Numerička analiza

2. zadaća

1. Izvedite iterativnu metodu iz Krylovljevih prostora za simetrične matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sličnu konjugiranim gradijentima, koja se zasniva na sljedećim postavkama:

   - Iteracije su oblika

   $$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k \\ r_{k+1} &= r_k - \alpha_k A d_k \\ d_{k+1} &= r_{k+1} + \beta_{k+1} d_k \end{aligned}$$

   - Parametar α_k se bira tako da rezidual r_{k+1} ima minimalnu euklidsku normu od svih vektora oblika $r_k - \alpha A d_k$.
   - Smjerovi traganja $d_0, d_1, \ldots, d_{n-1}$ se biraju tako da budu A^2-ortogonalni, i dobivaju se primjenom Gram–Schmidtove metode A^2-ortogonalizacije na reziduale r_k.

   Da li se može dogoditi da se ovaj algoritam zaustavi a da nije izračunao rješenje i u kojim situacijama? Implementirajte ovaj algoritam u MATLAB-u i testirajte ga na raznim matricama sa različitim rasporedima svojstvenih vrijednosti. Nacrtajte grafove konvergencije: relativne reziduale $\|r_k\|_2/\|b\|_2$ za svaku iteraciju k.

2. Dokažite sljedeći teorem iz teorije perturbacije za svojstveni problem.

   Teorem 1 *Neka su $A, \delta A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitske matrice, i neka su $\lambda_i(A) > 0$ (A je pozitivno definitna) i $\lambda_i(A+\delta A)$ svojstvene vrijednosti od A i $A+\delta A$ u nepadajućem poretku. Ako je $A = LL^*$ bilo koja faktorizacija sa regularnim faktorom L i ako je $\|L^{-1}\delta A L^{-*}\|_2 < 1$, onda je*

   $$\frac{|\lambda_i(A+\delta A) - \lambda_i(A)|}{|\lambda_i(A)|} \leq \|L^{-1}\delta A L^{-*}\|_2, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

   Uputa: Koristite korolar teorema Ostrowskog.

3. Izvedite postupak za rješavanje ortogonalnog Procrustes problema

   $$\min_{Q\in\mathbb{R}^{n\times n},\ Q^TQ=I} \|AQ - B\|_F,$$

   pri čemu su $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, i $\|M\|_F = \sqrt{\mathrm{trag}(M^TM)}$ Frobeniusova matrična norma.
   Uputa: koristite dekompoziciju singularnih vrijednosti.

Nela Bosner