2D transformacije

Homogene koordinate i matrične reprezentacije 2D transformacija

Kompozicija 2D transformacija

Matrične reprezentacije 3D transformacija

Kompozicija 3D transformacija

Transformacija kao promjena koordinatnog sustava

Geometrijske transformacije

3. dio kolegija Računalna grafika

Nela Bosner

- Mnoge aplikacije koriste geometrijske transformacije za
  - promjenu položaja
  - orijentaciju
  - veličinu

  objekata na slici.
- Transformacije se primijenjuju na točke.
- Za primijenu transformacije na liniju ili poligon potrebno je transformirati samo krajnje točke.

2D transformacije

- Točke prikazujemo kao stupčane vektore:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

- **Translacija:** za vektor $T = \begin{bmatrix} d_x & d_y \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \end{bmatrix}$$
$$P' = P + T$$

- **Skaliranje:** za faktor s_x duž x osi i za faktor s_y duž y osi

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
$$P' = S \cdot P$$

- **Rotacija:** za kut θ oko ishodišta

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \\ x \cdot \sin\theta + y\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$P' = R \cdot P$$

Pozitivni kutevi se mjere u smjeru obrnutom od kazaljke na satu.

Homogene koordinate i matrične reprezentacije 2D transformacija

- Želimo sve transformacije prikazati na konzistentan način, tako da se lagano kombiniraju.
- Za točke izražene u *homogenim koordinatam*, sve tri transformacije se mogu prikazati kao množenja matrica i vektora.
- Kod homogenih koordinata dodaje se treća koordinata:

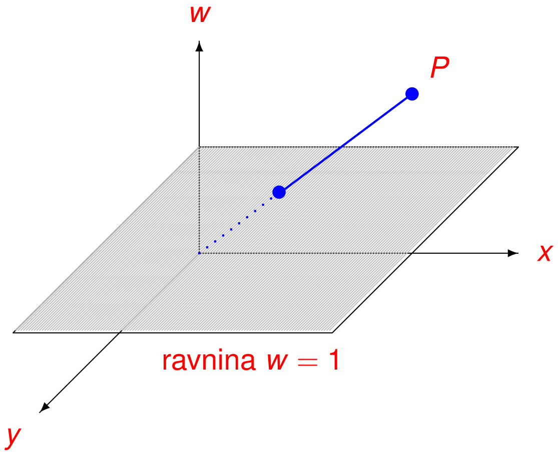
$$(x, y) \longrightarrow (x, y, w)$$

- Dvije trojke homogenih koordinata (x, y, w) i (x', y', w') reprezentiraju istu točku ako i samo ako za $t \neq 0$

$$(x', y', w') = (t{\cdot}x, t{\cdot}y, t{\cdot}w) \text{ ili } (x, y, w) = \left(\frac{1}{t}\cdot x', \frac{1}{t}\cdot y', \frac{1}{t}\cdot w'\right)$$

- Barem jedna od homogenih koordinata mora biti $\neq 0$; $(0, 0, 0)$ nije dozvoljena.

- Ako je $w \neq 0$ tada (x, y, w) reprezentira istu točku kao i $(x/w, y/w, 1)$:
  - x/w i y/w nazivamo kartezijevim koordinatama homogene točke.
- Točke sa $w = 0$ se nazivaju se točkama u beskonačnosti.
- Sve trojke (tx, ty, tw), $t \neq 0$ koje reprezentiraju istu točku, čine pravac u 3D prostoru.
- Ako homogeniziramo trojke u pravcu (podijelimo ih sa w koordinatom), dobit ćemo točke oblika $(x, y, 1)$.
- Homogenizirane točke oblikuju ravninu s jednadžbom $w = 1$ u (x, y, w)-prostoru.



Slika: *xyw* homogeni koordinatni sustav, sa ravninom $w = 1$ i točkom $P(x, y, w)$ projektiranom na ravninu.

Translacija u homogenim koordinatama

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = T(d_x, d_y) \cdot P, \quad \text{gdje je } T(d_x, d_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & d_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Za $P' = T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P$ i $P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot P'$ imamo

$$P'' = T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1}) \cdot P$$

- vrijedi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} \\ 0 & 1 & d_{y1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{x1} + d_{x2} \\ 0 & 1 & d_{y1} + d_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(d_{x2}, d_{y2}) \cdot T(d_{x1}, d_{y1}) = T(d_{x1} + d_{x2}, d_{y1} + d_{y2})$$

Skaliranje u homogenim koordinatama

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = S(s_x, s_y) \cdot P, \quad \text{gdje je } S(s_x, s_y) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Za $P' = S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$ i $P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot P'$ imamo

$$P'' = S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) \cdot P$$

- vrijedi

$$\begin{bmatrix} s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{x1} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{x1} \cdot s_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & s_{y1} \cdot s_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_{x2}, s_{y2}) \cdot S(s_{x1}, s_{y1}) = S(s_{x1} \cdot s_{x2}, s_{y1} \cdot s_{y2})$$

Rotacija u homogenim koordinatama

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P' = R(\theta) \cdot P, \quad \text{gdje je } R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Za $P' = R(\theta_1) \cdot P$ i $P'' = R(\theta_2) \cdot P'$ imamo
$$P'' = R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) \cdot P$$
- vrijedi

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(\theta_2) \cdot R(\theta_1) = R(\theta_1 + \theta_2)$$

Kompozicija 2D transformacija

Matrica nastala kao produkt proizvoljnog niza matrica translacije, skaliranja i rotacija je oblika

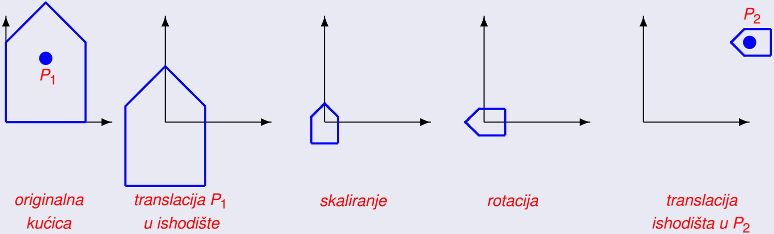
$$M = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & t_x \\ q_{21} & q_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- M je reprezentacija *afine transformacije*, i ima svojstva
  - čuva pralelnost pravaca
  - ne čuva duljine i kuteve
- M je reprezentacija *transformacije krutog tijela* ako je 2×2 podmatrica $\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{bmatrix}$ ortogonalna, i ima svojstva
  - M je nastala kao produkt proizvoljnog niza matrica translacije i rotacija
  - čuva duljine i kuteve

- Kompozicija transformacija translacije, skaliranja i rotacija se efikasno implementira množenjem odgovarajućih matrica, odgovarajućim redoslijedom i primijenom produkta matrica na točke.
- Redoslijed množenja je bitan jer množenje matrica općenito nije komutativno.

Primjer

Rotiranje i skaliranje kućice sa centrom transformacija u P_1, i smještajavanje centra u P_2.



$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$

Matrične reprezentacije 3D transformacija

- 3D transformacije se mogu reprezentirati pomoću 4×4 matrica u homogenim koordinatama:

$$(x, y, z) \longrightarrow (x, y, z, w)$$

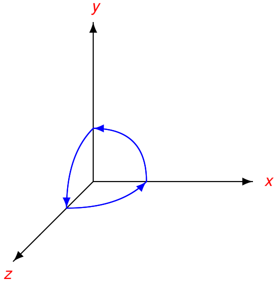
- Dvije četvorke homogenih koordinata (x, y, z, w) i (x', y', z', w') reprezentiraju istu točku ako i samo ako za $t \neq 0$

$$(x', y', z', w') = (t \cdot x, t \cdot y, t \cdot z, t \cdot w) \text{ ili}$$
$$(x, y, z, w) = \left(\frac{1}{t} \cdot x', \frac{1}{t} \cdot y', \frac{1}{t} \cdot z', \frac{1}{t} \cdot w'\right)$$

- $(0, 0, 0, 0)$ nije dozvoljena.
- Standardna reprezentacija točke (x, y, z, w) sa $w \neq 0$ je $(x/w, y/w, z/w, 1)$ — homogenizirane točke.

- Točke za koje je $w = 0$ se nazivaju točkama u beskonačnosti.
- Svaka točka u 3D prostoru može se reprezentirati pravcem kroz ishodište 4D prostora.
- Homogenizirane reprezentacije točke čine hiperravninu definiranu jednadžbom $w = 1$.

- Mi ćemo razmatrati desne 3D koordinatne sustave



- Pozitivne rotacije su u smjeru suprotnom od kazaljke na satu kada se gleda duž pozitivne koordinatne osi prema ishodištu.

Translacija u homogenim koordinatama

$$T(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T(d_x, d_y, d_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + d_x \\ y + d_y \\ z + d_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skaliranje u homogenim koordinatama

$$S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(s_x, s_y, s_z) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cdot x \\ s_y \cdot y \\ s_z \cdot z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rotacija u homogenim koordinatama

- rotacija oko osi z

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- rotacija oko osi x

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- rotacija oko osi y

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kompozicija 3D transformacija

Matrica nastala kao produkt proizvoljnog niza matrica translacije, skaliranja i rotacija je oblika

$$M = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & t_x \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & t_y \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 3×3 podmatrica $Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}$ je rezultat rotacija i translacija.
- $T = \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$ je rezultat uzastopnih translacija.
- Sve tri transformacije imaju inverze:
  - $T(d_x, d_y, d_z)^{-1} = T(-d_x, -d_y, -d_z)$
  - $S(s_x, s_y, s_z)^{-1} = S(s_x^{-1}, s_y^{-1}, s_z^{-1})$, za $s_x \neq 0$, $s_y \neq 0$, $s_z \neq 0$
  - $R(\theta)^{-1} = R(\theta)^T = R(-\theta)$

Zadatak

Izračunajte 4×4 matricu transformacije $S(s_u)$ koja skalira faktorom s_u duž pravca zadanim sa $u = (u_x, u_y, u_z)$, pri čemu je $\|u\|_2 = 1$. Koordinate u_x, u_y, i u_z su kosinusi kuteva izmedju pravca i koordinatnih osi x, y, i z.

Zadatak

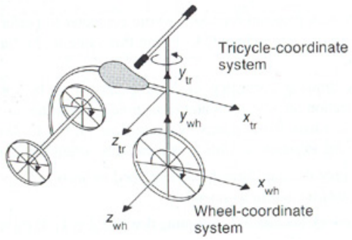
Izračunajte 4×4 matricu transformacije $R_u(\theta)$ koja rotira za kut θ oko proizvoljne osi zadane pomoću vektora smjera $u = (u_x, u_y, u_z)$, sa $\|u\|_2 = 1$.

$$S(s_u) = \begin{bmatrix} 1+(s_u-1)u_x^2 & (s_u-1)u_xu_y & (s_u-1)u_zu_x & 0 \\ (s_u-1)u_xu_y & 1+(s_u-1)u_y^2 & (s_u-1)u_yu_z & 0 \\ (s_u-1)u_zu_x & (s_u-1)u_yu_z & 1+(s_u-1)u_z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_u(\theta) = \begin{bmatrix} u_x^2+\cos\theta(1-u_x^2) & u_xu_y(1-\cos\theta)-u_z\sin\theta & u_zu_x(1-\cos\theta)+u_y\sin\theta & 0 \\ u_xu_y(1-\cos\theta)+u_z\sin\theta & u_y^2+\cos\theta(1-u_y^2) & u_yu_z(1-\cos\theta)-u_x\sin\theta & 0 \\ u_zu_x(1-\cos\theta)-u_y\sin\theta & u_yu_z(1-\cos\theta)+u_x\sin\theta & u_z^2+\cos\theta(1-u_z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformacija kao promjena koordinatnog sustava

- Do sada smo promatrali transformacije skupa točaka u drugi skup točaka, pri čemu su oba skupa prikazana u istom fiksiranom koordinatnom sustavu.
- Drugi pristup je promatrati transformaciju kao promjenu koordinatnog sustava.
- Ovaj pristup je koristan kada kombiniramo puno objekata zadanih u svojim lokalnim koordinatnim sustavima.



Slika: Stilizirani tricikl sa tri koordinatna sustava.

Definicija

- *Definiramo $M_{i\leftarrow j}$ kao transformaciju koja prevodi reprezentaciju točke u koordinatnom sustavu j u njenu reprezentaciju u koordinatnom sustavu i.*
- *Definiramo $P^{(i)}$ kao reprezentaciju točke u koordinatnom sustavu i.*

- Tada vrijedi:

$$P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)} \text{ i } P^{(j)} = M_{j\leftarrow k} \cdot P^{(k)}$$

$$P^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)} = M_{i\leftarrow j} \cdot M_{j\leftarrow k} \cdot P^{(k)} = M_{i\leftarrow k} \cdot P^{(k)}$$

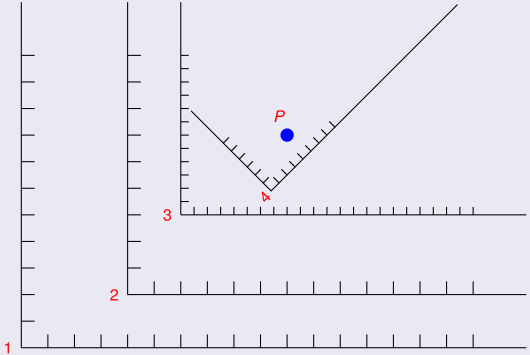
odakle je

$$M_{i\leftarrow k} = M_{i\leftarrow j} \cdot M_{j\leftarrow k}$$

- $M_{i\leftarrow j} = M_{j\leftarrow i}^{-1}$

Primjer

Točka P i koordinatni sustavi 1, 2, 3, i 4.



Primjer (nastavak)

Transformacije koordinata:

- $M_{1 \leftarrow 2} = T(4, 2)$
- $M_{2 \leftarrow 3} = T(2, 3) \cdot S(0.5, 0.5)$
- $M_{3 \leftarrow 4} = T(6.6, 1.8) \cdot R(45^\circ)$

Koordinate točke P u koordinatnim sustavima 1, 2, 3, i 4:

- $P^{(1)} = (10, 8)$
- $P^{(2)} = (6, 6)$
- $P^{(3)} = (8, 6)$
- $P^{(4)} = (4, 2)$

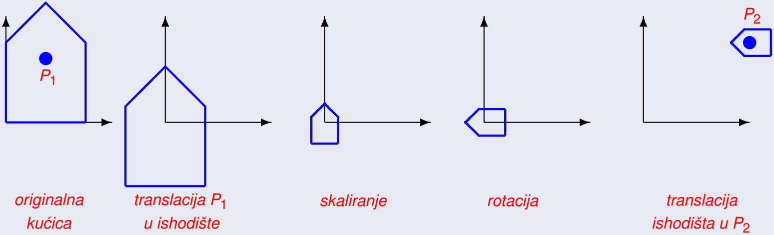
- Opće pravilo je da transformacija koja transformira skup točaka u fiksiranom koordinatnom sustavu je inverz odgovarajuće transformacije koordinatnog sustava u kojima su točke reprezentirane.
- Ako je $Q^{(j)}$ neka transformacija u koordinatnom sustavu j, tada vrijedi

$$\begin{aligned} Q^{(i)} \cdot P^{(i)} &= M_{i\leftarrow j} \cdot Q^{(j)} \cdot P^{(j)} \\ Q^{(i)} \cdot M_{i\leftarrow j} \cdot P^{(j)} &= M_{i\leftarrow j} \cdot Q^{(j)} \cdot P^{(j)} \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$Q^{(i)} = M_{i\leftarrow j} \cdot Q^{(j)} \cdot M_{i\leftarrow j}^{-1}$$

Primjer



Transformacija točaka reprezentiranih u fiksiranom koordinatnom sustavu:

$$T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)$$

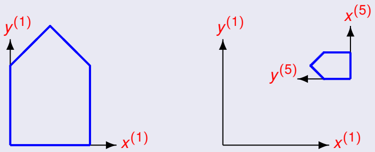
Primjer (nastavak)

Transformacija koordinatnog sustava:

$$
\begin{aligned}
M_{5\leftarrow 1} &= M_{5\leftarrow 4} M_{4\leftarrow 3} M_{3\leftarrow 2} M_{2\leftarrow 1} \\
&= \left(T(x_2, y_2) \cdot R(\theta) \cdot S(s_x, s_y) \cdot T(-x_1, -y_1)\right)^{-1} \\
&= T(x_1, y_1) \cdot S(s_x^{-1}, s_y^{-1}) \cdot R(-\theta) \cdot T(-x_2, -y_2)
\end{aligned}
$$

tako da je

$$P^{(5)} = M_{5\leftarrow 1} \cdot P^{(1)}$$



(a) (b)