Numerička analiza

13. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Nela Bosner

nela@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odjel, Zagreb

Sadržaj predavanja

- Aproksimacija i interpolacija:
  - Uvod u problem aproksimacije (norme, linearnost).
  - Problem interpolacije polinomima.
  - Egzistencija i jedinstvenost.
  - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
  - Lagrangeova baza.
  - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
  - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
  - Newtonova baza.
  - Računanje Newtonovog oblika IP.

Aproksimacija i interpolacija

Općenito o problemu aproksimacije

Što je problem aproksimacije?

Poznate su neke informacije o funkciji f, definiranoj na nekom podskupu $X \subseteq \mathbb{R}$.

Na osnovu tih informacija, želimo funkciju f

- zamijeniti nekom drugom funkcijom φ na skupu X, ili na još većem skupu,
- tako da su funkcije f i φ bliske u nekom smislu.

Skup X je najčešće:

- interval oblika $[a, b]$ (koji može biti i neograničen), ili
- diskretni skup točaka.

Pitanje: Zašto uopće želimo zamjenu $f \mapsto \varphi$?

Oblici problema aproksimacije

Problem aproksimacije javlja se u dva bitno različita oblika.

Prvi oblik: Znamo funkciju f (analitički ili slično),

- ali je njezina forma prekomplicirana za računanje.

U tom slučaju,

- izaberemo neke informacije o f i
- po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju φ.

Prednosti ovog oblika problema aproksimacije:

- Možemo birati informacije o f koje ćemo koristiti.
- Jednako tako, možemo ocijeniti grešku dobivene aproksimacije φ, obzirom na prave vrijednosti funkcije f.

Oblici problema aproksimacije (nastavak)

Drugi oblik: Ne znamo funkciju f,

- već samo neke informacije o njoj,
- na primjer, vrijednosti na nekom (diskretnom) skupu točaka.

Zamjenska funkcija φ određuje se iz raspoloživih informacija.

- Osim samih podataka (poznate vrijednosti),
- ove informacije mogu uključivati i očekivani oblik ponašanja tih podataka (tj. funkcije φ).

Mane ovog oblika problema aproksimacije:

- Ne može se napraviti ocjena pogreške,
- bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji f.

Prvi oblik problema — primjene

Prvi oblik se obično koristi u teoriji

- za razvoj numeričkih metoda na bazi aproksimacije.

Na primjer, za numeričko

- integriranje funkcija (integriramo aproksimaciju),
- rješavanje diferencijalnih jednadžbi.

Praktični primjer:

- programska biblioteka za računanje raznih elemenatrnih funkcija (exp, sin, cos, sqrt i sl),

Traži se maksimalna brzina i puna točnost, na razini osnovne greške zaokruživanja.

Realizacija standardno ide racionalnim aproksimacijama.

Drugi oblik problema — primjene

Drugi oblik problema se vrlo često javlja u praksi.

Na primjer,

- kod mjerenja nekih veličina (rezultat je "tablica"),
- osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze "između" izmjerenih točaka.

To je ključna svrha ovakve aproksimacije!

Napomena. Kod mjerenja se javljaju i greške mjerenja.

- Zato postoje posebne tehnike — vrste aproksimacija, za "ublažavanje" tako nastalih grešaka.

Na primjer, metoda najmanjih kvadrata.

Izbor aproksimacijske funkcije φ

Aproksimacijska funkcija φ bira se:

- prema prirodi modela — izbor dolazi iz problema,
- ali tako da bude relativno jednostavna za računanje.

Obično se prvo fiksira (izabere) neki skup funkcija $\mathcal{F}$.

- Onda se traži "najbolja" aproksimacija φ iz tog skupa $\mathcal{F}$.

Skup $\mathcal{F}$ može biti vektorski prostor, ali ne mora.

Za praktično računanje, funkcija φ obično ovisi

- o nekom konačnom broju parametara a_k, $k = 0, \ldots, m$,
- koje treba odrediti po nekom kriteriju aproksimacije.

Ideja: Sve moguće vrijednosti ovih $m + 1$ parametara određuju skup svih "dozvoljenih" funkcija $\mathcal{F}$.

Parametrizacija aproksimacijske funkcije φ

Kad funkciju φ zapišemo u obliku

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

kao funkciju koja ovisi o parametrima a_k, onda kažemo

- da smo izabrali opći oblik aproksimacijske funkcije φ (u odnosu na skup $\mathcal{F}$).

Prema obliku ovisnosti o parametrima, aproksimacijske funkcije možemo grubo podijeliti na:

- linearne aproksimacijske funkcije,
- nelinearne aproksimacijske funkcije.

Koje su bitne razlike između ove dvije grupe?

Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik linearne aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x),$$

gdje su $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ poznate funkcije koje znamo računati.

Linearnost u ovisnosti o parametrima znači:

- traženi parametri su koeficijenti u linearnoj kombinaciji poznatih funkcija.

Velika prednost: Određivanje parametara a_k obično vodi na "linearne" probleme (koji su lakše rješivi od nelinearnih):

- sustave linearnih jednadžbi, ili
- linearne probleme optimizacije.

Linearne aproksimacijske funkcije (nastavak)

Standardni model za linearni oblik aproksimacije:

- skup "dozvoljenih" funkcija $\mathcal{F}$ je vektorski prostor, a
- funkcije $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ su neka baza u tom prostoru.

Unaprijed se bira (fiksira):

- vektorski prostor $\mathcal{F}$, odgovarajuće dimenzije $m + 1$,
- baza $\varphi_0, \ldots, \varphi_m$ u $\mathcal{F}$.

Napomena. Kod približnog numeričkog računanja,

- "dobar" izbor baze je ključan za stabilnost postupka
- i točnost izračunatih vrijednosti parametara aproksimacijske funkcije φ.

Primjer 1 — polinomi

Nekoliko primjera najčešće korištenih vektorskih prostora $\mathcal{F}$.

Polinomi. Uzimamo $\mathcal{F} = \mathcal{P}_m$, gdje je $\mathcal{P}_m$ vektorski prostor polinoma stupnja $\leq m$.

Standardni izbor baze je $\varphi_k(x) = x^k$, za $k = 0, \ldots, m$, tj.

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m.$$

Nije nužno da φ zapisujemo u bazi $\{\, 1,\ x,\ \ldots,\ x^m \,\}$. Upravo suprotno, vrlo često je neka druga baza bitno bolja.

- Na primjer, $\{\, 1,\ (x - x_0),\ (x - x_0)\,(x - x_1),\ \ldots \,\}$, gdje su $x_0, x_1, \ldots$ zadane točke (v. kod interpolacije).
- Ortogonalni polinomi, obzirom na pogodno izabrani skalarni produkt (v. kod najmanjih kvadrata).

Primjer 2 — trigonometrijski polinomi

Trigonometrijski "polinomi". Za funkcije φ_k uzima se prvih $m+1$ funkcija iz skupa

$$\{\, 1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots \,\}.$$

Koriste se za aproksimaciju periodičkih funkcija na intervalu perioda — ovdje, recimo, $[0, 2\pi]$.

- Primjena je, na primjer, u obradi i modeliranju signala.

Varijacije u izboru baze:

- Koristi se dodatni faktor u argumentu sinusa i kosinusa ($x \mapsto \lambda x$) — koji služi za kontrolu perioda.
- Ponekad se biraju samo parne ili samo neparne funkcije iz ovog skupa.

Primjer 3 — polinomni splajnovi

Polinomni splajnovi. To su funkcije koje su "po dijelovima" polinomi. Ako su zadane točke $x_0 < \cdots < x_n$, onda se splajn funkcija na svakom podintervalu

- svodi na polinom određenog fiksnog (niskog) stupnja,

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

a p_k su polinomi najčešće stupnjeva 1, 2, 3 ili 5.

U točkama x_i obično se zahtijeva da funkcija φ zadovoljava još

- i "uvjete ljepljenja" vrijednosti funkcije i nekih njezinih derivacija, ili nekih aproksimacija za te derivacije.

Splajnovi se često koriste zbog dobrih ocjena greške aproksimacije i kontrole oblika aproksimacijske funkcije.

Nelinearne aproksimacijske funkcije

Nelinearne aproksimacijske funkcije φ

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \ldots, a_m),$$

imaju nelinearnu ovisnosti o parametrima aproksimacijske funkcije $a_0, \ldots, a_m$.

Pripadni skup 'dozvoljenih" funkcija $\mathcal{F}$ najčešće

- nije vektorski prostor.

Određivanje parametara a_k, općenito, vodi na "nelinearne" probleme:

- sustave nelinearnih jednadžbi, ili
- nelinearne probleme optimizacije.

Primjer 4 — eksponencijalne funkcije

Par primjera najčešće korištenih oblika nelinearnih aproksimacijskih funkcija.

Eksponencijalne aproksimacije. Imaju oblik linearne kombinacije eksponencijalnih funkcija s parametrima u eksponentu:

$$\varphi(x) = c_0 e^{b_0 x} + c_1 e^{b_1 x} + \cdots + c_r e^{b_r x},$$

Broj nezavisnih parametara je $m + 1 = 2r + 2$.

Opisuju, na primjer,

- procese rasta i odumiranja u raznim populacijama,
- s primjenom u biologiji, ekonomiji i medicini.

Primjer 5 — racionalne funkcije

Racionalne funkcije. Imaju opći oblik

$$\varphi(x) = \frac{b_0 + b_1 x + \cdots + b_r x^r}{c_0 + c_1 x + \cdots + c_s x^s},$$

i $m + 1 = r + s + 1$ nezavisnih parametara, a ne $r + s + 2$, kako formalno piše.

Objašnjenje. Razlomci se mogu proširivati,

- ako su b_i, c_i parametri, onda su to i tb_i, tc_i, za $t \neq 0$;
- uvijek možemo fiksirati jedan od koeficijenata b_i ili c_i, a koji je to — obično slijedi iz prirode modela.

Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadna teorija je relativno nova.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija

Interpolacija je zahtjev da se funkcije f i φ podudaraju na nekom konačnom skupu točaka.

- Te točke nazivamo čvorovi interpolacije.
- Zahtjevu se može, ali i ne mora, dodati zahtjev da se u čvorovima, osim funkcijskih vrijednosti, poklapaju i vrijednosti nekih derivacija.

U najjednostavnijem obliku interpolacije, kad se podudaraju samo funkcijske vrijednosti, od podataka o funkciji f

- koristi se samo informacija o njenoj vrijednosti na skupu od $n+1$ točaka,
- tj. podaci (x_k, f_k), gdje je $f_k := f(x_k)$, za $k = 0, \ldots, n$.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija (nast.)

- Parametri $a_0, \ldots, a_n$ (mora ih biti točno onoliko koliko i podataka, tj. $m = n$) određuju se iz uvjeta

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \ldots, a_n) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n,$$

što je, općenito, nelinearni sustav jednadžbi.

- Linearnost funkcije φ povlači da parametre a_k dobivamo iz sustava linearnih jednadžbi
  - koji ima točno $n + 1$ jednadžbi za $n + 1$ nepoznanica.

  Matrica tog sustava je kvadratna.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Minimizacija pogreške je drugi kriterij određivanja parametara aproksimacije. Funkcija φ bira se tako da se minimizira neka odabrana norma pogreške

$$e(x) = f(x) - \varphi(x)$$

u nekom odabranom prostoru funkcija $\mathcal{F}$ za φ, na nekoj domeni X.

Ove aproksimacije, često zvane i najbolje aproksimacije po normi, dijele se na

- diskretne — ako se norma pogreške e minimizira na diskretnom skupu podataka X;
- kontinuirane — ako se norma pogreške e minimizira na kontinuiranom skupu podataka X.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Standardno se kao norme pogreške koriste

- 2-norma i
- ∞-norma.

Za 2-normu

- pripadna se aproksimacija zove srednjekvadratna,
- a metoda za njeno nalaženje zove se metoda najmanjih kvadrata.

Funkcija φ, odnosno njeni parametri, se traže tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

- U diskretnom slučaju je $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$, pa raspisom prethodne relacije dobivamo

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} (f(x_k) - \varphi(x_k))^2} \to \min,$$

- a u kontinuiranom slučaju

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 \, dx} \to \min\,.$$

Preciznije, minimizira se samo ono pod korijenom.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

U slučaju ∞-norme pripadna se aproksimacija zove minimaks aproksimacija, a parametri se biraju tako da se nađe

$$\min_{\varphi\in\mathcal{F}} \|e(x)\|_\infty .$$

- U diskretnom slučaju traži se

$$\max_{k=0,\ldots,n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \to \min,$$

- a u kontinuiranom slučaju

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - \varphi(x)| \to \min .$$

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Ovaj je tip aproksimacija poželjniji od srednjekvadratnih,

- jer se traži da maksimalna greška bude minimalna,
- ali ih je općenito mnogo teže izračunati (na primjer, dobivamo problem minimizacije nederivabilne funkcije!).

Za znatiželjne: U praksi norme, pored funkcije mogu uključivati i neke njene derivacije. Primjer takve norme

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b \left[(f(x))^2 + (f'(x))^2\right] dx},$$

na prostoru $C^1[a,b]$ svih funkcija koje imaju neprekidnu prvu derivaciju na $[a,b]$.

Ključni problemi kod aproksimacije

Matematički problemi koje treba riješiti:

- egzistencija i jedinstvenost rješenja problema aproksimacije, što ovisi o tome
  - koje funkcije f aproksimiramo kojim funkcijama φ (dva prostora)
  - i kako mjerimo grešku e (norma);
- analiza kvalitete dobivene aproksimacije — vrijednost "najmanje" pogreške i ponašanje funkcije greške e (jer norma je ipak samo broj),
- konstrukcija algoritama za računanje najbolje aproksimacije.

Interpolacija polinomima

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu različitih točaka x_k, za $k = 0, \ldots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili $x_i = x_j$ za $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$)
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ako je $[a, b]$ segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b.$$

Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za zadane točke (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni interpolacijski polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, stupnja najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

polinom stupnja najviše n. Uvjete interpolacije napišimo u obliku linearnog sustava s nepoznanicama $a_0, \ldots, a_n$,

$$\begin{aligned}
p_n(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0 \\
p_n(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
p_n(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n.
\end{aligned}$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava regularna, pa sustav ima jedinstveno rješenje.

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Provjeru regularnosti napravit ćemo računanjem vrijednosti determinante.

Pripadna determinanta je tzv. Vandermondeova determinanta

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Definiramo determinantu koja "nalači" na D_n, samo umjesto x_n, stavimo da je posljednji redak u $V_n(x)$ funkcija od x:

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo $V_n(x)$ kao funkciju varijable x.

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$ polinom stupnja najviše n u varijabli x,
- koeficijent tog polinoma uz x^n je D_{n-1} — "križanje" zadnjeg retka i stupca.

Ako u determinantu $V_n(x)$ redom uvrštavamo $x_0, \ldots, x_{n-1}$

- determinanta $V_n(x_k)$, za $k = 0, \ldots, n-1$, ima dva jednaka retka, pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \cdots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke $x_0, \ldots, x_{n-1}$ su nultočke polinoma $V_n(x)$ stupnja n.

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Za polinom $V_n(x)$ stupnja n znamo

- vodeći koeficijent D_{n-1},
- sve nultočke, $x_0, \ldots, x_{n-1}$,

pa $V_n(x)$ možemo napisati kao

$$V_n(x) = D_{n-1}\,(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem $x = x_n$, dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n

$$D_n = D_{n-1}\,(x_n - x_0)\,(x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je $D_0 = 1$ (lijevi gornji kut!), pa je

$$D_n = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j).$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

tj. matrica linearnog sustava je regularna, pa

- postoji jedinstveno rješenje $a_0, \ldots, a_n$ za koeficijente polinoma p_n,

odnosno jedinstveni interpolacijski polinom. ■

Napomena. Nadalje ćemo se baviti raznim formama interpolacijskog polinoma koje će uvijek

- predstavljati isti interpolacijski polinom,

samo zapisan u raznim bazama.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma $\mathcal{P}_n$ izaberemo bazu $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente $a_0, \ldots, a_n$ ima oblik

$$\begin{aligned} p_n(x_0) &= a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \cdots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0 \\ p_n(x_1) &= a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \cdots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ p_n(x_n) &= a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \cdots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n. \end{aligned}$$

Pitanje: Može li se relativno jednostavno pronaći baza $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

Primjer

Primjer. Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom stupnja 40 koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na intervalu $[0, 20\pi]$ na ekvidistantnoj mreži točaka.

Vandermondeov linearni sustav je katastrofalno uvjetovan,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

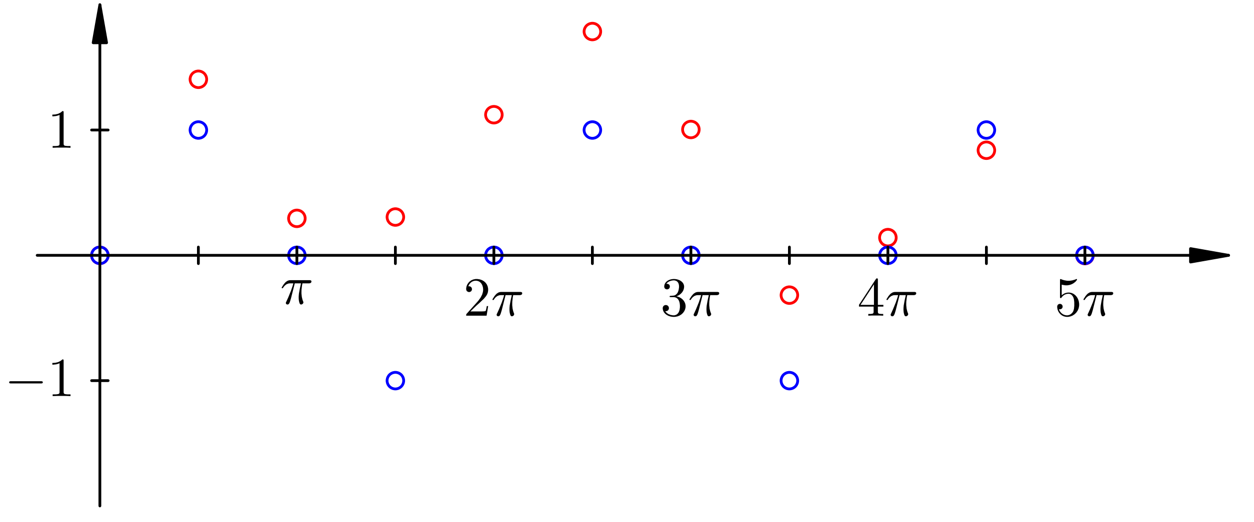
pa se očekuju greške u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, greške su tolike da interpolacijski polinom ne interpolira zadane podatke — ni rezidual nije malen.

Primjer (nastavak)

Legenda. Na slici je prikazan samo dio podataka

- plavim kružićima označeni su čvorovi interpolacije,
- crvenim kružićima označene su izračunate vrijednosti u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći brži način računanja, koji u čvorovima daje grešku 0.

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo uvjetovanost Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore mreža čvorova, u ovisnosti o broju čvorova.

Oznaka: Za zadani $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ promatramo mrežu s $n+1$ čvorova

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad x_0^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu Vandermondeovu matricu reda $n+1$ označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}\big(x_0^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)}\big),$$

a njezini elementi su

$$\big(V^{(n+1)}\big)_{ij} = \Big(x_{i-1}^{(n)}\Big)^{j-1}, \quad i, j = 1, \ldots, n+1.$$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1, 1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$
2	$3.226 \cdot 10^0$
3	$8.012 \cdot 10^0$
4	$2.353 \cdot 10^1$
5	$6.383 \cdot 10^1$
6	$1.898 \cdot 10^2$
7	$5.354 \cdot 10^2$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$1.605 \cdot 10^3$
10	$1.395 \cdot 10^4$
12	$1.234 \cdot 10^5$
14	$1.105 \cdot 10^6$
16	$9.983 \cdot 10^6$
18	$9.085 \cdot 10^7$
20	$8.314 \cdot 10^8$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$2.131 \cdot 10^{11}$
30	$5.642 \cdot 10^{13}$
35	$1.496 \cdot 10^{16}$
40	$4.044 \cdot 10^{18}$
45	$1.093 \cdot 10^{21}$
50	$2.989 \cdot 10^{23}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
60	$2.253 \cdot 10^{28}$
70	$1.722 \cdot 10^{33}$
80	$1.329 \cdot 10^{38}$
90	$1.033 \cdot 10^{43}$
100	$8.083 \cdot 10^{47}$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[0,1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^{0}$	8	$2.009 \cdot 10^{6}$	25	$2.628 \cdot 10^{21}$	60	$7.018 \cdot 10^{52}$
2	$1.510 \cdot 10^{1}$	10	$1.156 \cdot 10^{8}$	30	$7.896 \cdot 10^{25}$	70	$6.998 \cdot 10^{61}$
3	$9.887 \cdot 10^{1}$	12	$6.781 \cdot 10^{9}$	35	$2.404 \cdot 10^{30}$	80	$7.048 \cdot 10^{70}$
4	$6.864 \cdot 10^{2}$	14	$4.032 \cdot 10^{11}$	40	$7.391 \cdot 10^{34}$	90	$7.151 \cdot 10^{79}$
5	$4.924 \cdot 10^{3}$	16	$2.421 \cdot 10^{13}$	45	$2.289 \cdot 10^{39}$	100	ne ide
6	$3.606 \cdot 10^{4}$	18	$1.465 \cdot 10^{15}$	50	$7.132 \cdot 10^{43}$		
7	$2.678 \cdot 10^{5}$	20	$8.920 \cdot 10^{16}$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^0$
2	$5.965 \cdot 10^1$
3	$7.532 \cdot 10^2$
4	$1.217 \cdot 10^4$
5	$2.404 \cdot 10^5$
6	$5.620 \cdot 10^6$
7	$1.518 \cdot 10^8$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
8	$4.650 \cdot 10^9$
10	$6.033 \cdot 10^{12}$
12	$1.129 \cdot 10^{16}$
14	$2.878 \cdot 10^{19}$
16	$9.586 \cdot 10^{22}$
18	$4.041 \cdot 10^{26}$
20	$2.102 \cdot 10^{30}$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
25	$9.112 \cdot 10^{39}$
30	$1.037 \cdot 10^{50}$
35	$2.649 \cdot 10^{60}$
40	$1.356 \cdot 10^{71}$
45	$1.277 \cdot 10^{82}$
50	$2.071 \cdot 10^{93}$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Za dani n, čvorovi "harmonijske" mreže su redom

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv "harmonijska". Prvi čvor teži prema 0, kad $n \to \infty$.

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, nije potrebno (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n možemo napisati korištenjem tzv. Lagrangeove baze $\{\ell_k, k = 0, \ldots, n\}$ prostora polinoma $\mathcal{P}_n$

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned}\ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})\,(x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1})\,(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \qquad k = 0, \ldots, n.\end{aligned}$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Polinomi ℓ_k su stupnja n, pa je p_n polinom stupnja najviše n i vrijedi

$$\ell_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Uvrstimo li to u p_n, vidimo da suma svodi na jedan jedini član za $i = k$, tj. da vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k,$$

čime smo pokazali da se radi o interpolacijskom polinomu u čvorovima (x_k, f_k), $k = 0, \ldots, n$.

Iz oblika ℓ_k vidi se da je za računanje polinoma u Lagrangeovoj formi potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$$

zovemo polinom čvorova.

Polinome $\ell_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$\ell_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)\,\omega_k(x_k)}.$$

Nadalje, lako se vidi da je $\omega_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\,\omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x - x_k)\, \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \ldots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$).

Ipak, svrha Lagrangeovog interpolacijskog polinoma

- nije računanje vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za teoretske svrhe (dokaze).

Ako znamo neke informacije o funkciji f, možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n+1)$-u derivaciju na segmentu $[a,b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a,b]$, $k = 0, \ldots, n$, su međusobno različiti čvorovi interpolacije, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je interpolacijski polinom za f u tim čvorovima.

Za bilo koju točku $x \in [a,b]$ postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za grešku interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Dokaz.

1. slučaj — $x = x_k$ je čvor interpolacije

Tada je $\omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan.

2. slučaj — x nije čvor interpolacije

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran čim x nije čvor.

Fiksirajmo x i definiramo funkciju u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)}, \qquad t \in [a,b].$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Zaključak:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f, i one su neprekidne kad su to i derivacije od f;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g. Ako za t uvrstimo x_k, dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \qquad k = 0, \ldots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Budući da je g derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$,

- Rolleov teorem $\Longrightarrow$ g' ima barem $n+1$ nultočku unutar $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima bar $n+2-j$ nultočaka na $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$, za $j = 0, \ldots, n+1$;
- za $j = n+1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in \langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Nadalje,

- p_n je polinom stupnja najviše n, pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja $n+1$,

pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n+1)!.$$

Uvrštavanjem $e^{(n+1)}(t)$ u $(n+1)$-u derivaciju za g dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t)\,\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Konačno, ako uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\,\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi),$$

što smo trebali dokazati. ■

Ako je $f^{(n+1)}$

- ograničena na $[a,b]$,
- ili, jače, ako je $f \in C^{n+1}[a,b]$, tj. f ima neprekidnu $(n+1)$-u derivaciju na $[a,b]$ ...

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

… onda se iz prethodnog teorema dobiva sljedeća ocjena greške interpolacijskog polinoma za funkciju f u točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \qquad M_{n+1} := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz teorema, a korisna je ako relativno jednostavno možemo

- izračunati ili odozgo ocijeniti vrijednost M_{n+1}.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- nije pogodan za povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji Newtonova forma interpolacijskog polinoma

- koja se izvodi tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije, tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Interpolacijski polinom stupnja 0

Nađimo konstantu koja interpolira funkciju f u točki x_0. Očito

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Interpolacijski polinom stupnja 1

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1.
Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Uočimo

- r_1 mora biti stupnja 1;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$, odnosno r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0),$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

- iz uvjeta interpolacije u x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$, pa je

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolacijski polinom stupnja 2

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2.
Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Uočimo

- r_2 mora biti stupnja 2;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1$$

tj. mora biti $r_1(x_k) = 0$, odnosno r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

- koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u x_2.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Nastavimo li postupak, konstriurali smo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

tj. konstruirali smo "donju trokutastu" Newtonovu bazu

$$1, \quad (x - x_0), \quad (x - x_0)(x - x_1), \quad \ldots, \quad \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n.

Sada samo treba odrediti koeficijente a_k.

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da dižemo stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k ovisi samo o funkciji f i točkama $x_0, \ldots, x_k$.

Oznaka:

$$a_k = f[x_0, \ldots, x_k],$$

a veličinu $f[x_0, \ldots, x_k]$ zovemo k-ta podijeljena razlika.

Katkad se koristi "operatorska" oznaka $[x_0, \ldots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite točke $x_0, \ldots, x_n$, podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji točaka σ, tj.

$$f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k ako je poredak točaka $x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \cdots + b_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike (nastavak)

Budući da se radi o istom polinomu

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije moraju biti jednaki;
- uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$.

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \ldots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$.

Podijeljene razlike (nastavak)

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

- s a_k ako je poredak točaka $x_0, \ldots, x_n$,
- s b_k ako je poredak točaka $x_n, \ldots, x_0$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \cdots + b_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1}.

Podijeljene razlike (nastavak)

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao zbroj dva koeficijenta:

- koeficijent uz pretposljednji član u p_n, što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u posljednjem članu — u produktu faktora $\prod_{k=\cdots}^{\cdots}(x - x_k)$, uzmemo iz jedne zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x,

odnosno

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

Podijeljene razlike (nastavak)

pa dobivamo

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$

Budući da je

$$\begin{aligned} a_n &= f[x_0, \ldots, x_n], \\ a_{n-1} &= f[x_0, \ldots, x_{n-1}], \\ b_{n-1} &= f[x_n, \ldots, x_1] = f[x_1, \ldots, x_n], \end{aligned}$$

odmah izlazi tražena rekurzija.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz konstantnog interpolacijskog polinoma. ■

Tablica podijeljenih razlika

Tablica svih potrebnih podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
x_k & f[x_k] & f[x_k, x_{k+1}] & f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] & \cdots & f[x_0, \ldots, x_n] \\
\hline
x_0 & f[x_0] & & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
 & & f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & f[x_0, \ldots, x_n] \\
 & & f[x_{n-2}, x_{n-1}] & & \iddots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
 & & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}
$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$\begin{aligned} p_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1]\,(x - x_0) \\ &+ f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo "gornji rub". To se može izračunati u jednom jednodimenzionalnom polju.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {
  za j = n do i radi {
    f[j] = (f[j] - f[j - 1])/(x[j] - x[j - i]);
  };
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Nakon završetka algoritma za računanje podijeljenih razlika

- "gornji rub" $f[x_0, \ldots, x_i]$ se nalazi redom u polju `f`.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma u nekoj točki x ima oblik Hornerove sheme.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];
za i = n - 1 do 0 radi {
  sum = sum * (x - x[i]) + f[i];
};
/* Na kraju je p_n(x) = sum. */
```

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Grešku interpolacijskog polinoma (jednaku onoj iz Lagrangeove forme), možemo pisati korištenjem podijeljenih razlika.

Ideja. Dodajmo još jedan čvor x_{n+1} u Newtonov oblik polinoma, tako da je $x_{n+1} \in \langle a, b \rangle$, s tim da x_{n+1} nije jednak ni jednom od polaznih čvorova $x_0, \ldots, x_n$. Tada je

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1]\,(x - x_0) & \\ + f[x_0, x_1, x_2]\,(x - x_0)\,(x - x_1) & \\ + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n]\,(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) & \\ + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]\,(x - x_0) \cdots (x - x_n). & \\ = p_n(x) + (x - x_0) \cdots (x - x_n)\, f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}]. & \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Budući da je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}),$$

onda je

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) \\ &\qquad + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n)\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}] \\ &= p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1})\, f[x_0, \ldots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Usporedimo to s ocjenom greške iz u Lagrangeovog oblika, (napisanoj u točki x_{n+1}, a ne x)

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \frac{\omega(x_{n+1})}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Iz prethodne formule odmah čitamo da je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ova se formula uobičajeno piše u ovisnosti o varijabli x, (tj. x_{n+1} se zamijeni s x), pa je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Zanimljivo je da ova formula vrijedi i kad čvorovi nisu međusobno različiti (v. Hermiteova interpolacija).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ polinom stupnja najviše n, onda je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_k] = 0, \quad \text{za} \quad k \geq n+1,$$

za bilo koji izbor točaka $x_0, \ldots, x_k$.

Dokaz. Tada je $f^{(k)}(\xi) = 0$ u svakoj točki ξ. ∎