

Numerička analiza

13. predavanje

Autor: Saša Singer

Predavač: Tina Bosner

tina@math.hr

web.math.hr/~nela/nad.html

PMF – Matematički odsjek, Zagreb

Sadržaj predavanja

- **Aproksimacija i interpolacija:**
 - Uvod u problem aproksimacije (norme, linearnost).
 - Problem interpolacije polinomima.
 - Egzistencija i jedinstvenost.
 - Izbor baze — potencije i Vandermondeova determinanta.
 - Lagrangeova baza.
 - Računanje Lagrangeovog oblika IP.
 - Ocjena pogreške za dovoljno glatke funkcije.
 - Newtonova baza.
 - Računanje Newtonovog oblika IP.

Aproksimacija i interpolacija

Općenito o problemu aproksimacije

Što je problem **aproksimacije**?

Poznate su **neke** informacije o funkciji f , definiranoj na nekom podskupu $X \subseteq \mathbb{R}$.

Na osnovu tih **informacija**, želimo funkciju f

- **zamijeniti** nekom **drugom** funkcijom φ na skupu X , ili na još **većem** skupu,
- tako da su funkcije f i φ **bliske** u nekom **smislu**.

Skup X je najčešće:

- **interval** oblika $[a, b]$ (koji može biti i **neograničen**), ili
- **diskretni skup** točaka.

Pitanje: Zašto uopće želimo **zamjenu** $f \mapsto \varphi$?

Oblici problema aproksimacije

Problem aproksimacije javlja se u dva bitno različita oblika.

Prvi oblik: Znamo funkciju f (analitički ili slično),

- ali je njezina forma prekomplikirana za računanje.

U tom slučaju,

- izaberemo neke informacije o f i
- po nekom kriteriju odredimo aproksimacijsku funkciju φ .

Prednosti ovog oblika problema aproksimacije:

- Možemo birati informacije o f koje ćemo koristiti.
- Jednako tako, možemo ocijeniti grešku dobivene aproksimacije φ , obzirom na prave vrijednosti funkcije f .

Oblici problema aproksimacije (nastavak)

Drugi oblik: Ne znamo funkciju f ,

- već samo neke informacije o njoj,
- na primjer, vrijednosti na nekom (diskretnom) skupu točaka.

Zamjenska funkcija φ određuje se iz raspoloživih informacija.

- Osim samih podataka (poznate vrijednosti),
- ove informacije mogu uključivati i očekivani oblik ponašanja tih podataka (tj. funkcije φ).

Mane ovog oblika problema aproksimacije:

- Ne može se napraviti ocjena pogreške,
- bez dodatnih informacija o nepoznatoj funkciji f .

Prvi oblik problema — primjene

Prvi oblik se obično koristi u teoriji

- za razvoj numeričkih metoda na bazi aproksimacije.

Na primjer, za numeričko

- integriranje funkcija (integriramo aproksimaciju),
- rješavanje diferencijalnih jednažbi.

Praktični primjer:

- programska biblioteka za računanje raznih elemenatrnih funkcija (`exp`, `sin`, `cos`, `sqrt` i sl),

Traži se maksimalna brzina i puna točnost, na razini osnovne greške zaokruživanja.

Realizacija standardno ide racionalnim aproksimacijama.

Drugi oblik problema — primjene

Drugi oblik problema se vrlo često javlja u praksi.

Na primjer,

- kod mjerenja nekih veličina (rezultat je “tablica”),
- osim izmjerenih podataka, pokušavamo aproksimirati i podatke koji se nalaze “između” izmjerenih točaka.

To je ključna svrha ovakve aproksimacije!

Napomena. Kod mjerenja se javljaju i greške mjerenja.

- Zato postoje posebne tehnike — vrste aproksimacija, za “ublažavanje” tako nastalih grešaka.

Na primjer, metoda najmanjih kvadrata.

Izbor aproksimacijske funkcije φ

Aproksimacijska funkcija φ bira se:

- prema **prirodi modela** — izbor dolazi iz **problema**,
- ali tako da bude relativno **jednostavna** za **računanje**.

Obično se **prvo fiksira** (izabere) neki **skup** funkcija \mathcal{F} .

- **Onda** se traži “**najbolja**” aproksimacija φ iz tog skupa \mathcal{F} .

Skup \mathcal{F} može biti **vektorski prostor**, ali ne mora.

Za **praktično** računanje, funkcija φ obično ovisi

- o nekom **konačnom** broju **parametara** a_k , $k = 0, \dots, m$,
- koje treba **odrediti** po nekom **kriteriju** aproksimacije.

Ideja: **Sve moguće** vrijednosti ovih $m + 1$ parametara određuju skup **svih** “**dozvoljenih**” funkcija \mathcal{F} .

Parametrizacija aproksimacijske funkcije φ

Kad funkciju φ zapišemo u obliku

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

kao funkciju koja ovisi o parametrima a_k , onda kažemo

- da smo izabrali opći oblik aproksimacijske funkcije φ (u odnosu na skup \mathcal{F}).

Prema obliku ovisnosti o parametrima, aproksimacijske funkcije možemo grubo podijeliti na:

- linearne aproksimacijske funkcije,
- nelinearne aproksimacijske funkcije.

Koje su bitne razlike između ove dvije grupe?

Linearne aproksimacijske funkcije

Opći oblik **linearne** aproksimacijske funkcije je

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_m\varphi_m(x),$$

gdje su $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ **poznate** funkcije koje **znamo** računati.

Linearnost u **ovisnosti** o **parametrima** znači:

- traženi parametri su **koeficijenti** u **linearnoj kombinaciji poznatih** funkcija.

Velika **prednost**: **Određivanje** parametara a_k obično vodi na “**linearne**” probleme (koji su **lakše** rješivi od **nelinearnih**):

- **sustave linearnih** jednadžbi, ili
- **linearne** probleme **optimizacije**.

Linearne aproksimacijske funkcije (nastavak)

Standardni model za linearni oblik aproksimacije:

- skup “dozvoljenih” funkcija \mathcal{F} je vektorski prostor, a
- funkcije $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ su neka baza u tom prostoru.

Unaprijed se bira (fiksira):

- vektorski prostor \mathcal{F} , odgovarajuće dimenzije $m + 1$,
- baza $\varphi_0, \dots, \varphi_m$ u \mathcal{F} .

Napomena. Kod približnog numeričkog računanja,

- “dobar” izbor baze je ključan za stabilnost postupka
- i točnost izračunatih vrijednosti parametara aproksimacijske funkcije φ .

Primjer 1 — polinomi

Nekoliko **primjera** najčešće korištenih **vektorskih** prostora \mathcal{F} .

Polinomi. Uzimamo $\mathcal{F} = \mathcal{P}_m$, gdje je \mathcal{P}_m vektorski prostor polinoma stupnja $\leq m$.

Standardni izbor baze je $\varphi_k(x) = x^k$, za $k = 0, \dots, m$, tj.

$$\varphi(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_mx^m.$$

Nije nužno da φ zapisujemo u bazi $\{1, x, \dots, x^m\}$. Upravo **suprotno**, vrlo često je neka druga baza **bitno bolja**.

- Na primjer, $\{1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots\}$, gdje su x_0, x_1, \dots **zadane** točke (v. kod interpolacije).
- **Ortogonalni** polinomi, obzirom na **pogodno** izabrani **skalarni produkt** (v. kod najmanjih kvadrata).

Primjer 2 — trigonometrijski polinomi

Trigonometrijski “polinomi”. Za funkcije φ_k uzima se prvih $m + 1$ funkcija iz skupa

$$\{ 1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots \}.$$

Koriste se za aproksimaciju **periodičkih** funkcija na intervalu **perioda** — ovdje, recimo, $[0, 2\pi]$.

- **Primjena** je, na primjer, u **obradi i modeliranju signala**.

Varijacije u izboru **baze**:

- Koristi se **dodatni faktor** u argumentu **sinusa i kosinusa** ($x \mapsto \lambda x$) — koji služi za **kontrolu perioda**.
- Ponekad se biraju **samo parne** ili **samo neparne** funkcije iz ovog skupa.

Primjer 3 — polinomni splajnovi

Polinomni splajnovi. To su funkcije koje su “po dijelovima” **polinomi**. Ako su zadane točke $x_0 < \dots < x_n$, onda se **splajn** funkcija na svakom **podintervalu**

• svodi na **polinom** određenog fiksnog (**niskog**) stupnja,

$$\varphi \Big|_{[x_{k-1}, x_k]} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

a p_k su **polinomi** najčešće stupnjeva 1, 2, 3 ili 5.

U točkama x_i obično se zahtijeva da funkcija φ zadovoljava još

• i “**uvjete ljepljenja**” vrijednosti **funkcije** i nekih njezinih **derivacija**, ili nekih **aproksimacija** za te **derivacije**.

Splajnovi se često koriste zbog dobrih **ocjena greške** aproksimacije i **kontrole oblika** aproksimacijske funkcije.

Nelinearne aproksimacijske funkcije

Nelinearne aproksimacijske funkcije φ

$$\varphi(x) = \varphi(x; a_0, a_1, \dots, a_m),$$

imaju nelinearnu ovisnosti o parametrima aproksimacijske funkcije a_0, \dots, a_m .

Pripadni skup ‘dozvoljenih’ funkcija \mathcal{F} najčešće

● nije vektorski prostor.

Određivanje parametara a_k , općenito, vodi na “nelinearne” probleme:

- sustave nelinearnih jednažbi, ili
- nelinearne probleme optimizacije.

Primjer 4 — eksponencijalne funkcije

Par **primjera** najčešće korištenih oblika **nelinearnih** aproksimacijskih funkcija.

Eksponencijalne aproksimacije. Imaju oblik **linearne kombinacije eksponencijalnih** funkcija s **parametrima** u eksponentu:

$$\varphi(x) = c_0 e^{b_0 x} + c_1 e^{b_1 x} + \dots + c_r e^{b_r x},$$

Broj **nezavisnih** parametara je $m + 1 = 2r + 2$.

Opisuju, na primjer,

- 🔴 procese **rasta** i **odumiranja** u raznim **populacijama**,
- 🔴 s primjenom u **biologiji**, **ekonomiji** i **medicini**.

Primjer 5 — racionalne funkcije

Racionalne funkcije. Imaju opći oblik

$$\varphi(x) = \frac{b_0 + b_1x + \cdots + b_r x^r}{c_0 + c_1x + \cdots + c_s x^s},$$

i $m + 1 = r + s + 1$ nezavisnih parametara, a ne $r + s + 2$, kako formalno piše.

Objašnjenje. Razlomci se mogu proširivati,

- ako su b_i, c_i parametri, onda su to i tb_i, tc_i , za $t \neq 0$;
- uvijek možemo fiksirati jedan od koeficijenata b_i ili c_i , a koji je to — obično slijedi iz prirode modela.

Ovako definirane racionalne funkcije imaju mnogo bolja svojstva aproksimacije nego polinomi, a pripadna teorija je relativno nova.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija

Interpolacija je zahtjev da se funkcije f i φ **podudaraju** na nekom **konačnom skupu točaka**.

- Te točke nazivamo **čvorovi interpolacije**.
- Zahtjevu se može, ali i ne mora, **dodati** zahtjev da se u čvorovima, **osim funkcijskih vrijednosti**, **poklapaju i vrijednosti nekih derivacija**.

U **najjednostavnijem** obliku interpolacije, kad se podudaraju samo funkcijske vrijednosti, od podataka o funkciji f

- koristi se **samo informacija** o njenoj vrijednosti na skupu od $n + 1$ točaka,
- tj. podaci (x_k, f_k) , gdje je $f_k := f(x_k)$, za $k = 0, \dots, n$.

Kriteriji aproksimacije — interpolacija (nast.)

- Parametri a_0, \dots, a_n (mora ih biti **točno onoliko koliko i podataka**, tj. $m = n$) određuju se iz uvjeta

$$\varphi(x_k; a_0, a_1, \dots, a_n) = f_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

što je, općenito, **nelinearni** sustav jednažbi.

- **Linearnost** funkcije φ povlači da parametre a_k dobivamo iz sustava **linearnih jednažbi**
 - koji ima **točno $n + 1$** jednažbi za $n + 1$ nepoznanica. Matrica tog sustava je **kvadratna**.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Minimizacija pogreške je drugi kriterij određivanja parametara aproksimacije. Funkcija φ bira se tako da se **minimizira** neka odabrana **norma pogreške**

$$e(x) = f(x) - \varphi(x)$$

u nekom odabranom prostoru funkcija \mathcal{F} za φ , na nekoj domeni X .

Ove aproksimacije, često zvane i **najbolje aproksimacije po normi**, dijele se na

- **diskretne** — ako se norma pogreške e minimizira na **diskretnom** skupu podataka X ;
- **kontinuirane** — ako se norma pogreške e minimizira na **kontinuiranom** skupu podataka X .

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Standardno se kao **norme pogreške** koriste

- 2-norma i
- ∞ -norma.

Za 2-normu

- pripadna se aproksimacija zove **srednjekvadratna**,
- a **metoda** za njeno nalaženje zove se **metoda najmanjih kvadrata**.

Funkcija φ , odnosno njeni **parametri**, se traže tako da bude

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_2.$$

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

- U **diskretnom** slučaju je $X = \{x_0, \dots, x_n\}$, pa raspisom prethodne relacije dobivamo

$$\sqrt{\sum_{k=0}^n (f(x_k) - \varphi(x_k))^2} \rightarrow \min,$$

- a u **kontinuiranom** slučaju

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) - \varphi(x))^2 dx} \rightarrow \min.$$

Preciznije, **minimizira** se samo ono pod korijenom.

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

U slučaju ∞ -norme pripadna se aproksimacija zove **minimaks aproksimacija**, a parametri se biraju tako da se nađe

$$\min_{\varphi \in \mathcal{F}} \|e(x)\|_{\infty}.$$

🔴 U **diskretnom** slučaju traži se

$$\max_{k=0, \dots, n} |f(x_k) - \varphi(x_k)| \rightarrow \min,$$

🔴 a u **kontinuiranom** slučaju

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| \rightarrow \min.$$

Kriteriji aproksimacije — minimizacija pogreške

Ovaj je tip aproksimacija **poželjniji** od srednjkvadratnih,

- jer se traži da **maksimalna greška** bude **minimalna**,
- ali ih je općenito **mного teže izračunati** (na primjer, dobivamo problem minimizacije **nederivabilne** funkcije!).

Za znatiželjne: U praksi norme, pored funkcije mogu uključivati i **neke njene derivacije**. Primjer takve norme

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b [(f(x))^2 + (f'(x))^2] dx},$$

na prostoru $C^1[a, b]$ svih funkcija koje imaju **neprekidnu prvu derivaciju** na $[a, b]$.

Ključni problemi kod aproksimacije

Matematički problemi koje treba riješiti:

- egzistencija i jedinstvenost rješenja problema aproksimacije, što ovisi o tome
 - koje funkcije f aproksimiramo kojim funkcijama φ (dva prostora)
 - i kako mjerimo grešku e (norma);
- analiza kvalitete dobivene aproksimacije — vrijednost “najmanje” pogreške i ponašanje funkcije greške e (jer norma je ipak samo broj),
- konstrukcija algoritama za računanje najbolje aproksimacije.

Interpolacija polinomima

Interpolacija polinomima

Neka je funkcija f zadana na

- diskretnom skupu različitih točaka x_k , za $k = 0, \dots, n$, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- funkcijske vrijednosti u tim točkama skraćeno označavamo s $f_k = f(x_k)$.

Komentar. Kad bismo dozvolili $x_i = x_j$ za $i \neq j$,

- ili f nije funkcija (ako je $f_i \neq f_j$)
- ili imamo redundantan podatak (ako je $f_i = f_j$).

Ako je $[a, b]$ segment, u praksi su točke obično numerirane tako da je

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Egzistencija i jedinstvenost

Pitanja.

- Uz koje uvjete postoji interpolacijski polinom?
- Je li jedinstven?

Odgovor daje sljedeći teorem.

Teorem. Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Za zadane točke (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$, gdje je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, postoji jedinstveni interpolacijski polinom $\varphi \in \mathcal{P}_n$, stupnja najviše n

$$\varphi(x) := p_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

za koji vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k, \quad k = 0, \dots, n.$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Dokaz. Neka je

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

polinom stupnja najviše n . Uvjete interpolacije napišimo u obliku **linearnog sustava** s nepoznanicama a_0, \dots, a_n ,

$$p_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + \cdots + a_nx_0^n = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_1^n = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_nx_n^n = f_n.$$

Pokazat ćemo da je matrica ovog sustava **regularna**, pa sustav ima **jedinstveno rješenje**.

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Provjeru **regularnosti** napraviti ćemo računanjem vrijednosti **determinante**.

Pripadna determinanta je tzv. **Vandermondeova determinanta**

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} .$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Definiramo determinantu koja “naliči” na D_n , samo umjesto x_n , stavimo da je posljednji redak u $V_n(x)$ funkcija od x :

$$V_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}.$$

Primijetimo da je

$$D_n = V_n(x_n).$$

Promatrajmo $V_n(x)$ kao funkciju varijable x .

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Razvojem po posljednjem retku uočavamo da je

- $V_n(x)$ polinom stupnja najviše n u varijabli x ,
- koeficijent tog polinoma uz x^n je D_{n-1} — “križanje” zadnjeg retka i stupca.

Ako u determinantu $V_n(x)$ redom uvrštavamo x_0, \dots, x_{n-1}

- determinanta $V_n(x_k)$, za $k = 0, \dots, n - 1$, ima dva jednaka retka, pa je

$$V_n(x_0) = V_n(x_1) = \dots = V_n(x_{n-1}) = 0,$$

tj. točke x_0, \dots, x_{n-1} su nultočke polinoma $V_n(x)$ stupnja n .

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Za polinom $V_n(x)$ stupnja n znamo

- vodeći koeficijent D_{n-1} ,
- sve nultočke, x_0, \dots, x_{n-1} ,

pa $V_n(x)$ možemo napisati kao

$$V_n(x) = D_{n-1} (x - x_0) (x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}).$$

Uvrštavanjem $x = x_n$, dobivamo rekurzivnu relaciju za D_n

$$D_n = D_{n-1} (x_n - x_0) (x_n - x_1) \cdots (x_n - x_{n-1}).$$

Odmah vidimo da je $D_0 = 1$ (lijevi gornji kut!), pa je

$$D_n = \prod_{0 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

Egzistencija i jedinstvenost (nastavak)

Budući da je $x_i \neq x_j$, za $i \neq j$, onda je

$$D_n \neq 0,$$

tj. matrica linearnog sustava je **regularna**, pa

● postoji **jedinstveno rješenje** a_0, \dots, a_n za koeficijente polinoma p_n ,

odnosno **jedinstveni interpolacijski polinom**. ■

Napomena. Nadalje ćemo se baviti **raznim formama** interpolacijskog polinoma koje će **uvijek**

● predstavljati **isti** interpolacijski polinom, samo **zapisan** u **raznim bazama**.

Izbor baze i matrica sustava

Ako u prostoru polinoma \mathcal{P}_n izaberemo bazu $\varphi_0, \dots, \varphi_n$, onda interpolacijski polinom p_n možemo prikazati u obliku

$$p_n = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x).$$

Linearni sustav za nepoznate koeficijente a_0, \dots, a_n ima oblik

$$p_n(x_0) = a_0\varphi_0(x_0) + a_1\varphi_1(x_0) + \dots + a_n\varphi_n(x_0) = f_0$$

$$p_n(x_1) = a_0\varphi_0(x_1) + a_1\varphi_1(x_1) + \dots + a_n\varphi_n(x_1) = f_1$$

.....

$$p_n(x_n) = a_0\varphi_0(x_n) + a_1\varphi_1(x_n) + \dots + a_n\varphi_n(x_n) = f_n.$$

Pitanje: Može li se relativno jednostavno pronaći baza $\varphi_0, \dots, \varphi_n$ za koju je matrica ovog sustava jedinična matrica?

Primjer

Primjer. Rješavanjem linearnog sustava za koeficijente, nađite interpolacijski polinom **stupnja 40** koji interpolira funkciju

$$f(x) = \sin x,$$

na intervalu $[0, 20\pi]$ na **ekvidistantnoj** mreži točaka.

Vandermondeov linearni sustav je **katastrofalno uvjetovan**,

$$\kappa_2 \approx 5.027 \cdot 10^{82},$$

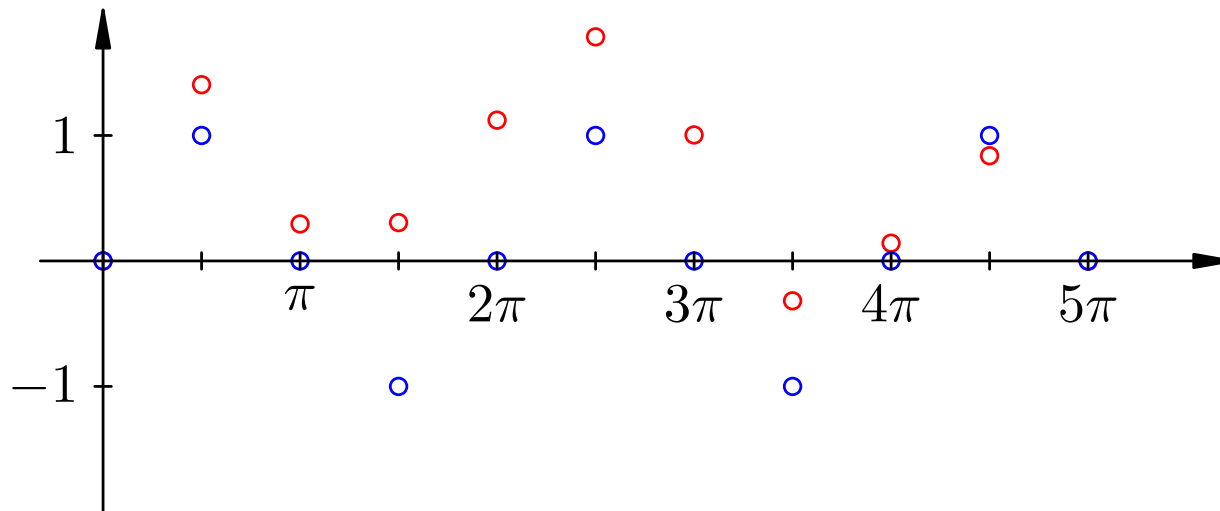
pa se očekuju **greške** u rješenju.

Kad izračunamo vrijednost u čvorovima interpolacije, **greške** su tolike da interpolacijski polinom **ne interpolira** zadane podatke — ni **rezidual nije** malen.

Primjer (nastavak)

Legenda. Na slici je prikazan samo dio podataka

- plavim kružićima označeni su čvorovi interpolacije,
- crvenim kružićima označene su izračunate vrijednosti u čvorovima interpolacije.



Zaključak. Treba naći brži način računanja, koji u čvorovima daje grešku 0.

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica

Pogledajmo **uvjetovanost** Vandermondeovih matrica za neke standardne izbore **mreža čvorova**, u ovisnosti o **broju** čvorova.

Oznaka: Za zadani $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ promatramo **mrežu** s $n + 1$ **čvorova**

$$x_i^{(n)}, \quad i = 0, \dots, n, \quad x_0^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Pripadnu **Vandermondeovu matricu** reda $n + 1$ označavamo s

$$V^{(n+1)} = V^{(n+1)}(x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}),$$

a njezini elementi su

$$(V^{(n+1)})_{ij} = \left(x_{i-1}^{(n)}\right)^{j-1}, \quad i, j = 1, \dots, n + 1.$$

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 1. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[-1, 1]$,

$$x_i^{(n)} = -1 + \frac{2}{n} \cdot i, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$1.000 \cdot 10^0$	8	$1.605 \cdot 10^3$	25	$2.131 \cdot 10^{11}$	60	$2.253 \cdot 10^{28}$
2	$3.226 \cdot 10^0$	10	$1.395 \cdot 10^4$	30	$5.642 \cdot 10^{13}$	70	$1.722 \cdot 10^{33}$
3	$8.012 \cdot 10^0$	12	$1.234 \cdot 10^5$	35	$1.496 \cdot 10^{16}$	80	$1.329 \cdot 10^{38}$
4	$2.353 \cdot 10^1$	14	$1.105 \cdot 10^6$	40	$4.044 \cdot 10^{18}$	90	$1.033 \cdot 10^{43}$
5	$6.383 \cdot 10^1$	16	$9.983 \cdot 10^6$	45	$1.093 \cdot 10^{21}$	100	$8.083 \cdot 10^{47}$
6	$1.898 \cdot 10^2$	18	$9.085 \cdot 10^7$	50	$2.989 \cdot 10^{23}$		
7	$5.354 \cdot 10^2$	20	$8.314 \cdot 10^8$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 2. Ekvidistantna mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{i}{n}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$2.618 \cdot 10^0$	8	$2.009 \cdot 10^6$	25	$2.628 \cdot 10^{21}$	60	$7.018 \cdot 10^{52}$
2	$1.510 \cdot 10^1$	10	$1.156 \cdot 10^8$	30	$7.896 \cdot 10^{25}$	70	$6.998 \cdot 10^{61}$
3	$9.887 \cdot 10^1$	12	$6.781 \cdot 10^9$	35	$2.404 \cdot 10^{30}$	80	$7.048 \cdot 10^{70}$
4	$6.864 \cdot 10^2$	14	$4.032 \cdot 10^{11}$	40	$7.391 \cdot 10^{34}$	90	$7.151 \cdot 10^{79}$
5	$4.924 \cdot 10^3$	16	$2.421 \cdot 10^{13}$	45	$2.289 \cdot 10^{39}$	100	ne ide
6	$3.606 \cdot 10^4$	18	$1.465 \cdot 10^{15}$	50	$7.132 \cdot 10^{43}$		
7	$2.678 \cdot 10^5$	20	$8.920 \cdot 10^{16}$				

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Primjer 3. Neekvidistantna “harmonijska” mreža s n podintervala na segmentu $[0, 1]$,

$$x_i^{(n)} = \frac{1}{n+1-i}, \quad i = 0, \dots, n.$$

n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$	n	$\kappa_2(V^{(n+1)})$
1	$6.342 \cdot 10^0$	8	$4.650 \cdot 10^9$	25	$9.112 \cdot 10^{39}$
2	$5.965 \cdot 10^1$	10	$6.033 \cdot 10^{12}$	30	$1.037 \cdot 10^{50}$
3	$7.532 \cdot 10^2$	12	$1.129 \cdot 10^{16}$	35	$2.649 \cdot 10^{60}$
4	$1.217 \cdot 10^4$	14	$2.878 \cdot 10^{19}$	40	$1.356 \cdot 10^{71}$
5	$2.404 \cdot 10^5$	16	$9.586 \cdot 10^{22}$	45	$1.277 \cdot 10^{82}$
6	$5.620 \cdot 10^6$	18	$4.041 \cdot 10^{26}$	50	$2.071 \cdot 10^{93}$
7	$1.518 \cdot 10^8$	20	$2.102 \cdot 10^{30}$		

Uvjetovanost Vandermondeovih matrica (nast.)

Za dani n , čvorovi “harmonijske” mreže su redom

$$x_0^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \quad x_1^{(n)} = \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad x_{n-1}^{(n)} = \frac{1}{2}, \quad x_n^{(n)} = \frac{1}{1},$$

pa zato i naziv “harmonijska”. Prvi čvor teži prema 0, kad $n \rightarrow \infty$.

Može se pokazati da je

$$\kappa_2(V^{(n+1)}) > (n+1)^{n+1}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Da bismo našli koeficijente interpolacijskog polinoma, **nije potrebno** (ni dobro) rješavati linearni sustav za koeficijente.

Interpolacijski polinom p_n možemo napisati korištenjem tzv. **Lagrangeove baze** $\{\ell_k, k = 0, \dots, n\}$ prostora polinoma \mathcal{P}_n

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \ell_k(x),$$

pri čemu je

$$\begin{aligned} \ell_k(x) &= \frac{(x - x_0) \cdots (x - x_{k-1}) (x - x_{k+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \cdots (x_k - x_{k-1}) (x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)} \\ &= \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} := \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \quad k = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Polinomi l_k su stupnja n , pa je p_n polinom stupnja najviše n i vrijedi

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0, & \text{za } i \neq k, \\ 1, & \text{za } i = k. \end{cases}$$

Uvrstimo li to u p_n , vidimo da suma svodi na jedan jedini član za $i = k$, tj. da vrijedi

$$p_n(x_k) = f_k,$$

čime smo pokazali da se radi o interpolacijskom polinomu u čvorovima (x_k, f_k) , $k = 0, \dots, n$.

Iz oblika l_k vidi se da je za računanje polinoma u Lagrangeovoj formi potrebno $\mathcal{O}(n^2)$ operacija.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Polinom

$$\omega(x) = \prod_{k=0}^n (x - x_k)$$

zovemo **polinom čvorova**.

Polinome $l_k(x)$ Lagrangeove baze možemo napisati preko $\omega(x)$,

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k) \omega'_k(x_k)}.$$

Nadalje, lako se vidi da je $\omega'_k(x_k) = \omega'(x_k)$, pa je

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}.$$

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Forma

$$p_n(x) = \omega(x) \sum_{k=0}^n \frac{f_k}{(x - x_k) \omega'(x_k)}$$

se može koristiti za računanje vrijednosti polinoma u točki $x \neq x_k$, za $k = 0, \dots, n$ (za $x = x_k$ znamo da je $p_n(x_k) = f_k$).

Ipak, svrha Lagrangeovog interpolacijskog polinoma

- nije računanje vrijednosti u točki, već se uglavnom koristi za teoretske svrhe (dokaze).

Ako znamo neke informacije o funkciji f , možemo napraviti i ocjenu greške interpolacijskog polinoma.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Teorem. Pretpostavimo da

- funkcija f ima $(n + 1)$ -u derivaciju na segmentu $[a, b]$ za neki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$;
- $x_k \in [a, b]$, $k = 0, \dots, n$, su međusobno **različiti čvorovi interpolacije**, tj. $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$;
- p_n je **interpolacijski polinom** za f u tim čvorovima.

Za **bilo koju** točku $x \in [a, b]$ postoji točka ξ

$$x_{\min} := \min\{x_0, \dots, x_n, x\} < \xi < \max\{x_0, \dots, x_n, x\} =: x_{\max}$$

takva da za **grešku** interpolacijskog polinoma vrijedi

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{\omega(x)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Dokaz.

1. slučaj — $x = x_k$ je čvor interpolacije

Tada je $\omega(x_k) = 0$, pa su obje strane posljednje relacije jednake 0, a ξ je proizvoljan.

2. slučaj — x nije čvor interpolacije

Tada je $\omega(x) \neq 0$ i grešku interpolacije prikazujemo u obliku

$$e(x) = f(x) - p_n(x) = \omega(x)s(x),$$

s time da je $s(x)$ korektno definiran čim x nije čvor.

Fiksirajmo x i definiramo funkciju u varijabli t

$$g(t) = e(t) - \omega(t)s(x) = e(t) - \omega(t) \frac{e(x)}{\omega(x)}, \quad t \in [a, b].$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Zaključak:

- funkcija pogreške e ima točno onoliko derivacija (po t) koliko i f , i one su neprekidne kad su to i derivacije od f ;
- x nije čvor, pa je $g^{(n+1)}$ korektno definirana na $[a, b]$.

Nađimo koliko nultočaka ima funkcija g . Ako za t uvrstimo x_k , dobivamo

$$g(x_k) = e(x_k) - \omega(x_k) \frac{e(x)}{\omega(x)} = 0, \quad k = 0, \dots, n.$$

Jednako tako je i

$$g(x) = e(x) - e(x) = 0.$$

Drugim riječima, g ima barem $n + 2$ nultočke na $[x_{\min}, x_{\max}]$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Budući da je g derivabilna na $[x_{\min}, x_{\max}]$,

- Rolleov teorem $\implies g'$ ima barem $n + 1$ nultočku unutar $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$.

Induktivnom primjenom Rolleovog teorema zaključujemo da

- $g^{(j)}$ ima bar $n + 2 - j$ nultočaka na $\langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$, za $j = 0, \dots, n + 1$;
- za $j = n + 1$ dobivamo da $g^{(n+1)}$ ima bar jednu nultočku $\xi \in \langle x_{\min}, x_{\max} \rangle$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Nadalje,

- p_n je polinom stupnja **najviše** n , pa je $p_n^{(n+1)} = 0$,
- ω je polinom stupnja $n + 1$,

pa je

$$e^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t), \quad \omega^{(n+1)}(t) = (n + 1)!$$

Uvrštavanjem $e^{(n+1)}(t)$ u $(n + 1)$ -u derivaciju za g dobivamo

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(t) &= e^{(n+1)}(t) - \omega^{(n+1)}(t) \frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(t) - (n + 1)! \frac{e(x)}{\omega(x)}. \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Konačno, ako uvažimo da je $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, onda je

$$0 = g^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)! \frac{e(x)}{\omega(x)},$$

odnosno

$$e(x) = \frac{\omega(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

što smo trebali dokazati. ■

Ako je $f^{(n+1)}$

- ograničena na $[a, b]$,
- ili, jače, ako je $f \in C^{n+1}[a, b]$, tj. f ima neprekidnu $(n+1)$ -u derivaciju na $[a, b] \dots$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

... onda se iz prethodnog teorema dobiva sljedeća **ocjena greške interpolacijskog polinoma** za funkciju f u točki $x \in [a, b]$

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1}, \quad M_{n+1} := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Ova ocjena slijedi direktno iz teorema, a korisna je ako **relativno jednostavno** možemo

- **izračunati** ili **odozgo ocijeniti** vrijednost M_{n+1} .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

- nije pogodan za povećanje stupnja interpolacijskog polinoma.

Postoji Newtonova forma interpolacijskog polinoma

- koja se izvodi tako da se interpolacijskom polinomu dodaju nove točke interpolacije, tj. povećava se stupanj interpolacijskog polinoma.

Interpolacijski polinom stupnja 0

Nadimo konstantu koja interpolira funkciju f u točki x_0 . Očito

$$p_0(x) = f_0.$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Interpolacijski polinom stupnja 1

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_1 .

Polinom p_1 napišimo kao zbroj polinoma p_0 i korekcije r_1 ,

$$p_1(x) = p_0(x) + r_1(x).$$

Uočimo

- r_1 mora biti stupnja 1;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 imamo

$$f_0 = p_1(x_0) = p_0(x_0) + r_1(x_0) = f_0 + r_1(x_0),$$

tj. mora biti $r_1(x_0) = 0$, odnosno r_1 mora imati oblik

$$r_1(x) = a_1(x - x_0),$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

• iz uvjeta interpolacije u x_1 imamo

$$f_1 = p_1(x_1) = p_0(x_1) + r_1(x_1) = f_0 + r_1(x_1),$$

tj. mora biti $r_1(x_1) = f_1 - f_0$, pa je

$$a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Interpolacijski polinom stupnja 2

Dodajmo još jedan čvor interpolacije, x_2 .

Polinom p_2 napišimo kao zbroj polinoma p_1 i korekcije r_2 ,

$$p_2(x) = p_1(x) + r_2(x).$$

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Uočimo

- r_2 mora biti stupnja 2;
- iz uvjeta interpolacije u x_0 i x_1 imamo

$$f_k = p_2(x_k) = p_1(x_k) + r_2(x_k) = f_k + r_2(x_k), \quad k = 0, 1$$

tj. mora biti $r_2(x_k) = 0$, odnosno r_2 mora imati oblik

$$r_2(x) = a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

- koeficijent a_2 računamo iz uvjeta interpolacije u x_2 .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Nastavimo li postupak, konstruirali smo interpolacijski polinom

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k),$$

tj. konstruirali smo “donju trokutastu” Newtonovu bazu

$$1, (x - x_0), (x - x_0)(x - x_1), \dots, \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k)$$

u prostoru polinoma stupnja manjeg ili jednakog n .

Sada samo treba **odrediti** koeficijente a_k .

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Već smo pokazali da je

$$a_0 = f_0, \quad a_1 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}.$$

Budući da **dižemo** stupanj interpolacijskog polinoma, onda a_k **ovisi samo o** funkciji f i točkama x_0, \dots, x_k .

Oznaka:

$$a_k = f[x_0, \dots, x_k],$$

a veličinu $f[x_0, \dots, x_k]$ zovemo k -ta **podijeljena razlika**.

Katkad se koristi “**operatorska**” oznaka $[x_0, \dots, x_k]f$.

Podijeljene razlike

Lema. Za međusobno različite točke x_0, \dots, x_n , podijeljena razlika $f[x_0, \dots, x_n]$ **ne ovisi** o permutaciji točaka σ , tj.

$$f[x_0, \dots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}].$$

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

• s a_k ako je **poredak točaka** x_0, \dots, x_n ,

• s b_k ako je **poredak točaka** $x_{\sigma(0)}, \dots, x_{\sigma(n)}$.

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_{\sigma(0)}) + \dots + b_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_{\sigma(k)}). \end{aligned}$$

Podijeljene razlike (nastavak)

Budući da se radi o istom polinomu

- koeficijenti uz odgovarajuće potencije moraju biti jednaki;
- uspoređivanjem koeficijenata uz x^n vidimo da je $a_n = b_n$. ■

Ostaje još samo pitanje kako efikasno računati $f[x_0, \dots, x_n]$.

Lema. Za podijeljene razlike vrijedi sljedeća rekurzija

$$f[x_0, \dots, x_n] = \frac{f[x_1, \dots, x_n] - f[x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0},$$

s tim da je $f[x_k] = f_k$.

Podijeljene razlike (nastavak)

Dokaz. Označimo koeficijente interpolacijskog polinoma p_n

• s a_k ako je poredak točaka x_0, \dots, x_n ,

• s b_k ako je poredak točaka x_n, \dots, x_0 .

Dakle,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) \\ &= b_0 + b_1(x - x_n) + \dots + b_n \prod_{k=1}^n (x - x_k). \end{aligned}$$

U prethodnoj lemi je dokazano da je $a_n = b_n$. Usporedimo sad koeficijente uz x^{n-1} .

Podijeljene razlike (nastavak)

Koeficijent uz x^{n-1} dobivamo kao **zbroj dva** koeficijenta:

- koeficijent uz **pretposljednji** član u p_n , što je a_{n-1} u jednom slučaju, a b_{n-1} u drugom,
- u **posljednjem** članu — u produktu faktora $\prod_{k=1}^n (x - x_k)$, uzmemo iz **jedne** zagrade $-x_k$, a iz svih ostalih x ,

odnosno

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - b_n \sum_{k=1}^n x_k.$$

Uvažimo da je $a_n = b_n$

$$a_{n-1} - a_n \sum_{k=0}^{n-1} x_k = b_{n-1} - a_n \sum_{k=1}^n x_k,$$

Podijeljene razlike (nastavak)

pa dobivamo

$$b_{n-1} - a_{n-1} = a_n(x_n - x_0),$$

ili

$$a_n = \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{x_n - x_0}.$$


Budući da je

$$a_n = f[x_0, \dots, x_n],$$

$$a_{n-1} = f[x_0, \dots, x_{n-1}],$$

$$b_{n-1} = f[x_n, \dots, x_1] = f[x_1, \dots, x_n],$$

odmah izlazi tražena **rekurzija**.

Start rekurzije je $f[x_k] = f_k$, što se vidi iz **konstantnog** interpolacijskog polinoma. 

Tablica podijeljenih razlika

Tablica **svih potrebnih** podijeljenih razlika ima ovaj oblik:

x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	\cdots	$f[x_0, \dots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		\ddots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		$f[x_0, \dots, x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		\ddots	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Konačni izgled Newtonovog interpolacijskog polinoma

$$\begin{aligned} p_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ & + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ & + \cdots + f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Od tablice podijeljenih razlika treba nam samo “gornji rub”.
To se može **izračunati** u jednom **jednodimenzionalnom polju**.

Algoritam računanja podijeljenih razlika

```
za i = 1 do n radi {  
  za j = n do i radi {  
    f[j] = (f[j] - f[j - 1]) / (x[j] - x[j - i]);  
  };  
};
```

Newtonov oblik interpolacijskog polinoma (n.)

Nakon završetka algoritma za računanje **podijeljenih razlika**

● “gornji rub” $f[x_0, \dots, x_i]$ se nalazi redom u polju **f**.

Algoritam **izvrednjavanja** interpolacijskog polinoma u nekoj točki x ima oblik **Hornerove sheme**.

Algoritam izvrednjavanja interpolacijskog polinoma

```
sum = f[n];  
za i = n - 1 do 0 radi {  
    sum = sum * (x - x[i]) + f[i];  
};  
/* Na kraju je p_n(x) = sum. */
```

Ocjena greške interpolacijskog polinoma

Grešku interpolacijskog polinoma (**jednaku** onoj iz Lagrangeove forme), možemo pisati korištenjem **podijeljenih razlika**.

Ideja. Dodajmo još jedan čvor x_{n+1} u Newtonov oblik polinoma, tako da je $x_{n+1} \in \langle a, b \rangle$, s tim da x_{n+1} **nije** jednak ni jednom od polaznih čvorova x_0, \dots, x_n . Tada je

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1] (x - x_0) \\ &\quad + f[x_0, x_1, x_2] (x - x_0) (x - x_1) \\ &\quad + \dots + f[x_0, x_1, \dots, x_n] (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \\ &\quad + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] (x - x_0) \dots (x - x_n). \\ &= p_n(x) + (x - x_0) \dots (x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Budući da je

$$p_{n+1}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}),$$

onda je

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) &= p_n(x_{n+1}) \\ &\quad + (x_{n+1} - x_0) \cdots (x_{n+1} - x_n) f[x_0, \dots, x_{n+1}] \\ &= p_n(x_{n+1}) + \omega(x_{n+1}) f[x_0, \dots, x_{n+1}]. \end{aligned}$$

Usporedimo to s ocjenom greške iz u Lagrangeovog oblika, (napisanoj u točki x_{n+1} , a ne x)

$$f(x_{n+1}) - p_n(x_{n+1}) = \frac{\omega(x_{n+1})}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

za neki $\xi \in (x_{\min}, x_{\max})$.

Ocjena greške interpolacijskog polinoma (nast.)

Iz prethodne formule odmah čitamo da je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Ova se formula uobičajeno piše u ovisnosti o varijabli x , (tj. x_{n+1} se zamijeni s x), pa je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Zanimljivo je da ova formula **vrijedi** i kad čvorovi **nisu** međusobno **različiti** (v. Hermiteova interpolacija).

Podijeljene razlike visokog reda za polinome

Iz formule

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

direktno izlazi još i ovaj rezultat.

Korolar. Ako je $f \in \mathcal{P}_n$ **polinom** stupnja najviše n , onda je

$$f[x_0, x_1, \dots, x_k] = 0, \quad \text{za } k \geq n + 1,$$

za **bilo koji** izbor točkaka x_0, \dots, x_k .

Dokaz. Tada je $f^{(k)}(\xi) = 0$ u **svakoj** točki ξ . ■