned} F(s) =& As + By(b; s) - c, \\ DF(s) =& A + BZ(b; s), \end{aligned}$$
gdje je $Z(b; s) = D_s y(b; s)$ matrica sa elementima
$$Z(b; s) = \left[\frac{\partial y_i(b; s)}{\partial s_j} \right].$$
- U ovom slučaju parcijalnu derivaciju od $y(b; s)$ aproksimiramo kvocijentom diferencija

$$\Delta_j y(b; s) = \frac{y(b; s_1, \ldots, s_j + \Delta s_j, \ldots, s_n) - y(b; s_1, \ldots, s_j, \ldots, s_n)}{\Delta s_j}$$

$$\Delta F(s) = A + B\Delta y(b; s), \quad \Delta y(b; s) = [\Delta_1 y(b; s), \ldots, \Delta_n y(b; s)].$$

- Dakle, za izvođenje aproksimativne Newtonove metode

$$s^{(i+1)} = s^{(i)} - \Delta F(s^{(i)})^{-1} F(s^{(i)}),$$

moraju se izvršiti sljedeći koraci:

Algoritam

Izaberi početni vektor $s^{(0)}$
Za $i = 0, 1, 2, \ldots$

1. *nađi* $y(b; s^{(i)})$ *rješavanjem inicijalnog problema* $y' = f(x, y)$, $y(a) = s^{(i)}$, *i izračunaj* $F(s^{(i)}) = r(s^{(i)}, y(b; s^{(i)}))$,
2. *izaberi dovoljno male brojeve* $\Delta s_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$ *i nađi* $y(b; s^{(i)} + \Delta s_j e_j)$ *rješavanjem* n *inicijalnih problema* $y' = f(x, y)$, $y(a) = s^{(i)} + \Delta s_j e_j$, $j = 1, \ldots, n$,
3. *izračunaj* $\Delta F(s^{(i)})$, *nađi rješenje* $d^{(i)}$ *sustava linearnih jednadžbi* $\Delta F(s^{(i)}) d^{(i)} = F(s^{(i)})$ *i definiraj* $s^{(i+1)} = s^{(i)} - d^{(i)}$.

- Dakle, u svakom koraku prethodno opisane metode potrebno je riješiti $n+1$ inicijalni problem i jedan sustav linearnih jednadžbi reda n.
- Za ovu metodu $s^{(0)}$ mora biti dosta blizu rješenju $\bar{s}$ od $F(s) = 0$, inače metoda divergira.
- Još k tome može konvergirati i sporo.
- Još jedan nedostatak metode gađanja je taj da je rješenje inicijalnog problema jako osjetljivo na male promjene u inicijalnom uvjetu, do kojih može doći uslijed grešaka zaokruživanja.

Jednostavna metoda gađanja za linearan rubni problem

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja
Zadaci
Metoda kolokacije
Zadaci
Metoda konačnih diferencija
Zadaci
Primjeri iz primjene

- Zamjenom $DF(s^{(i)})$ sa $\Delta F(s^{(i)})$ obično se gubi kvadratna konvergencija Newtonove metode.
- U specijalnom slučaju *linearnog rubnog problema* vrijedi $DF(s^{(i)}) = \Delta F(s^{(i)})$ za sve s i Δs_j.
- *Linearno* znači da je $f(x, y)$ afina funkcija od y, a rubni uvjeti su linearni:

$$y' = T(x)y + g(x),$$

$$Ay(a) + By(b) = c,$$

sa $n \times n$ matricom $T(x)$, funkcijom $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, i konstantnim $n \times n$ matricama A i B.
- Nadalje pretpostavljamo da su $T(x)$ i $g(x)$ neprekidne funkcije na $[a, b]$.

- Ponovo sa $y(x;s)$ označimo rješenje inicijalnog problema
$$y' = T(x)y + g(x), \quad y(a;s) = s.$$
- Za $y(x;s)$ postoji eksplicitna formula
$$y(x;s) = Y(x)s + y(x;0),$$
gdje je $n \times n$ matrica $Y(x)$ rješenje inicijalnog problema
$$Y' = T(x)Y, \quad Y(a) = I.$$
- Ako označimo $u(x;s) = Y(x)s + y(x;0)$, tada imamo
$$\begin{aligned} u(a;s) =& Y(a)s + y(a;0) = Is + 0 = s \\ D_x u(x;s) =& u'(x;s) = Y'(x)s + y'(x;0) \\ =& T(x)Y(x)s + T(x)y(x;0) + g(x) \\ =& T(x)u(x;s) + g(x), \end{aligned}$$
pa je $u(x;s)$ rješenje inicijalnog problema.

- Budući da, zbog gornjih pretpostavki o $T(x)$ i $g(x)$, inicijalni problem ima jedinstveno rješenje, slijedi da je $u(x;s) = y(x;s)$.
- Za funkciju $F(s)$ imamo

$$F(s) = As + By(b;s) - c = [A + BY(b)]s + By(b;0) - c.$$

- Zbog toga je i $F(s)$ afina funkcija od s.
- Dalje vrijedi

$$DF(s) = \Delta F(S) = A + BY(b) = \Delta F(0).$$

- Rješenje $\bar{s}$ od $F(s) = 0$ (uz pretpostavku da $[\Delta F(0)]^{-1}$ postoji) je dano sa

$$\begin{aligned}\bar{s} = &- [A + BY(b)]^{-1}[By(b;0) - c] \\ =&0 - [\Delta F(0)]^{-1} F(0).\end{aligned}$$

- Ili malo općenitije

$$\bar{s} = s^{(0)} - [\Delta F(s^{(0)})]^{-1} F(s^{(0)}),$$

  gdje je $s^{(0)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ proizvoljan.
- Drugim riječima, rješenje $\bar{s}$ od $F(s) = 0$ a i rješenje linearnog rubnog problema, izračunat će se metodom gađanja u jednoj jedinoj iteraciji sa proizvoljnim početnim vektorom $s^{(0)}$.

Zadaci

Zadatak

Metodom gađanja riješite rubni problem iz prethodnog primjera:

$$y'' = \frac{3}{2}y^2,$$

$$y(0) = 4, \quad y(1) = 1.$$

- *Napišite M-file funkciju* `f=f_2rru(x,y)` *koja implementira funkciju desne strane ekvivalentnog sustava* $\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ *sa dvije ODJ.*
- *Napišite M-file funkciju* `odj_gadjanje_2rru()` *koja implementira samu metodu pomoću RK-4 metode za sustave ODJ inicijalnog problema, i koristi aproksimaciju* $\Delta F(s^{(i)})$ *za* $F'(s^{(i)})$ *u Newtonovim iteracijama.*

Zadatak (nastavak)

Funkcija `odj_gadjanje_2rru()` *neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju f*
- *rubove segmenta a i b*
- *rubne uvjete α i β*
- *početnu aproksimaciju inicijalnog uvjeta $s^{(0)}$*
- *broj ekvidistantnih podintervala n za inicijalni problem.*

Izlazni parametri neka su

- *vektor x duljine $n+1$ s vrijednostima x_i*
- *vektor y duljine $n+1$ s vrijednostima $y_i \approx y(x_i)$*
- *inicijalni uvjet $\bar{s}$, rješenje jednadžbe $F(s) = 0$.*

- *Nacrtajte aproksimaciju rješenja.*

Zadatak

Prethodni zadatak riješite metodom gađanja sa egzaktnim Newtonovim iteracijama.

- *Napišite M-file funkciju* `odj_gadjanje_2rru_en()` *koja implementira samu metodu pomoću RK-4 metode za sustave ODJ inicijalnog problema.*
- *Ova funkcija neka ima sve iste ulazne i izlazne parametre kao* `odj_gadjanje_2rru()` *uz još dva dodatna ulazna parametra:*
  - *pokazivač na funkciju dfy, koja za* $f(x, y, y') = \mathbf{f}_2(x, \mathbf{y})$ *funkciju desne strane originalne diferencijalne jednadžbe 2. reda predstavlja* $\frac{\partial f}{\partial y}$*,*
  - *pokazivač na funkciju dfdy, koja predstavlja* $\frac{\partial f}{\partial y'}$*.*
- *Usporedite broj Newtonovih iteracija u obje metode iz ovog i prethodnog zadatka, za postizanje iste točnosti, sa istim brojem podintervala n i istom inicijalnom vrijednosti* $s^{(0)}$*.*

Zadatak

Metodom gađanja riješite linearan rubni problem

$$y' = T(x)y + g(x),$$

$$Ay(a) + By(b) = c,$$

zadan sljedećim parametrima:

$$T(x) = \begin{bmatrix} x & 0 & -x^2 \\ 2x^3 - x & 3x^2 - 2x + 1 & -4x - 2 \\ -3x^3 + 2 & 2x^3 + x^2 - 3x & 2x \end{bmatrix},$$

$$g(x) = \begin{bmatrix} -2x^2 + 5x - 3 \\ x + 3 \\ -x^3 + 1 \end{bmatrix},$$

Zadatak (nastavak)

$$a = 0, \qquad b = 2,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Napišite M-file funkciju `odj_gadjanje_linrp()` *koja implementira metodu gadjanja pomoću RK-4 metode za sustave ODJ inicijalnog problema. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivač na funkciju T koja implementira $T(x)$*
- *pokazivač na funkciju g koja implementira $g(x)$*
- *rubove segmenta a i b*
- *matrice iz rubnih uvjeta A, B i c*
- *broj ekvidistantnih podintervala n za inicijalni problem.*

Zadatak (nastavak)

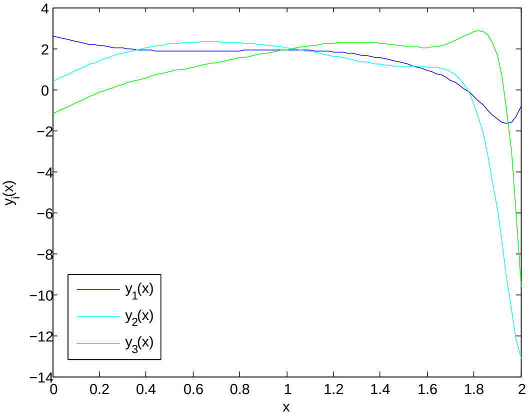
Izlazni parametri neka su

- *vektor* x *duljine* $n+1$ *s vrijednostima* x_j
- $m \times (n+1)$ *matrica* y *čiji* (i,j)*-ti element sadrži vrijednost* $y_{i,j} \approx y_i(x_j)$, *gdje je* $y = \begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_m \end{bmatrix}^T$,
- *inicijalni uvjet* $\bar{s}$, *rješenje jednadžbe* $F(s) = 0$.

Za rješavanje inicijalnog problema

$$Y' = T(x)Y, \quad Y(a) = I,$$

također koristite RK-4 metodu za sustave ODJ inicijalnog problema, s time da rješavate stupac po stupac.



Slika: Komponente rješenja prethodnog zadatka.

Metoda kolokacije

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Rješavamo jedan važan tip rubnog problema za funkciju $u : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x, u(x)),$$
$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta.$$

- Pod pretpostavkama

$$\begin{aligned} &p \in C^1[a, b], && p(x) \geq p_0 > 0, \\ &q \in C[a, b], && q(x) \geq 0, \\ &g \in C^1([a, b] \times \mathbb{R}), && \frac{\partial g}{\partial u}(x, u) \leq \lambda_0, \end{aligned}$$

gdje je λ_0 najmanja svojstvena vrijednost svojstvenog problema

$$-(pz')' - (\lambda - q)z = 0, \quad z(a) = z(b) = 0,$$

gornji rubni problem uvijek ima jedinstveno rješenje.

- Ako je $u(x)$ rješenje danog rubnog problema, tada je $y(x) = u(x) - \ell(x)$, gdje

$$\ell(x) = \alpha \frac{b-x}{b-a} + \beta \frac{a-x}{a-b}, \quad \ell(a) = \alpha, \; \ell(b) = \beta,$$

rješenje rubnog problema oblika

$$-(py')' + qy = f,$$

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0,$$

sa trivijalnim rubnim uvjetima, gdje f ovisi o g i ℓ.

- Bez smanjenja općenitosti možemo promatrati rubne probleme sa trivijalnim rubnim uvjetima.
- Dalje možemo definirati diferencijalni operator

$$L(v) = -(pv')' + qv.$$

- L preslikava skup

$$D_L = \{v \in C^2[a,b] : v(a) = 0, v(b) = 0\}$$

svih realnih funkcija dva puta neprekidno diferencijabilnih na $[a,b]$ i koje zadovoljavaju rubne uvjete $v(a) = v(b) = 0$ u skup $C[a,b]$ neprekidnih funkcija na $[a,b]$.

- Rubni problem sa trivijalnim rubnim uvjetima je stoga ekvivalentan traženju rješenja problema

$$L(y) = f, \quad y \in D_L.$$

- Lako se provjeri da je D_L realni vektorski prostor, a L je linearni operator na D_L.

- Za metodu kolokacije biramo konačnodimenzionalan podskup $S \subset D_L$ funkcija koje zadovoljavaju trivijalne rubne uvjete.
- Zatim pokušavamo aproksimirati rješenje y pomoću funkcije $v(x) \in S$ reprezentirane kao
$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,$$
gdje je $\{v_1, \ldots, v_m\}$ baza od S.
- U tu svrhu biramo m različitih *kolokacijskih točaka* $x_i \in \langle a, b\rangle$, $i = 1, \ldots, m$ i tražimo $v \in S$ takav da je
$$(Lv)(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \ldots, m.$$
- To je ekvivalentno rješavanju sljedećeg sustava linearnih jednadžbi za koeficijente α_j, $j = 1, \ldots, m$:
$$\sum_{j=1}^{m} L(v_j)(x_i)\alpha_j = f(x_i), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Dakle rješavamo sustav $Ax = b$ gdje su

$$A = \begin{bmatrix} L(v_1)(x_1) & L(v_2)(x_1) & \cdots & L(v_m)(x_1) \\ L(v_1)(x_2) & L(v_2)(x_2) & \cdots & L(v_m)(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(v_1)(x_m) & L(v_2)(x_m) & \cdots & L(v_m)(x_m) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}.$$

- Postoje razni izbori baza za S i kolokacijski točaka kod implementacije ove metode:
  - B-splajnovi
  - trigonometrijski polinomi — *spektralna metoda*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

- U ovom slučaju biramo podjelu intervala $[a, b]$ na podintervale određene točkama

$$a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b,$$

pri čemu označavamo $\mathbf{s} = \{s_0, \ldots, s_n\}$.

- Najprije definirajmo skup

$$\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}} = \{v \in C^2[a, b] : v|_{\langle s_i, s_{i+1}\rangle} \in \mathbb{P}_3(\langle s_i, s_{i+1}\rangle), i = 0, \ldots, n-1\},$$

po dijelovima polinomnih funkcija stupnja 3, dva puta neprekidno diferencijabilnih.

- Mi ćemo birati skup S kao

$$S = \{v \in \mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}} : v(a) = 0, v(b) = 0\}.$$

- Definirajmo sada **čvorove** B-splajnova u našem slučaju kao

$$t_0 = t_1 = t_2 = t_3 = s_0,$$

$$t_4 = s_1,\ t_5 = s_2,\ \ldots\ , t_{n+2} = s_{n-1},$$

$$t_{n+3} = t_{n+4} = t_{n+5} = t_{n+6} = s_n,$$

pri čemu označavamo sa $N = n + 6$ i $\mathbf{t} = \{t_0, \ldots, t_N\}$,

$$\mathbf{t} = \{s_0, s_0, s_0, s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}, s_n, s_n, s_n, s_n\}.$$

- Može se pokazati da je $\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}}$ vektorski prostor dimenzije

$$d + 1 = \dim(\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}}) = N - 3 = n + 3,$$

i da je njegovu bazu čine B-splajnovi $B_{0,3}, \ldots, B_{d,3}$ određeni čvorovima $\mathbf{t}$.

Definicija (de Boor – Coxova rekurzija)

- *Neka je* $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_N$ *niz realnih brojeva.*
- *Za* $k = 0, \ldots, N-1$ *i* $i = 0, \ldots, N-k-1$

definiramo i-ti (normalizirani) B-splajn stupnja k kao

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } t \in [t_i, t_{i+1}\rangle \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

a za $k > 0$

$$B_{i,k}(t) = \begin{cases} \frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1}-t}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(t), & \text{za } t_i < t_{i+k+1} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- U slučaju da je $t_{i+k} - t_i = 0$ ili $t_{i+k+1} - t_{i+1} = 0$ odgovarajući izraz u rekurziji se uopće ne računa.

- Ako želimo neprekidnost i na desnom rubu domene moramo modificirati de Boor – Coxovu rekurziju.

Definicija

Neka je zadan vektor čvorova $\{t_i\}_{i=0}^{N}$*, i pretpostavimo da je* $j = \max\{i : t_i < t_{i+1}, i \in \{0, \ldots, N-1\}\}$*. Definiramo*

$$B_{i,0}(t) = \begin{cases} 1, & \text{za } t \in [t_i, t_{i+1}\rangle,\ i < j \\ 1, & \text{za } t \in [t_j, t_{j+1}],\ i = j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ova modifikacija utječe samo na zadnji netrivijalni B-splajn svih stupnjeva, koji time postaje neprekidan u desnom rubu domene. $B_{N-k-1,k}(t_{N-k}) = 1$.

Svojstva B-splajnova

Lema

Ako je $t < t_i$ ili $t \geq t_{i+k+1}$, tada je $B_{i,k}(t) = 0$, tj. $B_{i,k}(t)$ može biti različit od 0 samo na intervalu $[t_i, t_{i+k+1}\rangle$.

Lema

$$B_{i,k}(t) > 0 \quad za \quad t \in \langle t_i, t_{i+k+1}\rangle.$$

Konkretinije, $B_{i,k}(t_{i+k+1}) = 0$, a $B_{i,k}(t_i)$ može biti jednak ili različit 0, ovisno o čvorovima.

Korolar

Ako je $t \in \langle t_j, t_{j+1}\rangle$, za $t_j < t_{j+1}$, i $i \in \{j-k, j-k+1, \ldots, j\}$ tada je $B_{i,k}(t) > 0$ za njih ukupno $k+1$

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Možemo zaključiti da B-splajnovi imaju ograničene nosače, što predstavlja poželjno svojstvo jer će matrica sustava kolokacije biti vrpčasta.

Lema

Za vektor čvorova $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ *i za* $t \in [t_k, t_{N-k}\rangle$ *vrijedi*

$$\sum_{i=0}^{N-k-1} B_{i,k}(t) = 1, \quad \text{za sve } k \geq 0.$$

Dalje, za $t < t_k$ *ili* $t > t_{N-k}$ *je*

$$\sum_{i=0}^{N-k-1} B_{i,k}(t) < 1.$$

Teorem

Ako je $B_{i,k}(t)$ B-splajn stupnja k definiran na vektoru čvorova $\mathbf{t}$, tamo gdje derivacija postoji (između čvorova i ponekad u samim čvorovima) ona se može izračunati pomoću izraza

$$B'_{i,k}(t) = k\left(\frac{B_{i,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_i} - \frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k+1}-t_{i+1}}\right).$$

Rekurzija za drugu derivaciju dobiva se deriviranjem gornjeg izraza.

Korolar

Ako je zadan vektor čvorova $\{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_{i+k+1}\}$ koji ima različite rastuće vrijednosti $\{s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}\}$, pri čemu se svaka od njih ponavlja sa multiplicitetima $\{m_{i_1}, \ldots, m_{i_n}\}$, tada je $B_{i,k} \in C^{(k-m_{i_j})}$ u s_{i_j}.

Korolar

Za vektor čvorova $\mathbf{t} = \{t_i\}_{i=0}^{d+k+1}$ *takav da je* $t_0 = \cdots = t_k$ *i* $t_{d+1} = \cdots = t_{d+k+1}$ *funkcija*

$$v(t) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i B_{i,k}(t)$$

interpolira $v(t_k) = \alpha_0$ *i* $v(t_{d+1}) = \alpha_d$.

Teorem

Ako je $k \geq 0$ *cijeli broj, a* $\mathbf{t}$ *je vektor čvorova sa* $d + k + 2$ *elemenata,* $k \leq d$*, tada je* $\{B_{i,k,\mathbf{t}}, i = 0, \ldots, d\}$ *linearno nezavisan skup u* $\mathbb{PP}_{k,\mathbf{s},\mathbf{m}}$ *i čini njegovu bazu.*
($N = d + k + 1$, $\mathbf{m} = \{m_0, \ldots, m_n\}$*)*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Prethodno opisana svojstva B-splajnova koristit će nam za računanje koeficijenata α_j u rastavu funkcije v:

$$v(x) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{j,k}(x).$$

- Samo izvrednjavanje funkcije v u nekoj točci x može se tada pojednostavniti rekurzivnim de Boorovim algoritmom.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Algoritam (de Boorov rekurzivni algoritam za B-splajnove)

Za definiranje po dijelovima polinomne funkcije $v(x)$ stupnja k, potrebno je da je domena krivulje jednaka $[t_k, t_{N-k}\rangle$.

1. $\alpha_i^{[0]} = \alpha_i$.
2. *Za dani $x \geq t_k$, nađi j takav da je $x \in [t_j, t_{j+1}\rangle$.*
3. *Za $\ell = 1, \ldots, k$*

   za $i = j - k + \ell, \ldots, j$

$$\alpha_i^{[\ell]} = \frac{x - t_i}{t_{i+k+1-\ell} - t_i}\alpha_i^{[\ell-1]} + \frac{t_{i+k+1-\ell} - x}{t_{i+k+1-\ell} - t_i}\alpha_{i-1}^{[\ell-1]}.$$

4. $v(x) = \alpha_j^{[k]}$.

Obratite pažnju da ovaj algoritam možete implementirati pomoću jednodimenzionalnog polja `alpha`, ako unutarnju petlju po `i` izvrtite unazad.

Upotreba kubičnih splajnova u metodi kolokacije

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Metoda kolokacije sa kubičnim B-splajnovima

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Budući da je nosač kubičnog B-splajna $B_{3,i}$ sadržan unutar $[t_i, t_{i+4}\rangle$, to isto vrijedi i za $L(B_{3,i})$.
- Dalje, u svakoj točci $x \in \langle a, b\rangle$ najviše 4 B-splajna poprima netrivijalnu vrijednost, to znači da matrica A ima najviše 4 netrivijalna elementa u jednom retku.
- Dimenzija od $\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}}$ je $d+1 = n+3$, što znači da imamo $n+3$ koeficijenta α_j, $j = 0, \ldots, n+2 = d$ za odrediti.
- Za to su nam potrebne $n+3$ kolokacijske točke.
- S druge strane, za zadane čvorove $\mathbf{t}$, znamo da vrijedi $t_3 = a$ i $t_{d+1} = t_{n+3} = b$ i
$$v(a) = \alpha_0, \quad v(b) = \alpha_d,$$
što možemo odrediti iz rubnih uvjeta.
- Dakle, preostaje nam odrediti još $n+1$ koeficijenata u $n+1$ kolokacijskih točaka unutar $\langle a, b\rangle$.

- Ako izaberemo kolokacijske točke
$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_{n+1} \in \langle a, b\rangle,$$
onda je za regularnost matrice A nužno da svaki B-splajn $B_{j,3}$ sadrži unutar nosača bar jednu kolokacijsku točku x_{i_j} i da su sve x_{i_j} međusobno različite za $j = 0, \ldots, d$ (kako A ne bi imala nul-stupac).
- Ako rubni problem ima netrivijalne rubne uvjete $v(a) = \alpha$ i $v(b) = \beta$, tada rješavamo $(n+3) \times (n+3)$ sustav $Ax = b$ sa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ L(B_{0,3})(x_1) & L(B_{1,3})(x_1) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_1) & L(B_{n+2,3})(x_1) \\ L(B_{0,3})(x_2) & L(B_{1,3})(x_2) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_2) & L(B_{n+2,3})(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ L(B_{0,3})(x_{n+1}) & L(B_{1,3})(x_{n+1}) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_{n+1}) & L(B_{n+2,3})(x_{n+1}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \\ \alpha_{n+2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \\ \beta \end{bmatrix}.$$

- Ako rubni problem ima trivijalne rubne uvjete $v(a) = v(b) = 0$, tada je

  $$0 = v(a) = \alpha_0, \quad 0 = v(b) = \alpha_d,$$

  što znači da je skup S potprostor od $\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}}$ i njegova dimenzija je

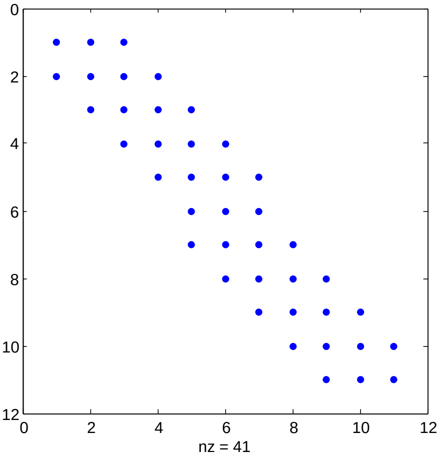
  $$\dim(S) = \dim(\mathbb{PP}_{3,\mathbf{s}}) - 2 = n + 1,$$

  a upravo toliko ima i kolokacijskih točaka.
- Bazu prostora S čine $B_{j,3}$, $j = 1, \ldots, n+1$.

- U tom slučaju rješavamo $(n+1) \times (n+1)$ sustav $Ax = b$ sa

$$A = \begin{bmatrix} L(B_{1,3})(x_1) & L(B_{2,3})(x_1) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_1) \\ L(B_{1,3})(x_2) & L(B_{2,3})(x_2) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L(B_{1,3})(x_{n+1}) & L(B_{2,3})(x_{n+1}) & \cdots & L(B_{n+1,3})(x_{n+1}) \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n+1}) \end{bmatrix}.$$



Slika: Raspored netrivijalnih elemenata u matrici A za jedan primjer rubnog problema sa trivijalnim rubnim uvjetima.

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `deBoor_Cox()` *koja implementira de Boor–Coxovu rekurziju za izvrednjavanje B-splajna* $B_{i,k}$ *u točci* x. *Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *točku* x
- *čvorove B-splajnova* t
- *stupanj B-splajnova* k
- *indeks* i

i izlazne parametre

- y *vrijednost B-splajna* $B_{i,k}(x)$
- dy *vrijednost derivacije B-splajna* $B'_{i,k}(x)$
- $d2y$ *vrijednost 2. derivacije B-splajna* $B''_{i,k}(x)$

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_kolokacija_kBs_Ab()` *koja računa matricu A i vektor b za metodu kolokacije sa kubičnim B-splajnovima, uz pomoć funkcije* `deBoor_Cox()`*. A i b neka budu definirani za rubni problem sa trivijalnim rubnim uvjetima. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *čvorove B-splajnova t*
- *kolokacijske točke x*
- *pokazivač na funkciju* $L = L(x, y, y', y'')$ *koja implementira diferencijalni operator*
- *pokazivač na funkciju* $f = f(x)$ *desne strane ODJ*

i izlazne parametre

- *matricu A*
- *vektor b*

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Zadatak

Napišite M-file funkciju `deBoor()` *koja implementira de Boorov algoritam za izvrednjavanje po dijelovima polinomne funkcije* $v(x) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{j,k}(x)$ *u točci* x. *Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *točku* x
- *čvorove B-splajnova* t
- *stupanj B-splajnova* k
- *parametre* α_j *spremljene u* $d+1$*-dimenzionalno polje* *alpha*

i izlazni parametar

- v *vrijednost funkcije* $v(x)$

Zadatak

Pomoću metode kolokacije sa kubičnim B-splajnovima riješite sljedeći rubni problem

$$-y'' + 400y = -400\cos^2(\pi x) - 2\pi^2\cos(2\pi x),$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

- *Rubovi podintervala neka su zadani sa* $s_i = 0.1 \cdot i$, *za* $i = 0, 1 \ldots, 10$.
- *Kolokacijske točke neka su* $x_i = i/12$, *za* $i = 1, \ldots, 11$.
- *Pomoću funkcije* `odj_kolokacija_kBs_Ab()` *izračunajte A i b.*
- *Riješite sustav* $Ax = b$, *pri čemu je* $alpha = A^{-1}b$.

Zadatak (nastavak)

- *Vektoru alpha dodajte* $\alpha_0 = 0$ *na početak, i* $\alpha_{n+2} = 0$ *na kraj (da bi funkcionirao de Boorov algoritam).*
- *Definirajte funkciju*

$$v(x) = \texttt{deBoor}(x, t, 3, alpha).$$

- *Definirajte funkciju*

$$y(x) = \frac{e^{-20}}{1+e^{-20}} e^{20x} + \frac{1}{1+e^{-20}} e^{-20x} - \cos^2(\pi x),$$

koja predstavlja egzaktno rješenje danog rubnog problema.

Zadatak (nastavak)

- *Na istoj slici nacrtajte grafove funkcija $y(x)$ i $v(x)$ u različitim bojama, sa prikladnom legendom. Koristite MATLAB-ovu funkciju* `fplot()` *u oba slučaja.*
- *Izračunajte maksimalnu grešku u kolokacijskim točkama.*

Metoda konačnih diferencija

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

- Osnovna ideja ove metode je zamjena derivacija u ODJ pogodnim kvocijentima diferencija, i rješavanje dobivenih diskretnih jednadžbi.
- Metodu ćemo ilustrirati na sljedećem rubnom problemu drugog reda za $y : [a, b] \to \mathbb{R}$:

$$-y'' + q(x)y = g(x)$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

- Pod pretpostavkama da

$$\begin{aligned} &q, g \in C[a, b] \\ &q(x) \geq 0, \qquad\qquad x \in [a, b] \end{aligned}$$

može se pokazati da gornji rubni problem ima jedinstveno rješenje $y(x)$.

- Kako bismo diskretizirali ODJ, segment $[a, b]$ dijelimo u $n+1$ jednakih podintervala

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b, \quad x_j = a+jh, \; h = \frac{b-a}{n+1},$$

  i označavamo $y_j = y(x_j)$, $y_j' = y'(x_j)$ i $y_j'' = y''(x_j)$, za $j = 1, \ldots, n$.
- 1. derivaciju možmo aproksimirati na dva načina:
  - **diferencijom unazad**

$$y_j' \approx \Delta_- y_j = \frac{y_j - y_{j-1}}{h},$$

  - **diferencijom unaprijed**

$$y_j' \approx \Delta_+ y_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{h}.$$

- Druga derivacija se najčešće aproksimira kombinacijom ovih dviju diferencija, i tako dobivena aproksimacija zove se **centralna diferencija**:

$$y_j'' \approx \Delta^2 y_j = \frac{\frac{y_{j+1}-y_j}{h} - \frac{y_j - y_{j-1}}{h}}{h} = \\ = \frac{y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}}{h^2}.$$

- Sada ćemo procijeniti grešku

$$\tau_j(y) = y''(x_j) - \Delta^2 y_j.$$

- Pretpostavit ćemo da je $y \in C^4[a,b]$.
- Tada iz Taylorovog razvoja od $y(x_j \pm h)$ oko x_j dobivamo

$$y_{j\pm1} = y_j \pm h y_j' + \frac{h^2}{2!} y_j'' \pm \frac{h^3}{3!} y_j''' + \frac{h^4}{4!} y^{(4)}(x_j \pm \theta_j^{\pm} h), \\ 0 < \theta_j^{\pm} < 1.$$

- Zbog toga je

$$\Delta^2 y_j = y_j'' + \frac{h^2}{24}[y^{(4)}(x_j + \theta_j^+ h) + y^{(4)}(x_j - \theta_j^- h)].$$

- Budući da je $y^{(4)}$ još uvijek neprekidna, slijedi da je

$$\tau_j(y) = y''(x_j) - \Delta^2 y_j = -\frac{h^2}{12} y^{(4)}(x_j + \theta_j h),$$

za neki $|\theta_j| < 1$.

- Iz danog rubnog problema slijedi da $y_j = y(x_j)$ zadovoljavaju jednadžbe

$$\begin{aligned} y_0 &= \alpha, \\ \frac{-y_{j-1} + 2y_j - y_{j+1}}{h^2} + q(x_j)y_j &= g(x_j) + \tau_j(y), \quad j = 1, \ldots, n, \\ y_{n+1} &= \beta. \end{aligned}$$

- Uz oznake $q_j = q(x_j)$ i $g_j = g(x_j)$, i definicije vektora

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau}(y) = \begin{bmatrix} \tau_1(y) \\ \tau_2(y) \\ \vdots \\ \tau_n(y) \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} g_1 + \frac{\alpha}{h^2} \\ g_2 \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n + \frac{\beta}{h^2} \end{bmatrix},$$

i simetrične $n \times n$ tridijagonalne matrice

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + q_1 h^2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 + q_2 h^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 + q_n h^2 \end{bmatrix}$$

prethodne jednadžbe ekvivalentne su matričnoj jednadžbi

$$A\mathbf{y} = c + \tau(y).$$

- Metoda konačnih diferencija se sastoji u tome da se iz gornje jednadžbe izbaci izraz $\tau(y)$, pa se prema tome traži rješenje $u = [\ u_1 \quad \cdots u_n\ ]^T$ sustava linearnih jednadžbi

$$Au = c,$$

kao aproksimacija za **y**.

Teorem

Ako je $q_j \geq 0$ za $j = 1, \ldots, n$ tada je matrica A pozitivno definitna, i vrijedi $0 \leq A^{-1} \leq A_0^{-1}$ (nejednakost je po elementima), gdje je A_0 pozitivno definitna $n \times n$ matrica oblika

$$A_0 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- Iz ovog teorema slijedi da sustav $Au = c$ ima jedinstveno rješenje za $q(x) \geq 0$ i $x \in [a, b]$, koje se jednostavno može izračunati metodom Choleskog sa malim brojem operacija ili metodom konjugiranih gradijenata.

Teorem

Neka dani rubni problem ima rješenje $y(x) \in C^4[a,b]$, *i neka je* $|y^{(4)}(x)| \leq M$ *za* $x \in [a,b]$. *Neka je još* $q(x) \geq 0$ *za* $x \in [a,b]$, *i* $u = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots u_n \end{bmatrix}^T$ *neka je rješenje sustava* $Au = c$. *Tada za* $i = 1, \ldots, n$ *vrijedi*

$$|y(x_i) - u_i| \leq \frac{Mh^2}{24}(x_i - a)(b - x_i).$$

- Uz pretpostavke teorema greška metode teži ka 0 kao h^2, dakle metoda je reda 2.

Zadaci

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Zadatak

Napišite M-file funkciju `odj_diferencije_Ac()` *koja računa matricu A i vektor c za metodu konačnih diferencija. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *pokazivače na funkcije q i g*
- *rubove segmenta a i b*
- *rubne uvjete* α *i* β
- *vektor x koji sadrži rubove podsegmenata* x_i $i = 0, \ldots, n+1$

i izlazne parametre

- *matricu A*
- *vektor c*

Zadatak

Pomoću metode konačnih diferencija riješite sljedeći rubni problem

$$-y'' + 400y = -400\cos^2(\pi x) - 2\pi^2\cos(2\pi x),$$

$$y(0) = y(1) = 0.$$

- *Rubovi podintervala neka su zadani sa* $x_i = 0.1 \cdot i$, *za* $i = 0, 1 \ldots, 10$.
- *Pomoću funkcije* `odj_diferencije_Ac()` *izračunajte* A *i* c.
- *Riješite sustav* $Au = c$.

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Zadatak (nastavak)

- *Vektoru u dodajte* α *na početak, i* β *na kraj.*
- *Definirajte funkciju*

$$y(x) = \frac{e^{-20}}{1+e^{-20}} e^{20x} + \frac{1}{1+e^{-20}} e^{-20x} - \cos^2(\pi x),$$

  koja predstavlja egzaktno rješenje danog rubnog problema.
- *Na istoj slici nacrtajte graf funkcije* $y(x)$ *i točke* u_i*,* $i = 0, \ldots, 10$ *u različitim bojama, sa prikladnom legendom.*
- *Izračunajte maksimalnu grešku* $\max_i |u_i - y(x_i)|$*.*

Primjeri iz primjene: Distribucija temperature unutar cilindra

Znanstveno računanje 2

Nela Bosner

Inicijalni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Rubni problem za običnu diferencijalnu jednadžbu

Jednostavna metoda gađanja

Zadaci

Metoda kolokacije

Zadaci

Metoda konačnih diferencija

Zadaci

Primjeri iz primjene

Distribucija temperature unutar cilindra

Primjer

- *Temperatura stacionarnog stanja unutar cilindra radijusa 1 opisana je kao rješenje $y(x;\alpha)$ nelinearnog rubnog problema*

$$y'' = -\frac{y'}{x} - \alpha e^{y},$$

$$y'(0) = y(1) = 0.$$

- *Ovdje je α "prirodni" parametar definiran kao*

$$\alpha = \frac{\textit{generiranje topline}}{\textit{konduktivitet}}, \quad 0 < \alpha \leq 0.8.$$

Zadatak

Riješite ovaj primjer metodom gađanja sa $s_0 = 1$. Potrebno je samo malo preraditi metodu `odj_gadjanje_2rru()`.

Primjer (nastavak)

- *Ovaj zadatak, ovako zadan, u principu ne da se riješiti metodom gađanja jer funkcija desne strane ODJ ima singularitet u* $x = 0$*, pa RK4 puca odmah u 1. koraku.*
- *Iako je rješenje* $y(x; \alpha)$ *analitička funkcija na cijelom segmentu* $[0, 1]$*, kod rješavanja rubnog problema dolazi do problema u konvergenciji.*
- *Razlog gubitka konvergencije metode gađanja nije u samoj metodi već u polaznom rubnom problemu.*
- *Međutim, sa malo lukavstva ovaj problem se može izbjeći tako da rješenje* $y(x)$ *razvijemo u Taylorov red oko* $x = 0$*:*

$$y(x) = y(0) + \frac{x^2}{2!}y^{(2)}(0) + \frac{x^3}{3!}y^{(3)}(0) + \frac{x^4}{4!}y^{(4)}(0) + \cdots,$$

jer je $y'(0) = 0$*.*

Primjer (nastavak)

- *Koeficijenti* $y^{(i)}(0)$, $i = 2, 3, 4, \ldots$ *mogu se izraziti preko izraza* $\lambda = y(0)$ *koji predstavlja nepoznatu konstantu.*
- *Iz ODJ rubnog problema slijedi*

$$y^{(2)}(x) = -\left(y^{(2)}(0) + \frac{x}{2!}y^{(3)}(0) + \frac{x^2}{3!}y^{(4)}(0) + \cdots\right) - \alpha e^{y(x)},$$

a kada pustimo $x \to 0$ *dobivamo*

$$y^{(2)}(0) = -y^{(2)}(0) - \alpha e^{y(0)},$$

odnosno

$$y^{(2)}(0) = -\frac{1}{2}\alpha e^{\lambda}.$$

Primjer (nastavak)

- *Daljnje deriviranje daje*

$$y^{(3)}(x) = -\left(\frac{1}{2}y^{(3)}(0) + \frac{x}{3}y^{(4)}(0) + \cdots\right) - \alpha y'(x)e^{y(x)},$$

tako da je

$$y^{(3)}(0) = 0.$$

- *Još jedanputa deriviramo i ostaje nam*

$$y^{(4)}(x) = -\left(\frac{1}{3}y^{(4)}(0) + x(\cdots)\right) - \alpha\left[\left(y'(x)\right)^2 + y^{(2)}(x)\right]e^{y(x)},$$

odakle je

$$y^{(4)}(0) = \frac{3}{8}\alpha^2 e^{2\lambda}.$$

Primjer (nastavak)

- *Može se pokazati da je* $y^{(5)}(0) = 0$*, i općenito* $y^{(2i+1)}(0) = 0$.
- *Polazni rubni problem možemo sada preformulirati na sljedeći način:*
  - *u nekoj okolini od* $x = 0$ *koristi se reprezentacija Taylorovim redom,*
  - *a na dovoljnoj udaljenosti od singulariteta* $x = 0$ *koristi se polazna ODJ samog problema.*
- *Kako iz Taylorovog reda slijedi*

$$y''(x) = y^{(2)}(0) + xy^{(3)}(0) + \frac{x^2}{2}y^{(4)}(0) + \cdots ,$$

polazni rubni problem sada možemo aproksimirati problemom

Primjer (nastavak)

$$y''(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha e^{\lambda}\left(-1 + \frac{3}{8}x^2\alpha e^{\lambda}\right), & \textit{ako je } 0 \le x \le 10^{-2}, \\ -\frac{y'(x)}{x} - \alpha e^{y(x)}, & \textit{ako je } 10^{-2} \le x \le 1. \end{cases}$$

- *Za $x \le 10^{-2}$ greška u funkciji desne strane ODJ je reda veličine 10^{-8}.*
- *Sada desna strana još uvijek sadrži nepoznati parametar $\lambda = y(0)$.*
- *Može se pokazati da se ovaj problem može interpretirati kao prošireni rubni problem s 3 jednadžbe:*
  - *za supstituciju*

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x), \\ y_2(x) &= y'(x), \\ y_3(x) &= y(0) = \lambda, \end{aligned}$$

Primjer (nastavak)

dobivamo sustav ODJ za $0 \le x \le 1$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= \begin{cases} \frac{1}{2}\alpha e^{y_3}\left(-1 + \frac{3}{8}x^2\alpha e^{y_3}\right), & \textit{ako je } 0 \le x \le 10^{-2}, \\ -\frac{y_2}{x} - \alpha e^{y_1}, & \textit{ako je } 10^{-2} \le x \le 1, \end{cases} \\ y_3' &= 0, \end{aligned}$$

sa rubnim uvjetima

$$r = \begin{bmatrix} y_2(0) \\ y_1(1) \\ y_3(0) - y_1(0) \end{bmatrix} = 0.$$

Zadatak

Riješite rubni problem na prethodno opisani način za $\alpha = 0.8$.

- *Napišite M-file funkciju* `odj_primjer_distr_temp_f3()` *koja implementira funkciju desne strane ODJ.*
- *Riješite rubni problem pomoću metode gađanja, ali tako da* s *bude aproksimacija samo za* $y(0)$*, pri tome će inicijalni uvjet za Runge-Kutta metodu biti* $\begin{bmatrix} s & 0 & s \end{bmatrix}^T$.
- $F(s)$ *je samo druga komponenta od* $r(s, y(b; s))$*, jer ona jedina definira uvjet u krajnjem rubu* $x = 1$.
- *Ispišite optimalni* s *i nacrtajte graf rješenja.*