Numerička analiza

1. zadaća

1. Dokažite sljedeću tvrdnju. Neka su $a, b, x \in \mathbb{R}^n$ i neka se $y = (I - ab^T)x$ računa kao $\hat{y} = \text{fl}(x - a(b^T x))$. Tada vrijedi $\hat{y} = y + \Delta y$, pri čemu je ocjena po komponentama
$$|\Delta y| \leq \gamma_{n+3}(I + |a||b|^T)|x|,$$
a po normi je
$$\|\Delta y\|_2 \leq \gamma_{n+3}(1 + \|a\|_2\|b\|_2)\|x\|_2.$$

2. Dokažite van der Sluisova teorem i njegov korolar.

Teorem 1 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, neka $\mathcal{D}_k \subset \mathbb{R}^{k\times k}$ označava skup regularnih dijagonalnih matrica, i definirajmo*
$$D_C = diag(\|A(:,j)\|_2)^{-1}, \qquad D_R = diag(\|A(i,:)\|_2)^{-1}.$$
Tada vrijedi
$$\kappa_2(AD_C) \leq \sqrt{n} \min_{D\in\mathcal{D}_n} \kappa_2(AD), \qquad \text{ako je } rang(A) = n,$$
$$\kappa_2(D_R A) \leq \sqrt{m} \min_{D\in\mathcal{D}_m} \kappa_2(DA), \qquad \text{ako je } rang(A) = m,$$
gdje je $\kappa_2(A) = \|X\|_2\|X^\dagger\|_2$.

Korolar 1 *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simetrična pozitivno definitna matrica, i neka je $D_* = diag(a_{ii}^{-1/2})$. Tada vrijedi*
$$\kappa_2(D_* A D_*) \leq n \min_{D\in\mathcal{D}_n} \kappa_2(DAD).$$

Nela Bosner