Numerička analiza

3. zadaća

1. Dokažite Christoffel–Darbouxov identitet za ortogonalne polinome.

   Teorem 1 *Neka je $\{p_n(x) \mid n \geq 0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w(x) \geq 0$. Za njih vrijedi*

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k(x)p_k(y)}{\gamma_k} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{a_n\gamma_n(x-y)}.$$

   Uputa: Manipulirajte tročlanom rekurzijom.

2. Dokažite relaciju koja povezuje inverzne i recipročne razlike:

   $$\phi_0(x_0) = \rho_0(x_0), \quad \phi_1(x_0, x_1) = \rho_1(x_0, x_1),$$

   i za $k \geq 2$

   $$\phi_k(x_0, \ldots, x_k) = \rho_k(x_0, \ldots, x_k) - \rho_{k-2}(x_0, \ldots, x_{k-2}).$$

3. Pokažite da težinski koeficijenti Newton–Cotesovih formula moraju biti simetrični, tj. ako je

   $$\int_a^b f(x)\,dx = I_m(f) + E_m(f), \quad I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k f(x_k),$$

   integracijska formula reda m, onda za koeficijente w_k vrijedi

   $$w_k = w_{m-k}, \quad 0 \leq k \leq \lceil m/2 \rceil.$$

   Uputa: Uzeti simetričnu (par–nepar) bazu potencija oko polovišta.

Nela Bosner