# Znanstveno računanje 2

## 4. dio vježbi
## Diskretna Fourierova transformacija

Nela Bosner

# Diskretna Fourierova transformacija



Diskretna Fourierova transformacija ima široku primjenu u raznim poljima, a razlog tome je egzistencija brzog i efikasnog algoritma (FFT) za njeno računanje:

- u spektralnoj analizi
- kod kompresije podataka
- kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi
- za množenje polinoma (pojednostavljuje operacije)
- za množenje velikih prirodnih brojeva
- itd. . .

# Trigonometrijska interpolacija



- Trigonometrijska interpolacija koristi kombinacije trigonometrijskih funkcija $\cos(hx)$ i $\sin(hx)$ za cijeli broj $h$.
- Mi ćemo promatrati linearne interpolacije oblika

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)), \quad \text{ili}$$

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_M}{2} \cos(Mx),$$

  za $N = 2M + 1$ odnosno $N = 2M$ interpolacijskih točaka $(x_k, f_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$.
- Interpolacija ovog oblika je pogodna za podatke koji su periodični poznate periode, a u ovom slučaju to je $2\pi$.

- Zbog pojednostavljenja računa uvodimo kompleksne brojeve i koristimo De Moivreovu formulu

$$e^{\iota kx} = \cos(kx) + \iota \sin(kx),$$

za $\iota = \sqrt{-1}$.

- Posebno su važne uniformne particije segmenta $[0, 2\pi]$

$$x_k = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Za takve particije, trigonometrijski interpolacijski problem može se transformirati u problem pronalaženja **faznog polinoma** reda $N$ (sa $N$ koeficijenata)

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \beta_2 e^{2\iota x} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)\iota x},$$

sa kompleksnim koeficijentima $\beta_j$ takvima da je

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Zaista, zbog periodičnosti s periodom $2\pi$ vrijedi

$$e^{-h\iota x_k} = e^{-\frac{2\pi\iota hk}{N}} = e^{\frac{2\pi\iota(N-h)k}{N}} = e^{(N-h)\iota x_k},$$

i zbog toga je

$$\cos(hx_k) = \frac{e^{h\iota x_k} + e^{-h\iota x_k}}{2} = \frac{e^{h\iota x_k} + e^{(N-h)\iota x_k}}{2},$$
$$\sin(hx_k) = \frac{e^{h\iota x_k} - e^{-h\iota x_k}}{2\iota} = \frac{e^{h\iota x_k} - e^{(N-h)\iota x_k}}{2\iota}.$$

- Uvrštavanjem ovih izraza u trigonometrijski polinom $\psi(x)$, i grupiranjem izraza sa istom potencijom od $e^{\iota x_k}$ dobit ćemo fazni polinom $p(x)$ sa koeficijentima $\beta_j$, $j = 0, \ldots, N-1$.
- $\beta_j$ možemo izraziti preko koeficijenata $A_h$ i $B_h$ na sljedeći način:

(a) Ako je $N$ neparan, tada je $N = 2M + 1$ i vrijedi

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{A_0}{2} && \\
\beta_j &= \frac{1}{2}(A_j - \iota B_j), && j = 1, \ldots, M \\
\beta_{N-j} &= \frac{1}{2}(A_j + \iota B_j), && j = 1, \ldots, M \\
A_0 &= 2\beta_0 && \\
A_h &= \beta_h + \beta_{N-h}, && h = 1, \ldots, M \\
B_h &= \iota(\beta_h - \beta_{N-h}), && h = 1, \ldots, M
\end{aligned}
$$

(b) Ako je $N$ paran, tada je $N = 2M$ i vrijedi

$$
\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{A_0}{2} & & \\
\beta_j &= \frac{1}{2}(A_j - \iota B_j), & & j = 1, \ldots, M-1 \\
\beta_{N-j} &= \frac{1}{2}(A_j + \iota B_j), & & j = 1, \ldots, M-1 \\
\beta_M &= \frac{A_M}{2} & & \\
A_0 &= 2\beta_0 & & \\
A_h &= \beta_h + \beta_{N-h}, & & h = 1, \ldots, M-1 \\
B_h &= \iota(\beta_h - \beta_{N-h}), & & h = 1, \ldots, M-1 \\
A_M &= 2\beta_M & &
\end{aligned}
$$

- Trigonometrijski polinom $\psi(x)$ i njen fazni polinom $p(x)$ poklapaju se u točkama $x_k = 2\pi k/N$

$$f_k = \psi(x_k) = p(x_k), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Međutim, $\psi(x) = p(x)$ ne mora vrijediti za točke $x \neq x_k$.
- Interpolacijski problemi sa $\psi(x)$ i $p(x)$ su ekvivalentni samo za točke $x_k$, i u tom slučaju znamo izračunati koeficijente jedne funkcije preko koeficijenata druge.
- S druge strane, fazni polinom $p(x)$ je strukturalno jednostavniji od $\psi(x)$.
- Uvodimo sljedeće pokrate:

$$\omega = e^{\iota x}, \quad \omega_k = e^{\iota x_k} = e^{\frac{2k\pi\iota}{N}},$$

$$P(\omega) = \beta_0 + \beta_1\omega + \cdots + \beta_{N-1}\omega^{N-1}.$$

- Budući da je

$$\omega_j \neq \omega_k, \quad \text{za } j \neq k,\ 0 \leq j, k \leq N-1,$$

polazni problem smo sveli na standardnu polinomijalnu interpolaciju:
  - Nađi kompleksan algebarski polinom $P$ stupnja manjeg od $N$ uz uvjet

$$P(\omega_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

- Iz jedinstvenosti polinomijalne interpolacije, odmah dobivamo sljedeći teorem.

## Teorem

*Za izbor interpolacijskih točaka* $(x_k, f_k)$, $k = 0, \ldots, N-1$, *gdje je* $f_k \in \mathbb{C}$ *i* $x_k = 2\pi k/N$, *postoji jedinstveni fazni polinom*

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \beta_2 e^{2\iota x} + \cdots + \beta_{N-1} e^{(N-1)\iota x}$$

*za koji je*

$$p(x_k) = f_k$$

*za* $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

- Sada želimo naći eksplicitne izraze za $\beta_j$ za što će nam trebati sljedeći rezultati.
- Najprije, primijetimo da je za $0 \leq j, h \leq N-1$

$$\omega_h^j = \omega_j^h, \quad \omega_h^{-j} = \overline{\omega_h^j}.$$

**Teorem**

*Za* $0 \leq j, h \leq N-1$ *vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \omega_k^j \omega_k^{-h} = \begin{cases} N, & za\ j = h, \\ 0, & za\ j \neq h. \end{cases}$$

## Korolar

*Za trigonometrijske funkcije, na mreži točaka $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, za $k = 0, \ldots, N-1$ vrijede sljedeće relacije ortogonalnosti*

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(jx_k)\sin(hx_k) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq h \text{ i } j = h = 0, \\ \frac{N}{2}, & \text{za } j = h \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos(jx_k)\cos(hx_k) = \begin{cases} 0, & \text{za } j \neq h, \\ \frac{N}{2}, & \text{za } j = h \neq 0, \\ N, & \text{za } j = h = 0, \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(jx_k)\cos(hx_k) = 0,$$

*uz uvjet da je $j + h \leq N - 1$.*

- Ovim korolarom smo pokazali da trigonometrijske funkcije $\{\cos(hx), \sin(hx)\}$ predstavljaju realnu ortogonalnu familiju funkcija, sa posebnim diskretnim skalarnim produktom definiranim na mreži $x_k$.
- Sada ćemo se ponovo vratiti na kompleksan problem zadan faznim polinomom.
- Ako u vektorskom prostoru $\mathbb{C}^N$ svih $N$-torki $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{N-1})$, $u_k \in \mathbb{C}$ , $k = 0, \ldots, N-1$ koristimo standardni skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \bar{v}_k,$$

tada prethodni teorem tvrdi da posebni $N$-vektori

$$w^{(h)} = (1, \omega_1^h, \ldots, \omega_{N-1}^h), \quad h = 0, \ldots, N-1,$$

čine ortogonalnu bazu za $\mathbb{C}^N$, takvu da je

$$\langle w^{(j)}, w^{(h)} \rangle = \begin{cases} N, & \text{za } j = h, \\ 0, & \text{za } j \neq h. \end{cases}$$

- Primijetimo da ovi vektori imaju duljinu

$$\|w^{(h)}\|_2 = \sqrt{\langle w^{(h)}, w^{(h)} \rangle} = \sqrt{N}.$$

- Iz ortogonalnosti vektora $w^{(h)}$ slijedi sljedeći teorem.

## Teorem

*Fazni polinom $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{j\iota x}$ zadovoljava*

$$p(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

*za kompleksne brojeve $f_k$ i $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ ako i samo ako*

$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \omega_k^{-j} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi \iota jk}{N}}, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

## Korolar

*Trigonometrijski polinomi*

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)),$$

$$\psi(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1} (A_h \cos(hx) + B_h \sin(hx)) + \frac{A_M}{2} \cos(Mx),$$

*gdje je $N = 2M + 1$ odnosno $N = 2M$, zadovoljavaju*

$$\psi(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

*za $x_k = \frac{2\pi k}{N}$ ako i samo ako su koeficijenti od $\psi(x)$ dani sa*

## Korolar (nastavak)

$$A_h = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos(hx_k) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \cos\left(\frac{2\pi hk}{N}\right),$$

$$B_h = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin(hx_k) = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \sin\left(\frac{2\pi hk}{N}\right).$$

## Definicija

- *Preslikavanje* $\mathcal{F} : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N$ *definirano sa* $\beta = \mathcal{F}(f)$ *kao*

$$f = (f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}) \mapsto \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{N-1}),$$

  *pri čemu su* $\beta_j$ $j = 0, \ldots, N-1$ *definirani kao u prethodnom teoremu, zove se diskretna Fourierova transformacija (DFT).*

- *Njen inverz* $\beta \mapsto f = \mathcal{F}^{-1}(\beta)$ *zove se Fourierova sinteza, i predstavlja izvrednjavanje faznog polinoma* $p(x)$ *u ekvidistantnim točkama* $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, $k = 0, \ldots, N-1$,

$$f_k = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{\frac{2\pi \imath jk}{N}} = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j \omega_k^j.$$

- Budući da je $\bar{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} \bar{\beta}_j \omega_k^{-j}$, preslikavanje $\mathcal{F}^{-1}$ može se izraziti preko $\mathcal{F}$ kao

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\beta) = N\overline{\mathcal{F}(\bar{\beta})}.$$

- Zbog toga se algoritam za računanje diskretne Fourierove transformacije $\mathcal{F}$ može upotrijebiti i za Fourierovu sintezu.

- Za fazne polinome $q(x)$ reda $s$, gdje je $s \leq N-1$ općenito ne postoji mogućnost da svi reziduali

$$f_k - q(x_k), \quad k = 0, \ldots, N-1,$$

  budu jednaki 0, pa se stoga radi o **problemu najmanjih kvadrata**.
- U tu svrhu definiramo s-segmente

$$p_s(x) = \beta_0 + \beta_1 e^{\iota x} + \cdots + \beta_{s-1} e^{(s-1)\iota x},$$

  interpolacijskog polinoma $p(x)$, koji će predstavljati najbolje aproksimacije.

## Teorem

*$s$-segment $p_s(x)$, $0 \leq s < N$, interpolacijskog faznog polinoma $p(x)$ minimizira sumu kvadrata*

$$S(q) = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k - q(x_k)|^2$$

*po svim faznim polinomima*

$$q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 e^{\iota x} + \cdots + \gamma_{s-1} e^{(s-1)\iota x}.$$

*Fazni polinom $p_s(x)$ je na jedinstveni način određen ovim svojstvom minimizacije*

$$S(p_s) = \min_q S(q),$$

*i predstavlja rješenje problema najamnjih kvadrata.*

# Brza Fourierova transformacija (FFT)

- Interpolacija točaka $(x_k, f_k)$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, gdje je $x_k = \frac{2\pi k}{N}$, pomoću faznog polinoma $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \beta_j e^{j\iota x}$, vodi ka računanju izraza
$$\beta_j = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{-\frac{2\pi \iota jk}{N}}, \quad j = 0, \ldots, N-1.$$
- Izravno računanje izraza za $\beta_j$ zahtijeva $\mathcal{O}(N^2)$ množenja, što za veliki $N$ predstavlja problem.
- Cooley i Tukey su 1965. godine otkrili brzi algoritam za izvrednjavanje $\beta_j$, koji zahtijeva samo $\mathcal{O}(N \log N)$ množenja.
- Taj algoritam se naziva **brza Fourierova transformacija** (*fast Fourier transformation — FFT*).
- FFT se bazira na cjelobrojnoj faktorizaciji broja $N$, pri čemu se onda polazni problema razbija na manje potprobleme nižeg stupnja.

- Spomenute dekompozicije polaznog problema izvode se rekurzivno.
- Ovaj pristup najbolje funkcionira za

$$N = 2^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Od sada pa na dalje mi ćemo pretpostavljati da je $N = 2^n$, iako se FFT algoritam može poopćiti i za $N = N_1 N_2 \cdots N_n$, $N_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, N$.
- Pretpostavimo da je $N = 2M$, i promotrimo dva interpolacijska fazna polinoma $q(x)$ i $r(x)$ reda $M = N/2$ definirana sa

$$q(x_{2h}) = f_{2h}, \quad r(x_{2h}) = f_{2h+1}, \quad h = 0, \ldots, M-1.$$

- Fazni polinom $q(x)$ interpolira sve točke $x_k$ sa parnim indeksom.

- Polinom
$$\hat{r}(x) = r\left(x - \frac{2\pi}{N}\right) = r\left(x - \frac{\pi}{M}\right)$$
interpolira sve točke $x_k$ sa neparnim indeksom:
$$\hat{r}(x_{2h+1}) = r\left(\frac{2\pi(2h+1)}{N} - \frac{2\pi}{N}\right) = r\left(\frac{2\pi(2h)}{N}\right) = r(x_{2h}) = f_{2h+1}.$$
- Budući da vrijedi
$$e^{Mix_k} = e^{\frac{2\pi\iota MK}{N}} = e^{\pi\iota k} = \begin{cases} +1, & \text{za } k \text{ paran,} \\ -1, & \text{za } k \text{ neparan.} \end{cases}$$
interpolacijski polinom $p(x)$ sada možemo izraziti preko faznih polinoma nižeg reda $q(x)$ i $r(x)$ kao
$$p(x) = q(x)\left(\frac{1 + e^{M\iota x}}{2}\right) + r\left(x - \frac{\pi}{M}\right)\left(\frac{1 - e^{M\iota x}}{2}\right).$$

- Ovime smo dobili osnovu za $n$-koračnu rekurziju.
- Za $m \leq n$, neka je

$$M = 2^{m-1}, \quad \text{i} \quad R = 2^{n-m}.$$

- U koraku označenom sa $m$ moramo odrediti $R$ faznih polinoma reda $2M = 2^m$

$$p_r^{(m)} = \beta_{r,0}^{(m)} + \beta_{r,1}^{(m)} e^{\iota x} + \cdots + \beta_{r,2M-1}^{(m)} e^{(2M-1)\iota x}, \ r = 0, \ldots, R-1,$$

iz $2R$ faznih polinoma reda $M$ $p_r^{(m-1)}$, $r = 0, \ldots, 2R-1$ pomoću rekurzije

$$2p_r^{(m)}(x) = p_r^{(m-1)}(x)(1+e^{M\iota x}) + p_{R+r}^{(m-1)}\left(x - \frac{\pi}{M}\right)(1-e^{M\iota x}).$$

- Uvrstimo li u gornju jednakost izraze za $p_r^{(m)}(x)$, $p_r^{(m-1)}(x)$ i $p_{R+r}^{(m-1)}\left(x - \frac{\pi}{M}\right)$ dobit ćemo rekurziju za koeficijente gornjih faznih polinoma.

- $$\begin{aligned} 2\beta_{r,j}^{(m)} &= \beta_{r,j}^{(m-1)} + \beta_{R+r,j}^{(m-1)}\varepsilon_m^j \\ 2\beta_{r,M+j}^{(m)} &= \beta_{r,j}^{(m-1)} - \beta_{R+r,j}^{(m-1)}\varepsilon_m^j \end{aligned}$$
  $$r = 0,\ldots,R-1, \quad j = 0,\ldots,M-1, \quad m = 0,\ldots,n,$$
  gdje je
  $$\varepsilon_m = e^{-\frac{2\pi\iota}{2^m}}, \quad m = 0,\ldots,n-1.$$
- Početna iteracija rekurzije je
  $$\beta_{k,0}^{(0)} = f_k, \quad k = 0,\ldots,N-1.$$
- Rekurzija završava sa
  $$\beta_j = \beta_{0,j}^{(n)}, \quad j = 0,\ldots,N-1.$$
- Pojavljuje se sada problem kako smjestiti parametre $\beta_{r,j}^{(m)}$ u jednodimenzionalno polje $b$.

- Tražimo pogodno preslikavanje $(m, r, j) \mapsto \tau(m, r, j)$, pri čemu je $\tau(m, r, j) \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$, takvo da je

$$b(\tau(m, r, j)) = \beta_{r,j}^{(m)}.$$

- Ako želimo uštediti na memoriji, onda preslikvanje $\tau$ moramo definirati tako da nam je dovoljno samo jedno polje i to $b$.
- To se može postići tako da svaki par parametara $\beta_{r,j}^{(m)}$, $\beta_{r,M+j}^{(m)}$ zauzme ista mjesta kao i par $\beta_{r,j}^{(m-1)}$, $\beta_{R+r,j}^{(m-1)}$ iz kojeg se prethodni par i dobiva.

- Neka je $\tau = \tau(m, r, j)$ preslikavanje sa svojstvima

$$
\begin{aligned}
b(\tau(m, r, j)) &= \beta_{r,j}^{(m)}, \\
\tau(m, r, j) &= \tau(m-1, r, j), \\
\tau(m, r, j + 2^{m-1}) &= \tau(m-1, r + 2^{n-m}, j),
\end{aligned}
$$

$$
m = 1, \ldots, n, \;\; r = 0, \ldots, 2^{n-m} - 1, \;\; j = 0, \ldots, 2^{m-1} - 1,
$$

i

$$
\tau(n, 0, j) = j, \quad j = 0, \ldots, N-1.
$$

- Zadnji uvjet znači da će konači rezultat sa $\beta_j$ biti u pravilnom poretku, tj.

$$
b(j) = \beta_j.
$$

- Prethodni uvjeti definiraju preslikavanje $\tau$ rekurzivno, i preostaje nam odrediti ga eksplicitno.

- Najprije promotrimo sljedeće: neka je

$$t = \alpha_0 + \alpha_1 \cdot 2 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1}, \quad \alpha_j \in \{0, 1\},$$

  binarni zapis prirodnog broja $t$, $0 \leq t < 2^n$.
- Tada preslikavanje

$$\rho(t) = \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} \cdot 2 + \cdots + \alpha_0 \cdot 2^{n-1}$$

  definira permutaciju binarnih znamenki brojeva $t = 0, \ldots, 2^{n-1}$, koja uređuje znamenke u obrnutom redoslijedu.
- Za ovo preslikavanje vrijedi $\rho(\rho(t)) = t$.

## Lema

*Eksplicitni izraz za preslikavanje $\tau$ glasi*

$$\tau(m, r, j) = \rho(r) + j,$$

*za sve $m = 0, \ldots, n$, $r = 0, \ldots, 2^{n-m} - 1$, $j = 0, \ldots, 2^m - 1$.*

- Zbog svojstva da je $\rho(\rho(r)) = r$, i zbog toga što je $r < 2^{n-m}$, ako definiramo $q = \rho(r)$ vrijedi

  $$q = \alpha_m \cdot 2^m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-1} = 2^m \cdot (\alpha_m + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot 2^{n-m-1}),$$

  odnosno $q$ je višekratnik od $2^m$, i $0 \leq q < 2^n$.
- Dakle,

  $$\tau(m, \rho(q), j) = q + j,$$

  gdje je $0 \leq j < 2^m$.

- Ovime smo razradili osnovu rekurzivnog FFT algoritma.
- Polje $b$ ćemo inicijalizirati za $m = 0$ sa

$$b(\tau(0,k,0)) = b(\rho(k)) = f_k, \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

- Ovu početnu permutaciju možemo izvesti i za $j = \rho(k)$ pa je

$$b(j) = b(\rho(\rho(j))) = f_{\rho(j)},$$

  tako da idemo redom po komponentama od polja $b$.
- Nadalje, izbrisat ćemo faktor 2 koji se pojavljuje u rekurziji za $\beta_{r,j}^{(m)}$ zbog štednje u operacijama, zato na kraju moramo još izvršiti sljedeću operaciju

$$\beta_j = \frac{1}{N} b(j), \quad j = 0, \ldots, N-1.$$

## Algoritam (Cooley–Tukeyev FFT algoritam)

**for** $j = 0 : 2^n - 1$
    $b(j) = f_{\rho(j)}$;
**end**
**for** $m = 1 : n$
    **for** $j = 0 : 2^{m-1} - 1$
        $e = e^{-\frac{2\pi j \iota}{2^m}}$;
        **for** $q = 0 : 2^m : 2^n - 1$
            $u = b(q + j); \quad v = b(q + j + 2^{m-1}) \cdot e$;
            $b(q + j) = u + v$;
            $b(q + j + 2^{m-1}) = u - v$;
        **end**
    **end**
**end**
**for** $j = 0 : 2^n - 1$
    $b(j) = b(j)/N$;
**end**

# Zadaci

## Zadatak

*Napišite M-file funkciju* `rho()` *koja obrće znamenke binarnog prikaza broja x. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *broj x*
- *broj binarnih znamenki u zapisu n*

*Koristite sljedeće MATLAB-ove funkcije*

| | |
|---|---|
| `dec2bin()` | *za prebacivanje prirodnog broja u string sa binarnim zapisom* |
| `fliplr()` | *za obrtanje znakova u stringu* |
| `bin2dec()` | *za prebacivanje stringa sa binarnim zapisom u prirodni broj* |

## Zadatak

*Napišite M-file funkciju* `FFT()` *koja implementira FFT algoritam. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *polje $f$ duljine $N = 2^n$ koje sadrži interpolacijske vrijednosti $f_k$*
- *broj $n$*

*Funkcija neka vraća*

- *polje $b$ duljine $N$ koje sadrži koeficijente faznog polinoma $\beta_j$*

## Zadatak

*Napišite M-file funkciju* `trig_FFT()` *koja implementira FFT algoritam i vraća koeficijente trigonometrijskog polinoma* $\psi(x)$ *za* $N = 2M$. *Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *polje* $f$ *duljine* $N = 2^n$ *koje sadrži interpolacijske vrijednosti* $f_k$
- *broj* $n$

*Funkcija neka vraća*

- *polje* $A$ *duljine* $M + 1$ *koje sadrži koeficijente* $A_h$
- *polje* $B$ *duljine* $M$ *koje sadrži koeficijente* $B_h$

## Napomena

*Točnost vašeg FFT algoritma možete provjeriti tako da dobiveni fazni polinom izvrijednite u točkama $x_k$ i usporedite sa $f_k$. Izvrednjavanje faznog polinoma $y = p(x)$ u točci $x$ možete napraviti pomoću varijante Hornerove sheme:*

## Algoritam (Hornerova shema za fazni polinom)

$\varepsilon = e^{\iota x}$;
$y = \beta_{N-1}$;
**for** $j = N-2 : -1 : 0$
  $y = y \cdot \varepsilon + \beta_j$;
***end***

## Zadatak

*Neka je*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}},$$

*i neka je* $n = 4$, *tako da je* $N = 16$. *Za* $x_k = \frac{2\pi k}{16}$ *definiramo* $f_k = f(x_k)$.

- *Primijenite svoj FFT algoritam na ovaj primjer, i izračunajte koeficijente interpolacijskog faznog polinoma* $p(x)$.
- *Izračunajte i koeficijente trigonometrijskog polinoma* $\psi(x)$.
- *Izvrijednite fazni polinom u točkama* $x_k$*:*

$$y_k = Re(p(x_k))$$

*pomoću Hornerove sheme.*

## Zadatak

- *Izračunajte maksimalnu grešku*

$$e = \max_k |f_k - y_k|.$$

- *Nacrtajte graf funkcije $f$ na segmentu $[0, 6]$ u plavoj boji, i crnim kružićima nacrtajte točke $(x_k, y_k)$, $k = 0, \ldots N - 1$.*

# Generalizirana Hornerova shema



- Standardno se koriste razvoji oblika

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x),$$

kao poopćenje Taylorovog razvoja, gdje je $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ neki **ortogonalni** sustav funkcija na domeni aproksimacije.

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n p_n(x),$$

se može smatrati aproksimacijom od $f$, i očita je generalizacija polinoma.

- Uz to još moramo znati
  - sve koeficijente $a_n$
  - sve funkcije $p_n$

- Međutim, u većini primjena nemamo direktnu “formulu” za računanje vrijednosti $p_n(x)$ u zadanoj točki $x$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$.
- Umjesto toga, znamo da
  - funkcije $p_n$ zadovoljavaju neku, relativno jednostavnu rekurziju po $n$.

# Izvrednjavanje rekurzivno zadanih funkcija



- Ortogonalni polinomi a i neke druge klase funkcija zadovoljavaju tročlane, homogene rekurzije.

  $$p_{n+1}(x)+\alpha_n(x)p_n(x)+\beta_n(x)p_{n-1}(x) = 0, \quad n = 1,2,\ldots,$$

  s tim da su poznate "početne" funkcije $p_0$ i $p_1$, i sve funkcije $\alpha_n$, $\beta_n$, za $n \in \mathbb{N}$, koje su obično jednostavnog oblika.
- Definiramo rekurziju za koeficijente

  $$\begin{aligned} B_{N+2} =& B_{N+1} = 0, \\ B_n =& a_n - \alpha_n(x)B_{n+1} - \beta_{n+1}(x)B_{n+2}, \quad n = N,\ldots,0. \end{aligned}$$

- Uvrštavanjem ove rekurzije u razvoj od $f_N(x)$, dobivamo

  $$f_N(x) = B_0p_0(x) + B_1p_1(x) + \alpha_0(x)B_1p_0(x).$$

**Algoritam (Generalizirana Hornerova shema za $f_N(x)$)**

$B_1 = 0;$
$B_0 = a_N;$
***for*** $k = (N-1) : -1 : 0$
$\quad B_2 = B_1;$
$\quad B_1 = B_0;$
$\quad B_0 = a_k - \alpha_k(x) \cdot B_1 - \beta_{k+1}(x) \cdot B_2;$
***end***
$f_N(x) = B_0 \cdot p_0(x) + B_1 \cdot \left(p_1(x) + \alpha_0(x) \cdot p_0(x)\right);$

# Izvrednjavanje trigonometrijskih polinoma



- Pretpostavimo da je $f$ periodička funkcija na segmentu $[-\pi, \pi]$. Tada, uz relativno blage pretpostavke, funkciju $f$ možemo razviti u Fourierov red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx).$$

  - Umjesto $a_0$, standardno se piše $a_0/2$
  - Ove trigonometrijske funkcije tvore ortogonalan sustav funkcija, obzirom na skalarni produkt definiran integralom.
  - koeficijenti $a_n$ i $b_n$ su poznati
- Problem je najčešće izračunati aproksimaciju oblika

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx),$$

gdje je $N$ unaprijed zadan.

- Ovakav izraz se često zove i trigonometrijski polinom.
  - Fourierov red parne funkcije $f(x) = f(-x)$ ima samo kosinusni dio,
  - Fourierov red neparne funkcije $f(x) = -f(-x)$ ima samo sinusni dio razvoja.

**f parna funkcija :**

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos(nx).$$

$$p_n(x) = \cos(nx).$$

- U tročlanoj rekurziji je

$$\alpha_n(x) = -2\cos x, \quad \beta_n(x) = 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Rekurzija za $B_n$ onda ima oblik

$$\begin{aligned} B_{N+2} &= B_{N+1} = 0, \\ B_n &= a_n + 2\cos x \, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

- Početne funkcije su $p_0(x) = 1$ i $p_1(x) = \cos x$, pa je konačni rezultat

$$\begin{aligned} f_N(x) =& B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ =& B_0 \cdot 1 + B_1 \big( \cos x - 2\cos x \cdot 1 \big) \\ =& B_0 - B_1 \cos x. \end{aligned}$$

### Algoritam (Trigonometrijski polinom parne funkcije)

$B_1 = 0;$
$B_0 = a_N;$
$\alpha = 2 \cdot \cos x;$
**for** $k = (N-1) : -1 : 0$
    $B_2 = B_1;$
    $B_1 = B_0;$
    $B_0 = a_k + \alpha \cdot B_1 - B_2;$
**end**
$f_N(x) = B_0 - B_1 \cdot 0.5 \cdot \alpha;$

## f neparna funkcija :

$$f_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{n+1} \sin((n+1)x).$$

$$p_n(x) = \sin((n+1)x).$$

- Tročlana rekurzija ima oblik

$$p_{n+1}(x) - 2\cos x\, p_n(x) + p_{n-1}(x) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

- Rekurzija za $B_n$ ima oblik

$$\begin{aligned} B_{N+1} &= B_N = 0, \\ B_n &= b_{n+1} + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N-1, \ldots, 0. \end{aligned}$$

- Početne funkcije su $p_0(x) = \sin x$ i $p_1(x) = \sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, pa je konačni rezultat

$$\begin{aligned} f_N(x) =& B_0 p_0(x) + B_1 \left(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\right) \\ =& B_0 \cdot \sin x + B_1 \left(2 \sin x \cos x - 2 \cos x \cdot \sin x\right) \\ =& B_0 \sin x. \end{aligned}$$

## Algoritam (Trigonometrijski polinom neparne funkcije)

$B_1 = 0;$
$B_0 = b_N;$
$\alpha = 2 \cdot \cos x;$
**for** $k = (N-2) : -1 : 0$
  $B_2 = B_1;$
  $B_1 = B_0;$
  $B_0 = b_{k+1} + \alpha \cdot B_1 - B_2;$
**end**
$f_N(x) = B_0 \cdot \sin x;$

**Opći trigonometrijski polinom koji ima i parni i neparni dio :**

- Neka je
$$f_N = par_N + nepar_N,$$
gdje su $par_N$ i $nepar_N$ parni odnosno neparni dio.
- U neparnom dijelu definiramo da je $b_0 = 0$, tada
$$nepar_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n \sin(nx).$$
$$p_n(x) = \sin(nx).$$
$$\begin{aligned} B_{N+2} =& B_{N+1} = 0, \\ B_n =& b_n + 2\cos x\, B_{n+1} - B_{n+2}, \quad n = N, \ldots, 0. \end{aligned}$$

- Početne funkcije su $p_0(x) = 0$ i $p_1(x) = \sin x$, pa je konačni rezultat

$$\begin{aligned} nepar_N(x) =& B_0 p_0(x) + B_1 \big(p_1(x) + \alpha_0(x) p_0(x)\big) \\ =& B_0 \cdot 0 + B_1 \big(\sin x - 2\cos x \cdot 0\big) \\ =& B_1 \sin x. \end{aligned}$$

## Algoritam (Opći trigonometrijski polinom)

$B_1 = 0;$
$C_1 = 0;$
$B_0 = a_N;$
$C_0 = b_N;$
$\alpha = 2 \cdot \cos x;$
**for** $k = (N-1) : -1 : 0$
$\quad B_2 = B_1;$
$\quad C_2 = C_1;$
$\quad B_1 = B_0;$
$\quad C_1 = C_0;$
$\quad B_0 = a_k + \alpha \cdot B_1 - B_2;$
$\quad C_0 = b_k + \alpha \cdot C_1 - C_2;$
**end**
$par_N(x) = B_0 - B_1 \cdot 0.5 \cdot \alpha;$
$nepar_N(x) = C_1 \cdot \sin x;$
$f_N(x) = par_N(x) + nepar_N(x);$

# Zadaci

## Zadatak

*Napišite M-file funkciju* `gen_horner_trig()` *koja implementira generaliziranu Hornerovu shemu za trigonometrijski polinom. Funkcija neka ima ulazne parametre*

- *točku* $x$ *u kojoj se izvrednjuje trigonometrijski polinom*
- *polja a i b jednake duljine koja sadrže koeficijente trigonometrijskog polinoma*

*Funkcija neka vraća*

- *vrijednost trigonometrijskog polinoma* $y$ *u točci* $x$.

## Zadatak

*Za funkciju*

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{4}},$$

*iz pretposljednjeg zadatka i* $n = 4$*, nacrtajte na istoj slici:*

- *graf funkcije* $f$ *na* $[0, 2\pi]$
- *interpolacijske točke*
- *trigonometrijski polinom koji interpolira dane točke*
- *sve troje nacrtajte u različitim bojama*
- *pravilno označite legendu.*

# Primjeri iz primjene: Spektralna analiza



- Udio frekvencija u periodičnoj i neperiodičnoj funkciji može se odrediti Fourierovom analizom.
  - Za neprekidne periodične funkcije, udio frekvencija se određuje iz koeficijenata Fourierovog reda.
  - Za neprekidne neperiodične funkcije udio frekvencija se određuje Fourierovom integralnom transformacijom.
- Na analogan način udio frekvencija niza točaka koje predstavljaju neke podatke može se odrediti diskretnom Fourierovom transformacijom.
- Ti podaci mogu doći iz raznih izvora.
- Npr. mjerenja radijalne sile koje djeluju u diskretnim točkama oko cilindra, predstavljaju niz podataka koji mora biti periodičan.
- Najčešći oblik podataka predstavljaju vremenski nizovi, u kojima je dana vrijednost neke veličine u jednakim intervalima vremena.

- DFT je važan alat za znanstvenike i inženjere koji moraju interpretirati podatke koji su uzorkovani iz neprekidnog električnog signala, gdje poznavanje frekvencija signala mogu dati uvid u mehanizam koji ga je generirao.
- Sada ćemo pogledati kako interpolirati bilo kojih $N$ ekvidistantnih točaka podataka $(t_k, y_k)$, gdje je $k = 0, 1, \ldots, N$, trigonometrijskim polinomom.
- Pretpostavlja se da je $y_n = y_0$ i da su podaci periodični sa periodom $T = t_n - t_0$.
- U ovom slučaju za $N = 2M$ i $t_0 = 0$ imamo

$$y_k = \frac{A_0}{2} + \sum_{h=1}^{M-1} \left( A_h \cos\left(\frac{2\pi h t_k}{T}\right) + B_h \sin\left(\frac{2\pi h t_k}{T}\right)\right) + \frac{A_M}{2} \cos\left(\frac{2\pi M t_k}{T}\right)$$

- Svaki sinus i kosinus u gornjem izrazu predstavlja $h$ kompletnih ciklusa u rasponu podataka $T$, zbog toga što je perioda od svakog $\cos\left(\frac{2\pi h t_k}{T}\right)$ i $\sin\left(\frac{2\pi h t_k}{T}\right)$ za $h > 0$ jednaka $\frac{T}{h}$.
- Odgovarajuće frekvencije su tada dane sa

$$\phi_h = \frac{h}{T}, \quad h = 1, \ldots, M.$$

- Neka je $\Delta\phi$ inkrement frekvencija i $\phi_{max}$ neka je maksimalna frekvencija, tada je

$$\Delta\phi = \frac{1}{T},$$

i

$$\phi_{max} = M\Delta\phi = \frac{N}{2T}.$$

- Podaci su ekvidistantni
$$t_k = \frac{kT}{N}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$
- Neka je $\Delta t$ interval uzorkovanja, tada je
$$\Delta t = \frac{T}{N}.$$
- Neka je $T_0$ perioda koja pripada $\phi_{max}$, tada je
$$\phi_{max} = \frac{1}{T_0} = \frac{N}{2T},$$
pa je prema tome
$$T = \frac{T_0 N}{2}$$
i
$$\Delta t = \frac{T_0}{2}.$$

- To znači da komponenta maksimalne frekvencije sadrži dva uzorka podataka po ciklusu.
- Maksimalna frekvencija $\phi_{max}$ se naziva **Nyquistova frekvencija**.

## Zadatak

*Zadana je funkcija*

$$g(t) = 0.2\cos(2\pi\phi_1 t) + 0.35\sin(2\pi\phi_2 t) + 0.3\sin(2\pi\phi_3 t),$$

*gdje*

$$\phi_1 = 20HZ, \quad \phi_2 = 50Hz, \quad \phi_3 = 70Hz.$$

*Odredite spektar frekvencija (odnos frekvencija-koeficijent) za* $N = 512$ *točaka podataka uzorkovanih u* $T = 2$ *sekunde:*

$$T = 2, \quad \Delta t = \frac{T}{N} = 0.00390625, \quad \Delta\phi = \frac{1}{T} = 0.5,$$

$$\begin{aligned} t_k &= 0.00390625k, \quad k = 0, \dots, 511, \\ y_k &= g(t_k) + \varepsilon_k, \end{aligned}$$

## Zadatak (nastavak)

*gdje je $\varepsilon_k$ slučajan šum iz normalne distribucije sa standardnom devijacijom 0.5 i očekivanjem 0. Potrebno je najprije za točke $(t_k, g(t_k))$ (bez šuma), a zatim i za točke $(t_k, y_k)$ (sa šumom) napraviti sljedeće.*

- *FFT algoritmom izračunati koeficijente faznog polinoma.*
- *Nacrtati točke $(\phi_k, |\beta_k|)$, $k = 0, \ldots, N-1$*
- *Izračunati koeficijente odgovarajućeg trigonometrijskog polinoma.*
- *Nacrtati na jednoj slici točke $(\phi_k, A_k)$, a na drugoj $(\phi_k, B_k)$, $k = 0, \ldots, M$.*

*Što možete zaključiti iz dobivenih slika?*