Interpolacija i aproksimacija splajnovima

5. dio kolegija Numeričke metode financijske matematike

Nela Bosner

Interpolacija i aproksimacija splajnovima

- Kod regresije promatrali smo vezu između zavisne varijable i nezavisnih varijabli.
- Ta veza izražena je preko funkcije nezavisnih varijabli, s time da smo znali oblik te veze:
  - *linearna regresija* pretpostavlja da ta funkcija regresije ovisi linearno o nezavisnim varijablama,
  - *nelinearna parametarska regresija* pretpostavlja da je funkcija regresije poznatog nelinearnog oblika (npr. eksponencijalna funkcija),

  i nađena funkcija regresije daje najbolja moguća predviđanja (ili aproksimaciju) zavisne varijable.
- **Neparametarska regresija** pretpostavlja da je oblik funkcije regresije također nelinearan, ali nije određen modelom, već se njen oblik procijenjuje iz podataka.

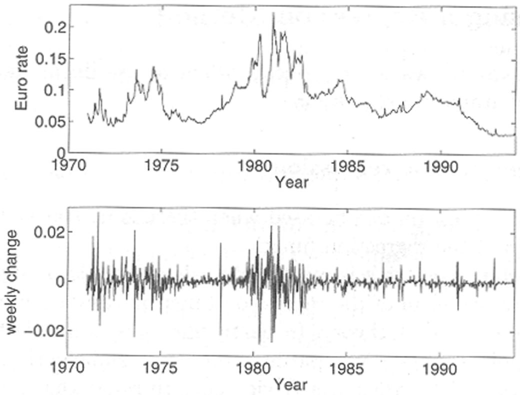
- Neparametarska regresija se koristi kada pretpostavljamo ili znamo da je graf funkcije regresije neka zakrivljena krivulja, ali nemamo model te krivulje.
- Poželjno je
  - da na raspolaganju imamo dovoljno podataka,
  - ili da je šum u podacima dovoljno mali,
  - ili da nezavisne varijable variraju u dovoljno velikom rasponu da se može primijetiti nelinearnost u funkciji regresije.
- U tu svrhu najbolje je koristiti **splajnove** (po dijelovima polinomne funkcije određenih svojstava) jer ih se lako koristi, i predstavljaju prirodno proširenje linearne regresije.

Primjer

- *Modeli evolucije kratkotrajnih kamatnih stopa su važni u financijama.*
- *Kao primjer uzet ćemo kratkotrajne kamate Euro obveznica.*
- *Promatramo podatke vezane uz kamatnu stopu depozita sa dospijećem od 1 mjeseca.*
- *Nas interesira kako volatilnost promjena kamatnih stopa ovisi o tekućoj vrijednosti kamatne stope* r_t.
- *Uobičajeni model za promjenu kratkotrajnih kamatnih stopa je*

  $$\Delta r_t = \mu(r_{t-1}) + \sigma(r_{t-1})\epsilon_t,$$

  gdje je $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$, $\mu()$ *je funkcija drifta,* $\sigma()$ *je funkcija volatilnosti, a* ϵ_t *je šum iz normalne distribucije* $N(0,1)$.



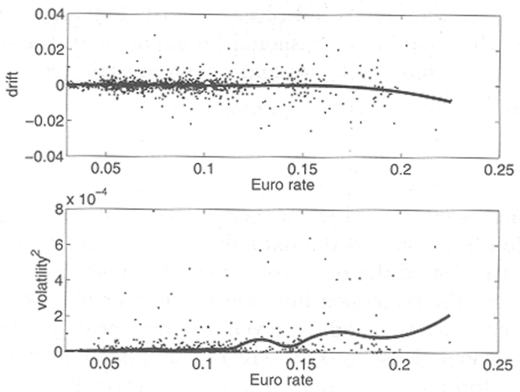
Slika: **Gornja slika:** vremenski niz tjednih vrijednosti kamatne stope. **Donja slika:** vremenski niz promjene kamatnih stopa.

Primjer (nastavak)

- *Postoje mnogi modeli za $\mu()$ i $\sigma()$, od kojih je jedan da se te dvije funkcije neparametarski modeliraju.*
- *$\mu()$ i $\sigma()$ se određuju pomoću splajnova neparametarskom regresijom.*
- *Aproksimacija za $\mu()$ ispada da je blizu 0 u ovom primjeru.*
- *Ako pretpostavimo da je zaista $\mu() = 0$, tada je*

$$E\{(\Delta r_t)^2 | r_{t-1}\} = \sigma^2(r_{t-1}).$$

- *Prema tome, $\sigma^2()$ možemo procijeniti regresijom $(\Delta r_t)^2$ po r_{t-1}.*
- *Ako μ ispadne različit od 0, tada $\sigma^2()$ možemo procijeniti regresijom $\{\Delta r_t - \hat{\mu}(r_t)\}^2$ po r_{t-1}, gdje je $\hat{\mu}(r_t)$ procjena od $\mu(r_t)$.*



Slika: **Gornja slike:** tjedne promjene kamatne stope u odnosu na samu vrijednost kamatne stope; puna linija je splajn aproksimacija funkcije $\mu(\cdot)$. **Donja slika:** kvadrirane tjedne promjene kamatne stope u odnosu na samu vrijednost kamatne stope; puna linija je splajn aproksimacija funkcije $\sigma^2(\cdot)$.

Interpolacija po dijelovima polinomima

- Polinomna interpolacija visokog stupnja može imati vrlo loša svojstva (velike oscilacije), pa se u praksi **ne smije** koristiti.
- Umjesto toga, koristi se po dijelovima polinomna interpolacija, tj. na svakom podintervalu vrijedi

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

  gdje su p_k polinomi niskog (ali fiksnog) stupnja.
- Za razliku od polinomne interpolacije funkcijskih vrijednosti, gdje je bilo dovoljno da su čvorovi interpolacije međusobno različiti, ovdje pretpostavljamo da su rubovi podintervala interpolacije uzlazno numerirani, tj. da vrijedi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

- To još ne osigurava da je φ funkcija jer je moguća dvoznačnost u dodirnim točkama podintervala, ali o tome ćemo voditi računa kod zadavanja uvjeta interpolacije.
- Preciznije, pretpostavimo da na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ koristimo polinom stupnja m, tj. da je

$$\varphi\Big|_{[x_{k-1},x_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

- Svaki polinom p_k stupnja m određen je s $(m+1)$-im koeficijentom.
- Ukupno moramo odrediti koeficijente polinoma p_k u n podintervala, tj. ukupno

$$(m+1) \cdot n \quad \text{koeficijenata.}$$

- Interpolacijski uvjeti su

$$\varphi(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što za svaki polinom daje po 2 uvjeta

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ p_k(x_k) &= f_k, \quad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

a ukupno daje $2n$ uvjeta interpolacije.
- Uočimo da smo postavljenjem prethodnih uvjeta interpolacije osigurali neprekidnost funkcije φ, jer je

$$p_{k-1}(x_{k-1}) = p_k(x_{k-1}), \quad k = 2, \ldots, n.$$

- Primijetimo još da uvjeta interpolacije ima $2n$, a moramo naći $(m+1) \cdot n$ koeficijenata.
- Bez dodatnih uvjeta to je moguće napraviti samo za $m = 1$, tj. za po dijelovima linearnu interpolaciju.

- Za $m > 1$ moraju se dodati uvjeti na glatkoću interpolacijske funkcije φ u čvorovima interpolacije.

Po dijelovima linearna interpolacija

- Osnovna ideja po dijelovima linearne interpolacije je umjesto jednog polinoma visokog stupnja koristiti više polinoma, ali stupnja 1.
- Na svakom podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$, polinom p_k je jedinstveno određen.
- Obično ga zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala (razlog je stabilnost) u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) \quad \text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k=1,\ldots,n.$$

- Interpolacijski polinom p_k možemo zapisati u Newtonovoj formi

$$p_k(x) = f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1}),$$

pa odmah vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned} c_{0,k} &= f[x_{k-1}] = f_{k-1} \\ c_{1,k} &= f[x_{k-1}, x_k] = \frac{f_k - f_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, \quad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Ako želimo aproksimirati vrijednost funkcije f u točci $x \in [a, b]$, prvo treba pronaći između kojih se čvorova točka x nalazi, tj za koji k vrijedi $x_{k-1} \leq x < x_k$.
- Tek tada možemo računati koeficijente pripadnog linearnog polinoma.
- Za traženje tog intervala koristimo algoritam **binarnog pretraživanja**.
- Računanje vrijednosti splajna u točci x izvodi se onda u dva koraka:
  1. za svaki k izračunaj koeficijente $c_{0,k}$ i $c_{1,k}$,
  2. pomoću binarnog pretraživanja pronađi k takav da je $x \in [x_{k-1}, x_k\rangle$,
  3. izračunaj $p_k(x)$.

Algoritam (Binarno pretraživanje)

$donji = 0;$
$gornji = n;$
while $(gornji - donji) > 1$
    $srednji = fix((donji + gornji)/2);$
    if $x >= x_{srednji}$
        $donji = srednji;$
    else
        $gornji = srednji;$
    end
$k = donji;$
end

Trajanje ovog algoritma proporcionalno je s $\log_2(n)$.

- Ako je funkcija f klase $C^2[a,b]$, gdje je $[a,b]$ interval na kojem aproksimiramo, onda je greška takve interpolacije maksimalna pogreška od svih n linearnih interpolacija.
- Na podintervalu $[x_{k-1}, x_k]$ ocjena greške linearne interpolacije je

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_2^k}{2!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})(x - x_k), \quad M_2^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f''(x)|.$$

- Ocijenimo $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$, tj. nađimo njen maksimum po apsolutnoj vrijednosti.

- Kako je graf od $\omega(x)$ na $[x_{k-1}, x_k]$ parabola koja siječe apscisu u x_{k-1} i x_k, maksimum od $|\omega(x)|$ je u polovištu intervala

$$x_e = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}.$$

gdje $\omega(x)$ zapravo poprima minimum.

- Dalje vrijedi

$$|\omega(x)| \le |\omega(x_e)| \le \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{4}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

- Ako razmak između susjednih čvorova označimo s $h_k = x_k - x_{k-1}$, možemo definirati maksimalni razmak susjednih čvorova s

$$h = \max_{1 \le k \le n} \{h_k\} \quad \text{i} \quad M_2 = \max_{1 \le k \le n} \{M_2^k\}.$$

pa na čitavom $[a, b]$, možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_2}{2!} \frac{h^2}{4} = \frac{1}{8} M_2 \cdot h^2.$$

- Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0.
- Na primjer, za ekvidistantne mreže, tj. za mreže za koje vrijedi

$$x_k = a + kh, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

greška je reda veličine h^2, odnosno n^{-2} i potrebno je dosta podintervala da se dobije sasvim umjerena točnost aproksimacije.

- Na primjer, za $h = 0.01$, tj. za $n = 100$, greška aproksimacije je reda veličine 10^{-4}.

- Druga je mana da aproksimacijska funkcija φ nije dovoljno glatka, tj. ona je samo neprekidna. Zbog ta dva razloga (dosta točaka za umjerenu točnost i pomanjkanje glatkoće), obično se na svakom podintervalu koriste polinomi viših stupnjeva.

Primjer

- *Promatramo cijene neke imovine, koje se mijenjaju tokom vremena.*
- *Informacije o cijenama na tržište stižu u raznim vremenskim trenucima t_j koji ne moraju biti ekvidistantni.*
- *Prema tome, promatraju se uređeni parovi (t_j, x_j), pri čemu $x_j = x(t_j)$ predstavlja cijenu u datom trenutku.*
- *Inače, kao cijena se najčešće promatra logaritamska srednja cijena, oblika*

$$x(t_j) = \frac{\log p_{ponuda}(t_j) + \log p_{potražnja}(t_j)}{2} = \log \sqrt{p_{ponuda}(t_j) p_{potražnja}(t_j)},$$

gdje je $p_{potražnja}(t_j) \geq p_{ponuda}(t_j)$, a $p_{ponuda}(t_j)$ i $p_{potažnja}(t_j)$ predstavljaju kupovnu i prodajnu cijenu.

Primjer (nastavak)

- *Budući da se za mnoge financijske analize uzimaju nizovi cijena koje su dobivene na ekvidistantnim čvorovima, ili da se promatraju operatori oblika,*

$$\Omega[x](t) = \int_{-\infty}^{t} \omega(t-s)x(s)ds,$$

diskretan skup $\{(t_j, x_j) | j \in S\}$ *trebamo zamijeniti neprekidnom funkcijom nad* **R**.
- *To se najčešće radi po dijelovima linearnom interpolacijom.*
- *Za konkretan primjer gledati ćemo odnos USD-CHF u roku od 2 dana.*

Primjer (nastavak)

- *Vrijeme se mjeri u satima, a mi imamo na raspolaganju informacije za vremena:*

t_j	0	3	4	7	9	15
x_j	1.465	1.471	1.469	1.458	1.462	1.457

t_j	24	25	28	31	33	40
x_j	1.453	1.460	1.457	1.448	1.455	1.440

t_j	42	43	46	48
x_j	1.438	1.441	1.442	1.440

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `bintrazenje()` *koja implementira algoritam binarnog pretraživanja. Ulazni parametri funkcije neka su*

- *točka* t
- *broj podintervala* n
- *čvorovi interpolacije* x, *gdje je* x *vektor duljine* $n+1$

a izlazni parametar neka je

- *indeks* k *takav da je* $t \in [x(k), x(k+1)\rangle$ *(samo se za zadnji interval zapravo provjerava da li je* $t \in [x(n), x(n+1)]$*).*

Zadatak

- *Za podatke prikazane u prethodnom primjeru nađite po dijelovima linearnu interpolaciju $x(t)$.*
- *Izračunajte niz $\{(\tau_i, x(\tau_i))\}$, za $\tau_i = t_0 + ih$ gdje je $t_0 = 0$ i $h = 6$ sati.*
- *Niz $\{\tau_i\}$ je tada ekvidistantan niz.*
- *Za svaki i*
  1. *pomoću binarnog pretraživanja pronađite j takav da je $\tau_i \in [t_{j-1}, t_j\rangle$,*
  2. *izračunajte $\chi_i = x(\tau_i) = p_j(\tau_i)$.*
- *Nacrtajte graf dobivenog po dijelovima linearnog polinoma $x(t)$ plavom linijom, i točke $\{(\tau_i, x(\tau_i))\}$ crvenim kružićima.*
- *Pravilno označite osi.*

Po dijelovima kvadratna interpolacija

- Ako stavimo $m = 2$, tj. na svakom podintervalu postavimo kvadratni polinom (parabolu), moramo naći $3n$ koeficijenata, a imamo $2n$ uvjeta interpolacije.
- Ako zahtijevamo da aproksimacijska funkcija φ ima u unutarnjim čvorovima interpolacije $x_1, \ldots, x_{n-1}$ neprekidnu derivaciju, onda smo dodali još $n - 1$ uvjet.
- A treba nam još jedan!
- Ako i njega postavimo (a to ne možemo na simetričan način), onda bismo mogli naći i takvu aproksimaciju.
- Ona se uobičajeno ne koristi, jer kontrolu derivacije možemo napraviti samo na jednom rubu (to bi odgovaralo inicijalnim problemima).
- Za razliku od po dijelovima parabolne interpolacije, po dijelovima kubična interpolacija ima vrlo važnu fizikalnu podlogu i vjerojatno je jedna od najčešće korištenih metoda interpolacije uopće.

Po dijelovima kubična interpolacija

- Kod po dijelovima kubične interpolacije, restrikcija aproksimacijske funkcije φ na svaki interval je kubični polinom.
- Njega uobičajeno zapisujemo relativno obzirom na početnu točku intervala $[x_{k-1}, x_k]$ u obliku

$$p_k(x) = c_{0,k} + c_{1,k}(x - x_{k-1}) + c_{2,k}(x - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(x - x_{k-1})^3$$
$$\text{za} \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \ldots, n.$$

- Budući da ukupno imamo n kubičnih polinoma, od kojih svakome treba odrediti 4 koeficijenta, ukupno moramo odrediti $4n$ koeficijenata.
- Uvjeta interpolacije je $2n$, jer svaki kubični polinom p_k mora interpolirati rubove svog podintervala $[x_{k-1}, x_k]$, tj. mora vrijediti

$$\begin{aligned} p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1} \\ p_k(x_k) &= f_k, \qquad k = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

- Ovi uvjeti automatski osiguravaju neprekidnost funkcije φ.
- Obično želimo da interpolacijska funkcija bude glađa — barem klase $C^1[a, b]$, tj. da je i derivacija funkcije φ neprekidna i u čvorovima.
- Dodavanjem tih uvjeta za svaki kubični polinom, dobivamo još $2n$ uvjeta

$$\begin{aligned} p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \\ p_k'(x_k) &= s_k, \quad k = 1, \ldots, n, \end{aligned}$$

  pri čemu su s_k neki brojevi.
- Njihova uloga može biti višeznačna, pa ćemo je detaljno opisati kasnije.
- Zasad, možemo zamišljati da su brojevi s_k neke aproksimacije derivacije u čvorovima.

- Primijetimo da je takvim izborom dodatnih uvjeta osigurana neprekidnost prve derivacije, jer je

$$p'_{k-1}(x_{k-1}) = p'_k(x_{k-1}) = s_{k-1}, \quad k = 2, \ldots, n.$$

- Ako pretpostavimo da su s_k zadani brojevi, nađimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_k.
- Ponovno, najzgodnije je koristiti Newtonov oblik interpolacijskog polinoma, ali sada s tzv. dvostrukim čvorovima, jer su u x_{k-1} i x_k dani i funkcijska vrijednost i derivacija.
- Pretpostavimo li da se u podijeljenoj razlici dva čvora približavaju jedan drugom, onda je podijeljena razlika na limesu

$$\lim_{h_k \to 0} f[x_k, x_k + h_k] = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(x_k + h_k) - f(x_k)}{h_k} = f'(x_k),$$

uz uvjet da f ima derivaciju u točci x_k.

- Drugim riječima, vrijedi

$$f[x_k, x_k] = f'(x_k).$$

- U našem slučaju, ako u točci x_k derivaciju $f'(x_k)$ zadajemo ili aproksimiramo s s_k, onda je

$$f[x_k, x_k] = s_k.$$

- Sada možemo napisati tablicu podijeljenih razlika za kubični interpolacijski polinom koji ima dva dvostruka čvora x_{k-1} i x_k:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, x_{k+3}]$
x_{k-1}	f_{k-1}			
		s_{k-1}		
			$\dfrac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}$	
x_{k-1}	f_{k-1}			$\dfrac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}$
		$f[x_{k-1}, x_k]$		
			$\dfrac{s_k - f[x_{k-1}, x_k]}{h_k}$	
x_k	f_k			
		s_k		
x_k	f_k			

- Forma Newtonovog interpolacijskog polinoma ostat će po obliku jednaka kao u slučaju da su sve četiri točke različite, pa imamo

$$\begin{aligned}
p_k(x) = & f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\
& + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 \\
& + f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)
\end{aligned}$$

uz uvažavanje da je

$$\begin{aligned}
f[x_{k-1}, x_{k-1}] = & s_{k-1} \\
f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] = & \frac{f[x_{k-1}, x_k] - f[x_{k-1}, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}} \\
= & \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f[x_{k-1},x_{k-1},x_k,x_k] &= \frac{f[x_{k-1},x_k,x_k]-f[x_{k-1},x_{k-1},x_k]}{x_k-x_{k-1}} \\
&= \frac{\dfrac{s_k-f[x_{k-1},x_k]}{h_k}-\dfrac{f[x_{k-1},x_k]-s_{k-1}}{h_k}}{h_k} \\
&= \frac{s_k+s_{k-1}-2f[x_{k-1},x_k]}{h_k^2}.
\end{aligned}
$$

- Uvrštavanjem x_{k-1} i x_k u polinom p_k, te u njegovu derivaciju p_k' možemo provjeriti da je

$$
\begin{aligned}
p_k(x_{k-1}) &= f_{k-1}, & p_k'(x_{k-1}) &= s_{k-1} \\
p_k(x_k) &= f_k, & p_k'(x_k) &= s_k
\end{aligned}
$$

- Newtonov oblik interpolacijskog polinoma možemo malo drugačije zapisati, tako da polinom bude napisan po potencijama od $(x - x_{k-1})$.
- Ako posljednji član tog polinoma napišemo kao

$$\begin{aligned}(x - x_{k-1})^2(x - x_k) &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} + x_{k-1} - x_k) \\ &= (x - x_{k-1})^2(x - x_{k-1} - h_k) \\ &= (x - x_{k-1})^3 - h_k(x - x_{k-1})^2,\end{aligned}$$

onda Newtonov interpolacijski polinom poprima oblik

$$\begin{aligned}p_k(x) =& f[x_{k-1}] + f[x_{k-1}, x_{k-1}] \cdot (x - x_{k-1}) \\ &+ \left(f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k\, f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k]\right) \cdot (x - x_{k-1})^2 \\ &+ f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k] \cdot (x - x_{k-1})^3.\end{aligned}$$

- Za sve $k = 1, \ldots, n$, dobivamo

$$\begin{aligned}
c_{0,k} &= p_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \\
c_{1,k} &= p_k'(x_{k-1}) = s_{k-1}, \\
c_{2,k} &= \frac{p_k''(x_{k-1})}{2} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k] - h_k f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k], \\
c_{3,k} &= \frac{p_k'''(x_{k-1})}{6} = f[x_{k-1}, x_{k-1}, x_k, x_k].
\end{aligned}$$

- Promotrimo li bolje posljednje dvije relacije, otkrivamo da se isplati prvo izračunati koeficijent $c_{3,k}$, a zatim ga upotrijebiti za računanje $c_{2,k}$. Dobivamo

$$\begin{aligned}
c_{3,k} &= \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2}, \\
c_{2,k} &= \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k}.
\end{aligned}$$

- Dakle, ako znamo skalare s_k, onda nije problem naći koeficijente po dijelovima kubične interpolacije.
- Preostaje nam samo odrediti način na koji bismo mogli birati s_k-ove.

Po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija

- Ako su poznate vrijednosti derivacija funkcije f u čvorovima x_k, skalare s_k možemo izabrati tako da vrijedi
$$s_k = f'(x_k), \quad k = 0, \ldots, n.$$
- U tom slučaju je kubični polinom određen **lokalno**, tj. ne ovisi o drugim kubičnim polinomima.
- Naime, ako su kubičnom polinomu na rubovima intervala zadane i funkcijske vrijednost i vrijednosti derivacija, potpuno su određena njegova četiri koeficijenta.
- Interpolacija koja interpolira funkcijske vrijednosti i vrijednosti derivacija u svim zadanim čvorovima zove se **po dijelovima kubična Hermiteova interpolacija**.

- Nađimo grešku takve interpolacije, uz pretpostavku da je funkcija $f \in C^4[a,b]$.
- Prvo, pronađimo grešku na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$.
- Interpolacijski polinom s dvostrukim čvorovima na rubu ponaša se kao polinom koji ima četiri različita čvora, takva da se parovi čvorova u rubu "stope".
- Zbog toga, možemo promatrati grešku interpolacijskog polinoma reda 3 koji interpolira funkciju f u točkama x_{k-1}, x_k i još dvijema točkama koje su blizu x_{k-1} i x_k.
- Grešku takvog interpolacijskog polinoma možemo ocijeniti s

$$|f(x) - p_k(x)| \leq \frac{M_4^k}{4!} |\omega(x)|,$$

pri čemu je, nakon "stapanja točaka",

$$\omega(x) = (x - x_{k-1})^2 (x - x_k)^2, \quad M_4^k = \max_{x \in [x_{k-1}, x_k]} |f^{(4)}(x)|.$$

- Ostaje samo još pronaći u kojoj je točci intervala $[x_{k-1}, x_k]$ maksimum funkcije $|\omega|$.
- Dovoljno je naći sve lokalne ekstreme funkcije ω i u njima provjeriti vrijednost.
- Derivirajmo

$$\begin{aligned}\omega'(x) =&2(x - x_{k-1})(x - x_k)^2 + 2(x - x_{k-1})^2(x - x_k)\\ =&2(x - x_{k-1})(x - x_k)(2x - x_{k-1} - x_k).\end{aligned}$$

- Budući da maksimum greške ne može biti u rubovima intervala, jer su tamo točke interpolacije (tj. minimumi i greške i $|\omega|$), onda je jedino još moguće da se ekstrem dostiže u nultočci x_e od ω', pri čemu je

$$x_e = \frac{(x_{k-1} + x_k)}{2}.$$

- Lako se provjerava da je to lokalni maksimum.

- Vrijednost u x_e je kvadrat vrijednosti greške za po dijelovima linearnu interpolaciju na istoj mreži čvorova

$$\omega(x_e) = (x_e - x_{k-1})^2 (x_e - x_k)^2 = \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}.$$

- Odatle, prijelazom na apsolutnu vrijednost, odmah slijedi da je x_e točka lokalnog maksimuma za $|\omega|$ i

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_e)| \leq \frac{(x_k - x_{k-1})^4}{16}, \quad \forall x \in [x_{k-1}, x_k].$$

- Definiramo li, ponovno, maksimalni razmak čvorova

$$h = \max_{1 \leq k \leq n} \{h_k = x_k - x_{k-1}\} \quad \text{i} \quad M_4 = \max_{1 \leq k \leq n} \{M_4^k\},$$

na čitavom $[a, b]$ možemo pisati

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{M_4}{4!} \frac{h^4}{16} = \frac{1}{384} M_4 \cdot h^4.$$

- Drugim riječima, ako ravnomjerno povećavamo broj čvorova, tako da $h \to 0$, onda i maksimalna greška teži u 0 i to brže od po dijelovima linearne interpolacije.
- Ipak, vrlo često derivacije funkcije u točkama interpolacije nisu poznate, na primjer ako su točke dobivene mjerenjem.
- No, tada možemo aproksimirati prave vrijednosti derivacije korištenjem vrijednosti funkcije u susjednim točkama.

Kubična splajn interpolacija

- Brojeve $s_0, \ldots, s_n$ možemo odrediti na još jedan način.
- Umjesto da su skalari s_k neke aproksimacije derivacije funkcije f u čvorovima, možemo zahtijevati da se s_k biraju tako da funkcija φ bude još glađa — da joj je i druga derivacija neprekidna, tj. da je klase $C^2[a, b]$.
- Nagibe $s_1, \ldots, s_{n-1}$ određujemo iz uvjeta neprekidnosti druge derivacije u unutarnjim čvorovima $x_1, \ldots x_{n-1}$.
- Takva se interpolacija zove **kubična splajn interpolacija.**
- Možemo li iz tih uvjeta jednoznačno izračunati splajn?
  - Imamo $4n$ koeficijenata kubičnih polinoma.
  - Uvjeta interpolacije ima $2n$.
  - Uvjeta ljepljenja prve derivacije u točkama ima $n - 1$ jer je toliko unutarnjih točaka.
  - Uvjeta ljepljenja druge derivacije u točkama ima isto $n - 1$.

- Dakle, imamo ukupno $4n - 2$ uvjeta, a moramo odrediti $4n$ koeficijenata.
- Odmah vidimo da nam nedostaju 2 uvjeta da bismo te koeficijente mogli odrediti, i njih još moramo dodatno odrediti.
- Za početak, prva derivacija se lijepi u unutarnjim točkama čim postavimo zahtjev da je $\varphi'(x_k) = s_k$ u tim točkama, bez obzira na to koliki je s_k .
- To nam omogućava da s_k-ove odredimo i na neki drugi način.
- Zbog toga, ostaje nam samo postaviti uvjete ljepljenja druge derivacije u unutarnjim čvorovima.
- Zahtjev je

$$p''_k(x_k) = p''_{k+1}(x_k), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

- Ako polinome p_k pišemo relativno obzirom na početnu točku podintervala, tj. ako je

$$p_k(x) = c_{0,k}+c_{1,k}(x-x_{k-1})+c_{2,k}(x-x_{k-1})^2+c_{3,k}(x-x_{k-1})^3$$

onda je

$$\begin{aligned} p_k''(x) &= 2c_{2,k} + 6c_{3,k}(x - x_{k-1}) \\ p_{k+1}''(x) &= 2c_{2,k+1} + 6c_{3,k+1}(x - x_k), \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} p_k''(x_k) &= 2c_{2,k} + 6c_{3,k}(x_k - x_{k-1}) \\ p_{k+1}''(x_k) &= 2c_{2,k+1}. \end{aligned}$$

- Podijelimo li prethodne jednadžbe s 2, uvjet lijepljenja glasi

$$c_{2,k} + 3c_{3,k}(x_k - x_{k-1}) = c_{2,k+1}.$$

- Ostaje samo izraziti koeficijente $c_{i,k}$ u terminima f_k i s_k iz relacija koje su dobivene iz uvjeta ljepljenja prvih derivacija.
- Ponovimo

$$c_{3,k} = \frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k^2},$$

$$c_{2,k} = \frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} - h_k c_{3,k}.$$

Uvrštavanjem u uvjet ljepljenja druge derivacije, dobivamo

$$\frac{f[x_{k-1}, x_k] - s_{k-1}}{h_k} + 2\,\frac{s_k + s_{k-1} - 2f[x_{k-1}, x_k]}{h_k} = \frac{f[x_k, x_{k+1}] - s_k}{h_{k+1}} - \frac{s_{k+1} + s_k - 2f[x_k, x_{k+1}]}{h_{k+1}}.$$

- Sređivanjem dobivamo

$$\frac{-3f[x_{k-1},x_k]+s_{k-1}+2s_k}{h_k}=\frac{3f[x_k,x_{k+1}]-2s_k-s_{k+1}}{h_{k+1}}.$$

- Pomnožimo li prethodnu relaciju s $h_k h_{k+1}$ i prebacimo li sve s_k na lijevu stranu, a članove koji nemaju s_k na desnu stranu, za $k = 1,\dots,n-1$, dobivamo

$$h_{k+1}s_{k-1}+2(h_k+h_{k+1})s_k+h_k s_{k+1}=3(h_{k+1}f[x_{k-1},x_k]+h_k f[x_k,x_{k+1}]).$$

- Ovo je linearni sustav s $(n+1)$-om nepoznanicom i $(n-1)$-om jednadžbom.
- Ako na neki način zadamo rubne nagibe s_0 i s_n, onda ostaje točno $n-1$ nepoznanica.

- Matrica tako dobivenog linearnog sustava je tridijagonalna

$$
\begin{bmatrix}
2(h_1+h_2) & h_1 & & & \\
h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} \\
 & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n)
\end{bmatrix}
$$

i strogo dijagonalno dominantna po retcima, jer za svako k vrijedi

$$2(h_k + h_{k+1}) > h_k + h_{k+1}.$$

pa je i regularna (Geršgorin).

- Prema tome ovaj linearni sustav sigurno ima jedinstveno rješenje $s_1, \ldots, s_{n-1}$.
- Za rješavanje možemo koristiti Gaussove eliminacije bez pivotiranja, jer je i svaka vodeća podmatrica regularna.
- Primijetimo, sada s_k nisu nezavisni, nego ovise jedan o drugom.
- To znači da aproksimacija više **nije lokalna**, jer se promjenom jedne funkcijske vrijednosti mijenjaju **svi** polinomi:
  - promjena jedne vrijednosti f_{k_0} mijenja desne strane u 3 jednadžbe (za $k_0 - 1$, k_0 i $k_0 + 1$),
  - zbog toga se promijeni cijeli vektor rješenja sustava, tj. svi skalari s_k.
- Ipak, može se pokazati da su promjene lokalizirane — najviše se promijene s_k-ovi za k blizu k_0, a promjene padaju prema rubovima.

- Posljednje otvoreno pitanje je kako možemo izabrati s_0 i s_n.
- Oni se ne moraju direktno zadati, već se uobičajeno zadaju rubni uvjeti na funkciju φ iz kojih se određuju s_0 i s_n ili se dodaju još dvije jednadžbe linearnog sustava (prva i zadnja).
- Postoji nekoliko tradicionalnih načina zadavanja rubnih uvjeta, odnosno jednadžbi koje nedostaju a mi ćemo obraditi tri od njih.

Potpuni splajn — zadana prva derivacija u rubovima

- Ako je poznata derivacija funkcije f u rubovima, a to je, recimo slučaj kod rješavanja rubnih problema za običnu diferencijalnu jednadžbu, onda je prirodno zadati

$$s_0 = f'(x_0), \quad s_n = f'(x_n).$$

- Takav oblik splajna se katkad zove **potpuni** ili **kompletni splajn.**
- Greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti je $O(h^4)$.

Zadana druga derivacija u rubovima

- Ako je poznata druga derivacija funkcije f u rubovima, onda treba staviti

$$f''(x_0) = \varphi''(x_0) = p_1''(x_0), \quad f''(x_n) = \varphi''(x_n) = p_n''(x_n).$$

- Ostaje još samo izraziti $p_1''(x_0)$ pomoću s_0, s_1 te $p_n''(x_n)$ pomoću s_{n-1} i s_n.
- Znamo da je

$$c_{2,1} = \frac{p_1''(x_0)}{2} = \frac{f''(x_0)}{2},$$

pa iz izraza za $c_{2,1}$ izlazi

$$\frac{3f[x_0, x_1] - 2s_0 - s_1}{h_1} = \frac{f''(x_0)}{2}.$$

- Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu

$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1] - \frac{h_1}{2} f''(x_0),$$

koju treba dodati kao prvu jednadžbu linearnog sustava.

- Slično, korištenjem relacije

$$p_n''(x_n) = 2c_{2,n} + 6c_{3,n}h_n,$$

te uvrštavanjem izraza za $c_{2,n}$ i $c_{3,n}$ izlazi

$$s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n] + \frac{h_n}{2} f''(x_n).$$

- Tu jednadžbu dodajemo kao zadnju u linearni sustav.
- Dobiveni linearni sustav ima $(n+1)$-u jednadžbu i isto toliko nepoznanica, a može se pokazati da ima i jedinstveno rješenje.
- Ponovno, greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti je $O(h^4)$.

Prirodni splajn — slobodni krajevi

- Ako zadamo tzv. slobodne krajeve, tj. ako je
$$\varphi''(x_0) = \varphi''(x_n) = 0$$
dobivamo prirodnu splajn interpolaciju.
- Na isti način kao u prethodnom slučaju, dobivamo dvije dodatne jednadžbe
$$2s_0 + s_1 = 3f[x_0, x_1], \quad s_{n-1} + 2s_n = 3f[x_{n-1}, x_n].$$
- Ako aproksimirana funkcija f nema na rubu druge derivacije jednake 0, onda je greška aproksimacije u funkcijskoj vrijednosti $O(h^2)$, a ako ih ima, onda je kao u prethodnom slučaju greška reda $O(h^4)$.

- Matrica sustava za prirodni splajn je tada oblika

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & & & \\
h_2 & 2(h_1+h_2) & h_1 & & & & \\
 & h_3 & 2(h_2+h_3) & h_2 & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
 & & & h_{n-1} & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) & h_{n-2} & \\
 & & & & h_n & 2(h_{n-1}+h_n) & h_{n-1} \\
 & & & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
$$

- Vektor nepoznanica i vektor desne strane sustava su oblika

$$
\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix}, \quad
\begin{bmatrix} 3f[x_0,x_1] \\ 3(h_2 f[x_0,x_1] + h_1 f[x_1,x_2]) \\ \cdots \\ 3(h_n f[x_{n-2},x_{n-1}] + h_{n-1} f[x_{n-1},x_n]) \\ 3f[x_{n-1},x_n] \end{bmatrix}
$$

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `prir_kub_splajn()` *koji računa parametre* s_i, $i = 0, \ldots, n$ *za prirodni kubični splajn. Ulazni parametri funkcije neka su*

- *vektor interpolacijskih čvorova x*
- *vektor interpolacijskih vrijednosti u čvorovima f*

a izlazni parametar neka je

- *vektor parametara s, kojeg čine vrijednosti derivacije funkcije u čvorovima.*

Zadatak

Napišite M-file funkciju `vrij_kub_splajna()` *koji računa vrijednost kubičnog splajna u točci* t. *Ulazni parametri funkcije neka su*

- *točka* t
- *vektor interpolacijskih čvorova* x
- *vektor interpolacijskih vrijednosti u čvorovima* f
- *vektor vrijednosti derivacije funkcije u čvorovima* s

a izlazni parametri neka su

- y, *vrijednost splajna u točci* t
- dy, *vrijednost derivacije splajna u točci* t
- $d2y$, *vrijednost druge derivacije splajna u točci* t.

Zadatak (nastavak)

Izvrednjavanje kubičnog splajna u točci t odvija se u 2 koraka.

1. *Pomoću binarnog pretraživanja pronađite k takav da je $t \in [x_{k-1}, x_k\rangle$.*
2. *Vrijednost polinoma $p_k(t) = c_{0,k} + c_{1,k}(t - x_{k-1}) + c_{2,k}(t - x_{k-1})^2 + c_{3,k}(t - x_{k-1})^3$ izvrijednite pomoću Hornerove sheme.*

Analogno se postupa sa 1. i 2. derivacijom splajna.

Zadatak

Neka je

$$f(x) = \sin(\pi x).$$

Nađite prirodni splajn koji aproksimira funkciju f na $[0, 1]$ s čvorovima interpolacije $x_k = 0.2k$, za $k = 0, \ldots, 5$. Izračunajte vrijednost tog splajna u točci 0.55.

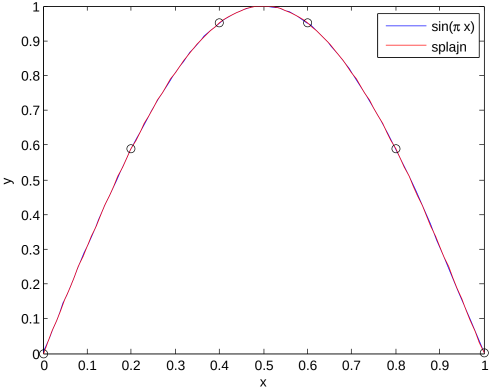
- *Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \sin(\pi x)$ i interpolacijskog prirodnog kubičnog splajna.*
- *Nacrtajte grafove 1. i 2. derivacije funkcije $f(x) = \sin(\pi x)$ i interpolacijskog prirodnog kubičnog splajna.*

Napomena

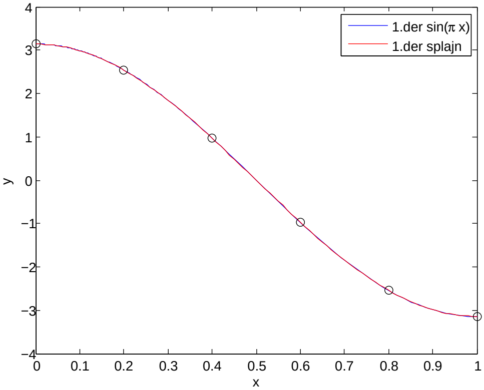
- *Pogledajmo aproksimacije za funkciju, prvu i drugu derivaciju u točci* 0.55.

	funkcija $j=0$	*prva derivacija* $j=1$	*druga derivacija* $j=2$
$f^{(j)}(0.55)$	0.9876883406	-0.4914533661	-9.7480931932
$\varphi^{(j)}(0.55)$	0.9874286861	-0.4849622636	-9.6992452715
greška	0.0002596545	-0.0064911026	-0.0488479218

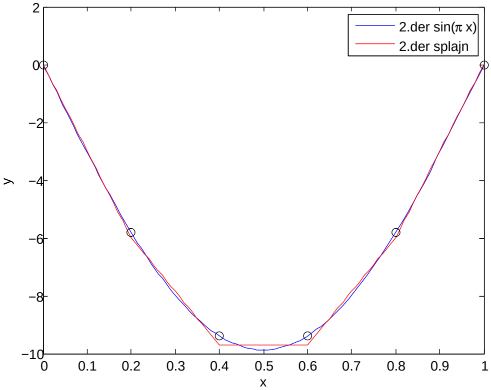
- *Vidimo da su aproksimacije vrlo točne, iako je h relativno velik.*
- *To je zato što funkcija $f(x) = \sin(\pi x)$ zadovoljava prirodne rubne uvjete $f''(0) = f''(1) = 0$, kao i prirodni splajn.*
- *Greška aproksimacije funkcije je reda veličine $O(h^4)$, prve derivacije $O(h^3)$, a druge derivacije $O(h^2)$.*



Slika: Funkcija $\sin(\pi x)$ i prirodni kubični splajn iz zadatka.



Slika: 1. derivacija funkcije $\sin(\pi x)$ i prirodnog kubičnog splajna iz zadatka.



Slika: 2. derivacija funkcije $\sin(\pi x)$ i prirodnog kubičnog splajna iz zadatka.

Po dijelovima polinomna aproksimacija pomoću diskretne metode najmanjih kvadrata

- Ponovo promatramo po dijelovima polinomnu funkciju
$$\varphi\Big|_{[t_{k-1},t_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$
gdje su polinomi p_k stupnja ℓ, a rubovi podintervala, koje još nazivamo i **čvorovima**, označeni su sa
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b.$$
- Ako sa $\mathcal{S}_\ell$ označimo skup funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sa sljedećim svojstvima:
  - f su po dijelovima polinomi stupnja ℓ na podintervalima $[t_{k-1}, t_k]$ za $k = 1, \ldots, n$,
  - f zadovoljavaju određene uvjete glatkoće na rubovima podintervala,

  tada se može pokazati da je $\mathcal{S}_\ell$ vektorski prostor određene dimenzije $d + 1$.
- $d + 1$ ovisi o broju čvorova $n + 1$, stupnju polinoma ℓ i uvjetima na glatkoću u čvorovima.

- Prvi korak u primjeni metode najmanjih kvadrata na po dijelovima polinomnu funkciju iz prostora $\mathcal{S}_\ell$ je pronalaženje baze tog prostora.
- Pretpostavimo da je $B_{j,\ell}$, $j = 0, \ldots, d$ baza od $\mathcal{S}_\ell$.
- Tada se $\varphi \in \mathcal{S}_\ell$ može prikazati u toj bazi kao

$$\varphi = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{j,\ell}.$$

- Rezultat metode najmanjih kvadrata je tada određivanje koeficijenata α_j, tako da φ najbolje aproksimira određeni skup podataka.
- Kao bazne funkcije uzimamo tzv. **B-splajnove** $B_{j,\ell}$ koji imaju sljedeća korisna svojstva:
  - $B_{j,\ell}$ poprima netrivijalne vrijednosti unutar segmenta $[t_{j-p}, t_{j+1}]$, $p \le \ell$, a izvan njega je identički jednak 0,
  - za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $\sum_{j=0}^{d} B_{j,\ell}(x) = 1$.

- Za diskretnu metodu najmanjih kvadrata pretpostavljamo da po dijelovima polinomnom funkcijom želimo aproksimirati podatke izražene u $m \geq d + 1$ točaka

$$(x_i, y_i) \in [a, b], \quad i = 1, \ldots, m.$$

- Dakle, želimo riješiti sljedeći problem

$$\min_{\alpha_0,\ldots,\alpha_d} \sum_{i=1}^{m} (y_i - \varphi(x_i))^2 = \min_{\alpha_0,\ldots,\alpha_d} \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{j,\ell}(x_i) \right)^2 .$$

- Ako sve podatke sada prikažemo u matričnom obliku

$$A = \begin{bmatrix} B_{0,\ell}(x_1) & B_{1,\ell}(x_1) & \cdots & B_{d,\ell}(x_1) \\ B_{0,\ell}(x_2) & B_{1,\ell}(x_2) & \cdots & B_{d,\ell}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{0,\ell}(x_m) & B_{1,\ell}(x_m) & \cdots & B_{d,\ell}(x_m) \end{bmatrix},$$

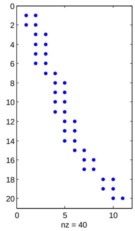
$$x = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix},$$

tada smo dobili standardni linearni problem najmanjih kvadrata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^{d+1}} \|b - Ax\|_2.$$

- Zbog prikazanog svojstva B-splajnova, za svaki $x \in [a, b]$ postoji najviše $\ell + 1$ B-splajnova za koje je $B_{j,\ell}(x) \neq 0$.
- Zbog toga matrica A ima vrpčastu strukturu, kod koje u svakom retku matrice postoji najviše $\ell + 1$ netrivijalnih elemenata.

- Znamo da će ovaj problem imati jedinstveno rješenje ako matrica A ima puni stupčani rang.
- To će se postići ako za svaki $j = 0, \ldots, d$ postoji x_{i_j} koji je u nosaču od $B_{j,\ell}$, pri čemu su svi x_{i_j}, $j = 0, \ldots, d$ međusobno različiti.
- To znači, da za svaki $B_{j,\ell}$, $j = 0, \ldots, d$ postoji neki zasebni x_{i_j} za koji je $B_{j,\ell}(x_{i_j}) \neq 0$.
- U tom slučaju matrica A nema niti jedan nulstupac, i svi su linearno nezavisni.



Po dijelovima linearna aproksimacija pomoću diskretne metode najmanjih kvadrata

- Riješit ćemo konkretan problem najmanjih kvadrata za po dijelovima linearnu aproksimaciju.
- Po dijelovima linearna funkcija φ sada je definirana kao

$$\varphi\Big|_{[t_{k-1},t_k]} = p_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje su polinomi p_k stupnja 1.
- Za čvorove

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

prostor $\mathcal{S}_1$ je dimenzije $n+1$, tj. dimenzija od $\mathcal{S}_1$ jednaka je broju čvorova.
- Baza $\{H_j = B_{j,1} : j = 0, \ldots, n\}$ prostora $\mathcal{S}_1$ definirana je na sljedeći način

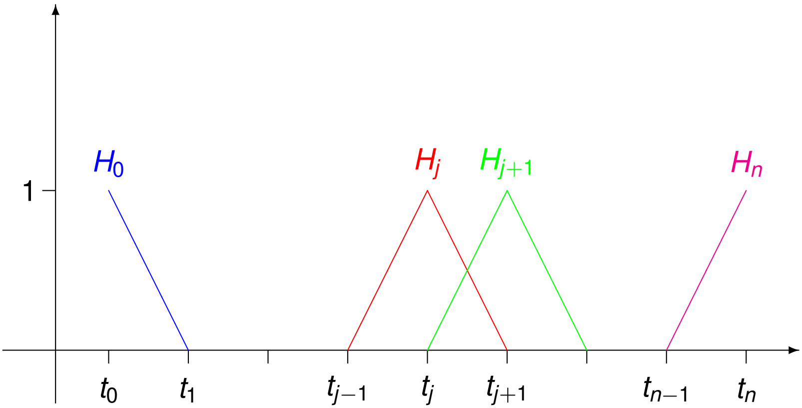
$$H_0(x) = \begin{cases} \frac{t_1 - x}{t_1 - t_0}, & x \in [t_0, t_1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$H_j(x) = \begin{cases} \frac{x - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & x \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{t_{j+1} - x}{t_{j+1} - t_j}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n-1$$

$$H_n(x) = \begin{cases} \frac{x - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, & x \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

- Korisno svojstvo ovih baznih funkcija je

$$H_j(t_i) = \delta_{ij}.$$



Slika: Zbog svog izgleda, bazne funkcije H_j zovemo “hat functions” ili “šeširne funkcije” ili “krovići”.

- Ako uzmemo neki x takav da je $x \in [t_k, t_{k+1}]$, tada su na tom segmentu samo dvije bazne funkcije netrivijalne: H_k i H_{k+1}.
- Zbog toga u matrici $A = [H_j(x_i)]$ svaki redak ima najviše dva netrivijalna elementa.
- U slučaju da je $m = n + 1$, i da su $x_i = t_{i-1}$, $i = 1, \ldots, n + 1$, tada se problem najmanjih kvadrata svodi na rješavanje trivijalnog sustava linearnih jednadžbi za $A = I$ (jer je $H_j(t_i) = \delta_{ij}$).
- U tom slučaju radi se o **interpolaciji** točaka (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n + 1$, a rezultat je $\alpha_j = y_{j+1}$, $j = 0, \ldots, n$, tj.

$$\varphi = \sum_{j=0}^{n} y_{j+1} H_j.$$

- U slučaju da je $m > n + 1$, i da za svaki $j = 0, \ldots, n$ postoji x_{i_j} takav da je $x_{i_j} \in \langle t_{j-1}, t_{j+1} \rangle$, pri čemu su svi x_{i_j}, $j = 0, \ldots, n$ međusobno različiti, tada se radi o **problemu najmanjih kvadrata sa jedinstvenim rješenjem**

$$\varphi = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_j.$$

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `nk_lin_splajn()` *koja računa matricu A i vektor b za po dijelovima linearnu aproksimaciju, koji će se koristiti u metodi najmanjih kvadrata. Ulazni parametri funkcije neka su*

- *vektor čvorova t duljine $n + 1$*
- *vektori podataka x i y duljine m*

a izlazni parametri neka su

- *matrica A*
- *vektor b.*

Najprije treba podatke (x_i, y_i) sortirati tako da x_i budu u uzlaznom poretku.

Zadatak

Napišite M-file funkciju `vrij_lin_splajna()` *koja računa vrijednost po dijelovima linearne funkcije u točci x. Ulazni parametri funkcije neka su*

- *točka x*
- *vektor čvorova t duljine $n+1$*
- *vektor koeficijenata α duljine $n+1$*

a izlazni parametar neka je

- *y, vrijednost splajna u točci x.*

Zadatak (nastavak)

Izvrednjavanje po dijelovima linearne funkcije φ u točci x odvija se u 2 koraka.

1. *Pomoću binarnog pretraživanja pronađite k takav da je $x \in [t_k, t_{k+1}\rangle$.*
2. *Izračunajte vrijednost funkcije φ kao*

$$\varphi(x) = \alpha_k H_k(x) + \alpha_{k+1} H_{k+1}(x).$$

Obratite posebnu pozornost ako je baš $x = t_n$.

Zadatak

Uzmite podatke iz primjera sa početka poglavlja o problemu najmanjih kvadrata spremljene u datoteci

`primjer_regresija_vrijednosnice.mat`

na adresi

http://www.math.hr/~nela/nmfm.html

Ovdje vrijedi da je $x = rt$ *i* $y = rj$. *Vaš zadatak je*

1. *Izračunati matricu A i b pomoću funkcije* `nk_lin_splajn()`.
2. *Riješiti problem najmanjih kvadrata* $\min \|A\alpha - b\|_2$ *pomoću SVD-a.*
3. *Izračunati vrijednosti od* $\varphi = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_j$ *u čvorovima, i spremiti te vrijednosti u polje* sy.

Zadatak (nastavak)

4. *Nacrtati graf sa prikazanim točkama* (x_i, y_i) *i funkcijom* φ *izraženom pomoću točaka sy.*

Ovaj zadatak treba napraviti za tri različita izbora čvorova:

- $t_1 = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$
- $t_2 = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 1\}$
- $t_3 = sort(rt)$

Po dijelovima polinomna aproksimacija pomoću neprekidne metode najmanjih kvadrata

- Parametre funkcije $\varphi = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{i,\ell}$ možemo odrediti i na još jedan način.
- Pretpostavimo da želimo aproksimirati neku poznatu funkciju f pomoću po dijelovima polinomne funkcije.
- To se često radi za funkcije f koje su numerički zahtjevne za računanje.
- Tada, funkciju φ možemo izračunati pomoću **neprekidne metode najmanjih kvadrata** u kojoj se odstupanje od f mjeri na cijeloj njenoj domeni, a ne samo u diskretnim točkama.
- Radi se o problemu

$$\min_{\varphi \in \mathcal{S}_\ell} \|f - \varphi\|_2,$$

gdje je $\| \ \|_2$ posebno definirana norma.

- Kako bismo našli minimalnu grešku u neprekidnom slučaju, najprije tebamo definirati skalarni produkt za neprekidne funkcije na nekom intervalu.
- Skalarni produkt nam treba zbog svojstva da je rješenje problema najmanjih kvadrata dobiveno ortogonalnom projekcijom na potprostor.
- Skalarni produkt onda možemo na prirodan način povezati sa normom.

Definicija

Neka je $w(x)$ zadana funkcija. $w(x)$ je težinska funkcija ako je

- $w(x) \geq 0$ *na intervalu* $[a, b]$,
- $w(x)$ *može biti jednaka 0 samo u izoliranim točkama.*

Definicija

Težinska L_2-norma (2-norma) funkcije u na $[a, b]$ je

$$\|u\|_2 = \left(\int_a^b w(x)|u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Ako je ta norma konačna i za funkciju u i za funkciju v, onda možemo definirati težinski skalarni produkt

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b w(x)u(x)\overline{v(x)}dx.$$

- Skalarni produkt $\langle u, v\rangle$ je dobro definiran (konačan), jer vrijedi Cauchy–Schwarzova nejednakost

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|_2 \cdot \|v\|_2.$$

- $\langle u, v\rangle$ je zaista skalarni produkt, jer
  1. $\langle u, u\rangle \geq 0$, a jednak je 0 za one funkcije u koje su nula u svim točkama gdje je $w(x) > 0$,
  2. vrijedi linearnost u prvom argumentu

$$\langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v\rangle = \alpha_1 \langle u_1, v\rangle + \alpha_2 \langle u_2, v\rangle,$$

  3. vrijedi antilinearnost u drugom argumentu

$$\langle u, \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2\rangle = \bar{\beta}_1 \langle u, v_1\rangle + \bar{\beta}_2 \langle u, v_2\rangle.$$

- Parametre funkcije $\varphi = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{i,\ell}$ odredit ćemo kao i kod diskretnog slučaja: **rješavanjem sustava normalnih jednadžbi.**
- Promotrimo sada kvadrat norme greške za relane funkcije

$$\|f - \varphi\|_2^2 = \langle f, f\rangle - 2\langle f, \varphi\rangle + \langle \varphi, \varphi\rangle.$$

- Ako definiramo

$$F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) = \|f - \varphi\|_2^2 = \int_a^b w(x) \left(f(x) - \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{i,\ell}(x) \right)^2 dx,$$

tada vrijedi sljedeće.

$$
\begin{aligned}
F(\alpha_0,\ldots,\alpha_d) = \int_a^b w(x)f(x)^2dx - \\
- 2\sum_{j=0}^{d}\alpha_j \int_a^b w(x)f(x)B_{j,\ell}(x)dx + \\
+ \sum_{j=0}^{d}\alpha_j^2 \int_a^b w(x)B_{j,\ell}(x)^2dx + \\
+ \sum_{\substack{j,k=0\\ j\neq k}}^{d}\alpha_j\alpha_k \int_a^b w(x)B_{j,\ell}(x)B_{k,\ell}(x)dx
\end{aligned}
$$

- Funkcija $F(\alpha_0,\ldots,\alpha_d)$ je kvadratna funkcija, pa se njen minimum postiže za $\nabla F(\alpha_0,\ldots,\alpha_d) = 0$, 0dnosno kada su sve njene parcijalne derivacije jednake 0.

- Iz predhodnog izraza za $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$ slijedi

$$\frac{\partial F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)}{\partial \alpha_i} = -2 \int_a^b w(x) f(x) B_{i,\ell}(x) dx + + 2 \sum_{j=0}^{d} \alpha_j \int_a^b w(x) B_{i,\ell}(x) B_{j,\ell}(x) dx, \quad i = 0, \ldots, d,$$

pa se minimum funkcije $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$ postiže u rješenju sustava normalnih jedadžbi

$$\sum_{j=0}^{d} \alpha_j \int_a^b w(x) B_{i,\ell}(x) B_{j,\ell}(x) dx = \int_a^b w(x) f(x) B_{i,\ell}(x) dx, \quad i = 0, \ldots, d.$$

- Koeficijenti normalnih jedadžbi su zapravo odgovarajući skalarni produkti, pa one u pojednostavljenom obliku glase

$$\sum_{j=0}^{d} \langle B_{i,\ell}, B_{j,\ell} \rangle \alpha_j = \langle f, B_{i,\ell} \rangle, \, i = 0, \ldots, d.$$

- Ako definiramo matricu A, i vektore x i b sa

$$A = \begin{bmatrix} \langle B_{0,\ell}, B_{0,\ell} \rangle & \langle B_{0,\ell}, B_{1,\ell} \rangle & \cdots & \langle B_{0,\ell}, B_{d,\ell} \rangle \\ \langle B_{1,\ell}, B_{0,\ell} \rangle & \langle B_{1,\ell}, B_{1,\ell} \rangle & \cdots & \langle B_{1,\ell}, B_{d,\ell} \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle B_{d,\ell}, B_{0,\ell} \rangle & \langle B_{d,\ell}, B_{1,\ell} \rangle & \cdots & \langle B_{d,\ell}, B_{d,\ell} \rangle \end{bmatrix},$$

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \langle f, B_{0,\ell} \rangle \\ \langle f, B_{1,\ell} \rangle \\ \vdots \\ \langle f, B_{d,\ell} \rangle \end{bmatrix},$$

onda problem najmanjih kvadrata možemo svesti na sustav normalnih jednadžbi zapisanih u matričnom obliku kao

$$Ax = b.$$

- Promotrimo sada svojstva matrice A:
  - ona je vrpčasta sa malim brojem dijagonala zbog ograničenog nosača B-splajnova
  - ona je simetrična
  - ona je pozitivno definitna
- Provjerimo pozitivnu definitnost matrice A

$$x^T Ax = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} \alpha_i \alpha_j \langle B_{i,\ell}, B_{j,\ell} \rangle = \sum_{i=0}^{d} \sum_{j=0}^{d} \langle \alpha_i B_{i,\ell}, \alpha_j B_{j,\ell} \rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=0}^{d} \alpha_i B_{i,\ell}, \sum_{j=0}^{d} \alpha_j B_{j,\ell} \right\rangle = \left\| \sum_{i=0}^{d} \alpha_i B_{i,\ell} \right\|_2^2 \geq 0$$

- $x^T Ax = 0$ ako i samo ako je $\sum_{i=0}^{d} \alpha_i B_{i,\ell} \equiv 0$ čim je $w(x) > 0$.
- Za slučaj $w(x) \equiv 1$, budući da B-splajnovi čine bazu imamo da je

$$\sum_{i=0}^{d} \alpha_i B_{i,\ell} \equiv 0 \quad \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 0, \ldots, d.$$

- Dakle, matrica A je regularna pa postoji jedinstveno rješenje problema najmanjih kvadrata.
- Da je to zaista minimum, lako se provjeri računanjem Hessiana funkcije $F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)$:

$$\frac{\partial^2 F(\alpha_0, \ldots, \alpha_d)}{\partial \alpha_i \partial \alpha_j} = 2 \int_a^b w(x) B_{i,\ell}(x) B_{j,\ell}(x) dx = 2\langle B_{i,\ell}, B_{j,\ell}\rangle,$$

odnosno

$$H = 2A \quad \text{je pozitivno definitna matrica.}$$

Po dijelovima linearna aproksimacija pomoću neprekidne metode najmanjih kvadrata

- U slučaju linearne aproksimacije, bazne funkcije su "krovići" H_j, $j = 0, \ldots, n$, a $w(x) = 1$.
- Pogledajmo kako u tom slučaju izgleda matrica A.
- Prvo možemo zaključiti da je $H_i(x) \cdot H_j(x) = 0$ za sve $x \in [a, b]$ kada je $|i - j| > 1$.
- Dalje vrijedi

$$
\begin{aligned}
H_{j-1}(x) \cdot H_j(x) &= \begin{cases} \frac{t_j - x}{t_j - t_{j-1}} \cdot \frac{x - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}, & x \in [t_{j-1}, t_j] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{-x^2 + (t_{j-1} + t_j)x - t_{j-1} t_j}{(t_j - t_{j-1})^2}, & x \in [t_{j-1}, t_j] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
& j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

$$H_0(x)^2 = \begin{cases} \frac{(t_1-x)^2}{(t_1-t_0)^2}, & x \in [t_0, t_1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2-2t_1x+t_1^2}{(t_1-t_0)^2}, & x \in [t_0, t_1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$H_j(x)^2 = \begin{cases} \frac{(x-t_{j-1})^2}{(t_j-t_{j-1})^2}, & x \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{(t_{j+1}-x)^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2-2t_{j-1}x+t_{j-1}^2}{(t_j-t_{j-1})^2}, & x \in [t_{j-1}, t_j] \\ \frac{x^2-2t_{j+1}x+t_{j+1}^2}{(t_{j+1}-t_j)^2}, & x \in [t_j, t_{j+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$j = 1, \ldots, n-1$$

$$
\begin{aligned}
H_n(x)^2 &= \begin{cases} \dfrac{(x-t_{n-1})^2}{(t_n-t_{n-1})^2}, & x \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{x^2-2t_{n-1}x+t_{n-1}^2}{(t_n-t_{n-1})^2}, & x \in [t_{n-1}, t_n] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}
\end{aligned}
$$

- Elemente matrice A sada je lako odrediti.

$$
\begin{aligned}
\langle H_{j-1}, H_j \rangle &= \int_a^b H_{j-1}(x)H_j(x)dx = \int_{t_{j-1}}^{t_j} H_{j-1}(x)H_j(x)dx \\
&= \frac{t_j - t_{j-1}}{6}, \quad j = 1, \dots, n \\
\langle H_0, H_0 \rangle &= \int_a^b H_0(x)H_0(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} H_0(x)H_0(x)dx \\
&= \frac{t_1 - t_0}{3} \\
\langle H_j, H_j \rangle &= \int_a^b H_j(x)H_0(j)dx = \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} H_j(x)H_j(x)dx \\
&= \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{3}, \quad j = 1, \dots, n-1 \\
\langle H_n, H_n \rangle &= \int_a^b H_n(x)H_n(x)dx = \int_{t_{n-1}}^{t_n} H_n(x)H_n(x)dx \\
&= \frac{t_n - t_{n-1}}{3}
\end{aligned}
$$

- Matrica A je dakle tridijagonalna, strogo dijagonalno dominantna, pozitivno definitna, oblika

$$A = \begin{bmatrix} \frac{t_1-t_0}{3} & \frac{t_1-t_0}{6} & & & \\ \frac{t_1-t_0}{6} & \frac{t_2-t_0}{3} & \frac{t_2-t_1}{6} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{t_{n-1}-t_{n-2}}{6} & \frac{t_n-t_{n-2}}{3} & \frac{t_n-t_{n-1}}{6} \\ & & & \frac{t_n-t_{n-1}}{6} & \frac{t_n-t_{n-1}}{3} \end{bmatrix},$$

a vektor b je oblika

$$b = \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} f(x)H_0(x)dx \\ \int_{t_0}^{t_2} f(x)H_1(x)dx \\ \vdots \\ \int_{t_{n-2}}^{t_n} f(x)H_{n-1}(x)dx \\ \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(x)H_n(x)dx \end{bmatrix}.$$

- Sustav $Ax = b$ se sada jednostavno može riješiti
  - pomoću faktorizacije Choleskog
  - specijalnom LDL^T metodom za tridijagonalne matrice
  - SOR metodom
  - metodom konjugiranih gradijenata

Zadaci

Zadatak

Napišite M-file funkciju `nnk_lin_splajn()` *koja računa matricu A i vektor b za po dijelovima linearnu aproksimaciju, koji će se koristiti u neprekidnoj metodi najmanjih kvadrata. Ulazni parametri funkcije neka su*

- *vektor čvorova t duljine* $n + 1$
- *pokazivač na funkciju f*

a izlazni parametri neka su

- *matrica A*
- *vektor b.*

Pokazivač na fukciju imena ime_funkcije je definiran sa @ime_funkcije. Mogu se koristiti i pokazivači na anonimne funkcije definirane npr. kao

```
f=@(x) x^2+sin(x)
```

Zadatak (nastavak)

Kod anonimnih funkcija radi se o jednostavnim funkcijama koje se mogu definirati unutar jedne linije.
Upute za računanje vektora b:

- *Funkcije $f(x) \cdot H_j(x)$ definirajte kao pokazivače na anonimne funkcije.*
- *Za $j = 1, \ldots, n-1$ napišite dvije verzije te funkcije: jednu za interval $[t_{j-1}, t_j]$, a drugu za interval $[t_j, t_{j+1}]$.*
- *Integral ćemo računati kao*

$$\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(x)H_j(x)dx = \int_{t_{j-1}}^{t_j} f(x)H_j(x)dx + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)H_j(x)dx.$$

- *Za računanje integrala koristite MATLAB-ovu funkciju* `quad()`.

Zadatak (nastavak)

- *Funkcija* `quad()` *zahtijeva pokazivač na funkciju.*
- *Za izvršavanje te funkcije potrebno je da su sve operacije u anonimnim funkcijama koje definiraju $f(x) \cdot H_j(x)$ po elementima (.* i ./).*

Zadatak

Neprekidnom metodom najmanjih kvadrata nađite po dijelovima linearnu aproksimaciju funkcije

$$f(x) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Vaš zadatak je

1. *Izračunati matricu A i b pomoću funkcije* `nnk_lin_splajn()`.
2. *Riješiti sustav $A\alpha = b$ pomoću neke metode.*
3. *Izračunati vrijednosti od $\varphi = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j H_j$ u čvorovima, i spremiti te vrijednosti u polje sy*
4. *Nacrtati graf sa prikazanom funkcijom f (MATLAB-ova funkcija* `fplot()`*) i funkcijom φ izraženom pomoću točaka sy.*

Ovaj zadatak treba napraviti za $t = 0 : pi/10 : pi$.