

PMF – Matematički odjel
Poslijediplomski studij
Povjerenstvo za provođenje ispita iz *Numeričke matematike*

Z. Drmač, V. Hari, M. Rogina

Numerička matematika

Sljedeća sekcija sadrži detaljan popis tema za ispit iz *Numeričke matematike*. Ovo povjerenstvo predlaže da ovaj dokument bude i obvezujući za nastavnika koji predaje temeljni kurs iz *Numeričke matematike*. Drugim riječima, ovime je implicitno određen sadržaj tog kolegija, s time da nastavnik ovisno o svojim afinitetima može unositi varijacije u sadržaj, ali bez da bitno mijenja koncept naveden u ovom dokumentu. U skladu s time, slažemo se sa idejom da dobra ocjena iz ovog predmeta (vrlo dobar ili izvrstan) položena pred povjerenstvom (kako je predloženo na zadnjem sastanku) oslobađa pristupnika od polaganja ispita za koje je zaduženo ovo povjerenstvo.

Teme prijamnog ispita

1. Aproksimacija, greške i stabilnost

- (a) *Konačna aritmetika*: Aproksimacija realnih brojeva u računalu. Aritmetika i elementarne funkcije – definicija i ocjene pogreške. IEEE standard. Analiza algoritama: greška unazad (backward error) i naprijed (forward error).
- (b) *Stabilnost algoritama*: Backward i forward stabilnost. Komutativni dijagrami.

2. Aproksimacija funkcija i numerička integracija

- (a) *Interpolacija*: Lagrangeov interpolacijski polinom. Hermiteova interpolacija. Izbor čvorova interpolacije. Čebiševljevi polinomi. Interpolacija spline funkcijama. Kubični spline.
- (b) *Ortogonalni polinomi*: Rekurzija. Distribucija nultočki. Legendreovi, Laguerreovi, Hermiteovi i Čebiševljevi polinomi. Diskretna i kontinuirana aproksimacija funkcija u smislu najmanjih kvadrata bazirana na ortogonalnim polinomima.
- (c) *Fourierova aproksimacija*: Kontinuirana i diskretna Fourierova aproksimacija. Diskretna Fourierova transformacija i FFT algoritam.
- (d) *Numerička integracija*: Newton-Côtesove formule. Gaussova integracija. Složene formule, Rombergov algoritam.
- (e) *Iterativno rješavanje nelinearnih problema*: Newtonova metoda u jednoj i više dimenzija. Funkcionalne iteracije, Sturmovi nizovi, računanje polinoma i njegovih derivacija, Bairstow-ljeva metoda.

3. Numerička linearna algebra

- (a) *Sustavi linearnih jednadžbi*: Gaussove eliminacije i LU faktorizacija. Analiza stabilnosti algoritma i teorija perturbacija za linearne sustave. Pozitivno definitni sustavi i faktorizacija Choleskog. Indefinitni sustavi.
- (b) *Problemi najmanjih kvadrata*: QR faktorizacija (Gram-Schmidtov, Householderov i Givensov algoritam). Rješenje problema najmanjih kvadrata pomoću QR faktorizacije. Generalizirani inverz matrice.
- (c) *SVD dekompozicija*: Definicija SVD dekompozicije. Primjena SVD dekompozicije u rješavanju problema najmanjih kvadrata (bez ili sa ograničenjima). Određivanje numeričkog ranga matrice. Najbolja aproksimacija matrice matricom zadanog nižeg ranga.

- (d) *Problem svojstvenih vrijednosti*: Jordanova forma matrice. Shurova forma matrice. Redukcija matrice na Hessenbergovu i tridijagonalnu formu. Teorija simetričnog problema svojstvenih vrijednosti (varijacijska karakterizacija spektra, perturbacije spektra) i numeričke metode (Jacobijeva metoda, QR iteracije). Metoda potencija.

4. Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi

- (a) *Diskretizacija*: Konačne razlike. Euler-Cauchy-eva metoda, Taylorova metoda. Jednokoračne metode, posebno Runge-Kutta. Višekoračne metode, posebno prediktor-korektor. Linearne diferencijske sheme, konzistencija i stabilnost. Numeričke metode za rješavanje rubnog problema za običnu diferencijalnu jednadžbu.

Diferencijske sheme za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, posebno Laplaceova jednadžba u pravokutniku. Varijacijska karakterizacija, elementi metode konačnih elemenata za eliptičke parcijalne jednadžbe. Jednadžba provođenja, implicitne i eksplicitne metode. Elementi numeričkog rješavanja hiperboličkih parcijalnih jednadžbi. Konzistencija, stabilnost i konvergencija.

- (b) *Specijalne metode*: Osnovne ideje multigrid i metoda dekompozicije domene.

Literatura

1. K. E. Atkinson: An introduction to numerical analysis. John Wiley & Sons. 2nd ed. 1989.
2. S. C. Brenner, L. R. Scott: The mathematical theory of finite element methods, Springer 1994.
3. P. G. Ciarlet: Introduction to numerical linear algebra and optimisation. Cambridge University Press, Cambridge 1989.
4. J. W. Demmel: Applied Numerical Linear Algebra. SIAM, 1997.
5. G. Golub and C. F. Van Loan: Matrix computations. The John Hopkins University Press, Baltimore 1989.
6. N. J. Higham: Accuracy and stability of numerical algorithms. SIAM, 1996.
7. J. S. Stoeber, R. Bulirsch: Introduction to numerical analysis, Springer 1980.