SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Erceg, Matko Grbac, Ivan Puljiz, Marko Radulović

Primijenjena matematička analiza

Zagreb, 16. siječnja 2024.

Sadržaj

Poglavlje 1

Obične diferencijalne jednadžbe

1. Uvod

Nepoznanica u diferencijalnim jednadžbama je realna (ili kompleksna) funkcija, te se osim nepoznate funkcije javljaju i njene derivacije. Na ovom kolegiju ćemo proučavati samo situacije u kojima nepoznata funkcija ovisi samo o jednoj realnoj varijabli.

Nezavisnu varijablu ćemo obično označavati s x ili t. Za nepoznatu funkciju će se javljati nekoliko mogućnosti pa ćemo obično imati sljedeće: $u = u(x)$, $y = y(x)$, $u = u(t)$, $x = x(t)$ (primijetite da se u četvrtoj opciji x javlja kao funkcija, dok u prve dvije opcije x predstavlja varijablu). Ako nepoznatu funkciju označimo s $u = u(x)$, tada za njene derivacije koristimo zapis $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ ili $\frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nu}{dx^n}$ (u literaturi se mogu pronaći i sljedeće oznake: $\dot{u}, \ddot{u}, \ldots, u^{(n)}$).

U ovom poglavlju posvećenom teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi kao glavne reference navodimo [1, 4, 9] u kojima zainteresirani čitatelj može pronaći i neke sadržaje koji nadilaze sadržaj ovog kolegija.

Definicija 1.1. *Obična diferencijalna jednadžba* je jednadžba oblika

$$F\big(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)\big) = 0\,, \quad x \in I\,, \tag{1.1}$$

pri čemu je $F : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$, dana funkcija, $n \in \mathbb{N}$, te $u : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, nepoznata funkcija. Dakle, to je relacija koja povezuje nezavisnu varijablu x, nepoznatu funkciju jedne varijable $u = u(x)$ i njezine derivacije $u', u'', \ldots, u^{(n)}$.

Red obične diferencijalne jednadžbe je red najviše derivacije koja se u jednadžbi pojavljuje. Dakle, (1.1) je obična diferencijalna jednadžba n-tog reda.

Po teoremu o implicitnoj funkciji obična diferencijalna jednadžba n-tog reda se (lokalno) može zapisati u obliku

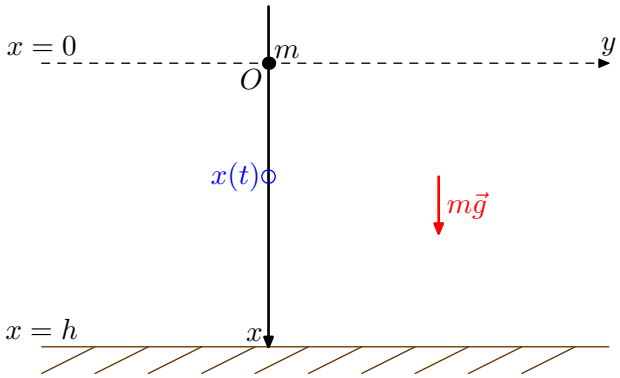
$$u^{(n)}(x) = f\big(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x)\big)\,, \quad x \in I\,,$$

od kojeg ćemo obično polaziti u teoretskim razmatranjima.

Ako je nepoznata funkcija u funkcija više varijabli, tada se javljaju parcijalne derivacije pa se pripadna diferencijalna jednadžba naziva *parcijalna diferencijalna jednadžba*, a neki posebni slučajevi takvih jednadžbi se obrađuju na kolegiju *Metode matematičke fizike*. Kako u ovom kolegiju proučavamo samo obične diferencijalne jednadžbe, možemo koristiti kraći naziv tako da ispustimo pridjev *obične*, što će često i biti slučaj.

Razni fizikalni, biološki, ekonomski i drugi sustavi su rukovođeni promjenama promatranih veličina. Kako su promjene funkcija opisane pripadnim derivacijama, diferencijalne jednadžbe se prirodno javljaju kao modeli koji opisuju različite pojave u znanosti i tehnologiji. Kao ilustraciju, navest ćemo nekoliko primjera u kojima ćemo vidjeti da neke jednostavne diferencijalne jednadžbe već sad znamo rješavati.

Primjer 1.2 (Slobodan pad)**.** Promatramo gibanje kamena mase m koji je ispušten s visine h u polju sile teže (otpor zraka zanemarujemo). Označimo s $x(t)$ vertikalni položaj kamena (materijalne točke) u trenutku t. Ako postavimo koordinatni sustav kao na Slici 1, tada u početnom trenutku $t = 0$ imamo $x(0) = 0$. Potrebno je odrediti (prvi) trenutak $T > 0$ za koji imamo $x(T) = h$.



Slika 1: Slobodni pad.

Po drugom Newtonovom zakonu vrijedi $\vec{F} = m\vec{a}$, pri čemu je $\vec{F}$ sila koja djeluje na materijalnu točku, m njena masa i $\vec{a}$ akceleracija. U našem modelu očito imamo gibanje samo u smjeru koordinatne osi x tako da prethodnu vektorsku jednadžbu možemo zamijeniti pripadnom x-komponentom (sve ostale komponente su trivijalno ispunjene).

Akceleracija je dana kao druga derivacija, pa je njena x-komponenta u trenutku t jednaka $x''(t)$.

Na kamen djeluje samo sila teža koja je dana s $\vec{F} = m\vec{g}$, pri čemu je $\vec{g}$ vektor ubrzanja materijalne točke pod utjecajem Zemljine gravitacijske sile koji je iznosa približno $g = |\vec{g}| = 9.8ms^{-2}$ i smjera okomitog na horizontalnu plohu. U našem slučaju je x-komponenta sile $\vec{F}$ dana s mg.

Dakle, po drugom Newtonovom zakonu slijedi da x zadovoljava sljedeću običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda:

$$x'' = g \,. \tag{1.2}$$

Ovu jednadžbu jednostavno rješavamo integriranjem (iz jednadžbe imamo da je x' primitivna funkcija konstantnoj funkciji $t \mapsto g$). Naime, nakon prvog integriranja (po varijabli t) dobivamo $x'(t) = gt + C$, gdje je C neka konstanta, pa još jednim integriranjem konačno dobivamo:

$$x(t) = \frac{gt^2}{2} + Ct + D \,, \quad t \in \mathbb{R} \,, \tag{1.3}$$

gdje su $C, D \in \mathbb{R}$ po volji odabrane konstante.

Budući da očekujemo da je gibanje u potpunosti određeno danim uvjetima, naš matematički model bi trebao dati *jedinstveno* rješenje. Radi toga u model dodatno uvodimo uvjete koje bi funkcija x morala zadovoljiti. Već smo ranije ustvrdili da je kamen u početnom trenutku na visini h, što s obzirom na naš izbor koordinatnog sustava odgovara uvjetu $x(0) = 0$. Dodatno, kamen je ispušten u početnom trenutku što znači da mu je početna brzina 0. Kako je brzina dana kao prva derivacija, iz toga dobivamo $x'(0) = 0$.

Uvjete

$$x(0) = x'(0) = 0 \,,$$

nazivamo *početnim* uvjetima. Sada u (1.3) slijedi $C = D = 0$, pa je *jedinstveno* rješenje dano s $x(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

Konačno, trenutak T određujemo rješavanjem jednadžbe $x(T) = h$, odnosno $\frac{1}{2}gT^2 = h$. Dakle, dobivamo

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

pri čemu smo u obzir uzeli samo pozitivno rješenje zbog prirode problema.

Napomena 1.3. a) Uočimo da smo za gornju diferencijalnu jednadžbu (1.2) *drugog* reda trebali *dva* početna uvjeta da bismo dobili jedinstveno rješenje.

b) Pristup rješavanja jednadžbe (1.2) u prethodnom primjeru jednostavno možemo poopćiti na sve diferencijalne jednadžbe n-tog reda oblika $x^{(n)}(t) = f(t)$.

c) Zaključci (tj. dobiveni rezultati) u prethodnom primjeru ne ovise o izboru koordinatnog sustava. Međutim, često pogodnim izborom koordinatnog sustava možemo znatno pojednostaviti račun.

Primjer 1.4 (Malthusov populacijski model)**.** Promatramo populaciju nekih živih organizama u zatvorenom sustavu (npr. bakterije u Petrijevoj posudi, ribe u jezeru) i zanima nas rast jedinki po vremenu.

Neka je $p(t)$ veličina populacije (broj jedinki) u trenutku t.

U ovom modelu uvodimo sljedeću (prirodnu) pretpostavku: *brzina rasta populacije je proporcionalna veličini populacije.* To znači da postoji konstanta $k > 0$ (neovisna o t) tako da vrijedi

$$p' = kp\,. \tag{1.4}$$

Ovo je diferencijalna jednadžba prvog reda, ali ne spada u klasu jednadžbi opisanih u Napomeni 1.3(b) pa ju ne možemo jednostavno riješiti integriranjem.

Pokušajmo pogoditi rješenje. Za početak uočimo da je jedno trivijalno rješenje dano s konstatnom funkcijom $p = 0$. Neka je sada $k = 1$. Tada rješenje mora zadovoljavati $p' = p$, a znamo da je jedna takva funkcija upravo eksponencijalna funkcija, odnosno $p(t) = e^t$. Nije teško pokazati da za općeniti k funkcija $p(t) = e^{kt}$ zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu.

Još je preostalo uočiti da ako p zadovoljava diferencijalnu jednadžbu, tada za proizvoljnu konstantu $C \in \mathbb{R}$ funkcija Cp također zadovoljava jednadžbu. Naime,

$$(Cp)' = Cp' = C(kp) = k(Cp)\,,$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili da p zadovoljava jednadžbu (1.4). Prethodno svojstvo je zajedničko za sve *homogene linearne* diferencijalne jednadžbe (v. Odjeljak 4).

Dakle, sve funkcije oblika

$$p(t) = Ce^{kt}\,, \tag{1.5}$$

$C \in \mathbb{R}$, zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu (1.4) (za $C = 0$ dobivamo ranije komentirano trivijalno rješenje). U idućem odjeljku ćemo pokazati da su to zaista i sva rješenja.

Vratimo se sada našem modelu. Da bismo mogli nešto reći o dinamici populacije, potrebno je zadati početan broj jedinki (broj jedinki u početnom trenutku $t = 0$). Označimo taj broj s N, pa dobivamo početni uvjet

$$p(0) = N\,. \tag{1.6}$$

Ovaj uvjet zajedno s (1.5) daje jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe dano s $p(t) = Ne^{kt}$ (primijetimo da je rast populacije po ovom modelu eksponencijalan).

Sada kada znamo točan broj jedinki u svakom trenutku t, možemo izvoditi razne zaključke. Na primjer, ako nas zanima u kojem trenutku T će se populacija udvostručiti, potrebno je riješiti jednadžbu $p(T) = 2N$, iz čega slijedi $T = \frac{\ln 2}{k}$.

Napomena 1.5. Određivanje svih rješenja diferencijalne jednadžbe (1.4) mogli smo napraviti ipak uz manje pogađanja. Naime, ako pretpostavimo da je p pozitivna funkcija (što s obzirom na promatrani model ima smisla), tada možemo jednadžbu podijeliti s p. Kako je $\frac{p'}{p} = (\ln p)'$, integriranjem dobivamo da je nužno $\ln p(t) = kt + C$ za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$, iz čega jednostavno slijedi zaključak.

Ovaj postupak rješavanja bit će pogodan za sve *separabilne jednadžbe* što ćemo detaljnije razmatrati u Odjeljku 3.

Zadaci

Zadatak 1.1 (Gibanje tijela u polju sile teže)**.** Tijelo mase m bačeno je uvis brzinom v_0. Odredite najveću visinu koju će tijelo postići te trenutak kada će tijelo pasti na zemlju. Otpor zraka zanemarujemo.

Rješenje: Primijetimo najprije da vrijedi $F = -mg$, gdje je $g = 9.8\frac{m}{s^2}$ (zapravo je $\vec{F} = m\vec{g}$, gdje je $\vec{F}$ sila teža, dok je $\vec{g}$ vektor ubrzanja sile teže, $|\vec{g}| = 9.8\frac{m}{s^2}$; v. Primjer 1.2).

Ako je $x(t)$ položaj (visina) tijela u trenutku t, po drugom Newtonovom zakonu vrijedi:

$$-mg = m\frac{d^2x}{dt^2}, \tag{1.7}$$

uz početne uvjete $\frac{dx}{dt}|_{t=0} = v_0$ i $x|_{t=0} = 0$ (ovi uvjeti odgovaraju koordinatnom sustavu u kojem je os x postavljena okomito na horizontalu i orijentirana prema gore, a ishodište se nalazi u početnom položaju tijela).

Sada iz jednakosti (1.7) slijedi:

$$x''(t) = -g. \tag{1.8}$$

Integriranjem jednadžbe (1.8) od 0 do t dobivamo:

$$x'(t) - x'(0) = -\int_0^t g d\tau = -gt.$$

Uzimajući u obzir da je $x'(0) = v_0$, imamo:

$$x'(t) = v_0 - gt. \tag{1.9}$$

Integriranjem jednadžbe (1.9) od 0 do t slijedi:

$$x(t) - x(0) = v_0 t - g\frac{t^2}{2}.$$

Uzmemo li u obzir da je $x(0) = 0$, imamo:

$$x(t) = v_0 t - g\frac{t^2}{2}.$$

Tražimo maksimalnu vrijednost $x(t)$. Ona se postiže za takav T_{max} u kojem je $x'(T_{max}) = 0$. Dakle, imamo (koristimo (1.9)):

$$v_0 - gT_{max} = 0 \Leftrightarrow T_{max} = \frac{v_0}{g}\ .$$

Iz toga slijedi

$$x_{max} = x(T_{max}) = \frac{v_0^2}{2g}\ .$$

Trenutak pada na zemlju: tražimo $T_{pad} > 0$ takav da je $x(T_{pad}) = 0$. Dakle, mora vrijediti:

$$v_0 T_{pad} - \frac{gT_{pad}^2}{2} = 0 \Leftrightarrow T_{pad} = \frac{2v_0}{g}\ ,$$

pri čemu smo koristili da je T_{pad} (čime je isključeno rješenje $T_{pad} = 0$ koje odgovara početnom položaju). Time smo odgovorili na sva pitanja. □

Napomena 1.6. U prethodnom modelu otpor zraka može igrati važnu ulogu pa je točniji model (ali ne i dalje u potpunosti egzaktan):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg - k\frac{dx}{dt},$$

gdje k u drugom članu na desnoj strani predstavlja koeficijent otpora zraka.

U Odjeljku 8 ćemo vidjeti kako ovu diferencijalnu jednadžbu drugog reda riješiti.

Zadatak 1.2 (Radioaktivni raspad)**.** Brzina radioaktivnog raspada elementa proporcionalna je trenutnoj količini tog elementa. Odredite trenutak poluraspada.

Rješenje: Količinu elementa u trenutku t označavamo s $N(t)$. Na temelju dane pretpostavke znamo da postoji parametar $k > 0$ takav da je raspad elementa opisan sljedećom diferencijalnom jednadžbom (detaljnije objašnjenje kako smo došli do ove jednadžbe može se pronaći u rješenju Zadatka 3.14):

$$\frac{dN}{dt}(t) = -kN(t) \tag{1.10}$$

(koeficijent uz $N(t)$ je negativan jer se po pretpostavci veličina $N(t)$ smanjuje pa mora biti $N'(t) < 0$). Ovdje parametar $k > 0$ predstavlja koeficijent raspadanja koji ovisi o elementu. Početni uvjet označimo s $N_0 = N(0) > 0$.

Tražimo T takav da je $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

Sada iz (1.10) dijeljenjem s $N(t) \neq 0$ (zanima nas samo situacija kada količina elementa nije jednaka 0) slijedi:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -k. \tag{1.11}$$

Iz (1.11) direktno imamo:

$$(\ln |N(t)|)' = -k. \tag{1.12}$$

Integriranjem jednadžbe (1.12) od 0 do t dobivamo:

$$\ln(|N(t)|) - \ln |N_0| = -kt,$$

odnosno

$$\ln\left(\frac{|N(t)|}{N_0}\right) = -kt,$$

pri čemu smo koristili da je $N_0 > 0$. Dakle,

$$|N(t)| = N_0 e^{-kt}.$$

Kako je $N_0 > 0$ te $e^{-kt} > 0$, zaključujemo da funkcija $t \mapsto N(t)$ nema nultočki, pa iz $N(0) = N_0 > 0$ slijedi da za svaki trenutak t vrijedi $N(t) > 0$. Time je rješenje dano sa

$$N(t) = N_0 e^{-kt}.$$

Iz sljedećeg uvjeta određujemo trenutak poluraspada:

$$\frac{N_0}{2} = N(T) = N_0 e^{-kT},$$

iz čega slijedi

$$e^{-kT} = \frac{1}{2},$$

te konačno

$$T = \frac{\ln 2}{k}.$$

□

Zadatak 1.3 (Rast populacije)**.** Populacija miševa i puževa u nekom području raste brzinom koja je jednaka 0.5 (zapravo 0.5 mjesečno) trenutne populacije. Sove nastanjuju isto područje i svaki dan pojedu točno 15 puževa. Na početku populacije miševa i puževa imaju po 1000 jedinki. Odredite broj jedinki miševa i puževa nakon 10 mjeseci.

Rješenje: Neka je $p(t)$ broj miševa u trenutku t (pretpostavimo da se vrijeme t mjeri u mjesecima). Broj jedinki miševa određujemo iz sljedeće jednadžbe:

$$\frac{dp}{dt}(t) = 0.5p(t), \tag{1.13}$$

uz početni uvjet $p(0) = 1000$. Određujemo vrijednost $p(10)$. Iz jednadžbe (1.13) slijedi da je rješenje dano sa:

$$p(t) = 1000e^{0.5t}.$$

Sada lako dobivamo da je populacija miševa nakon 10 mjeseci jednaka:

$$p(10) = 1000e^5 \sim 148413.$$

Neka je sada $q(t)$ broj puževa u trenutku t. Broj jedinki puževa određujemo iz sljedeće jednadžbe:

$$\frac{dq}{dt}(t) = 0.5q(t) - 450, \tag{1.14}$$

uz početni uvjet $q(0) = 1000$. Broj $450 = 30 \cdot 15$ na desnoj strani gornje diferencijalne jednadžbe odgovara broju puževa koje sove pojedu svaki mjesec. Iz jednadžbe (1.14) dobivamo:

$$\frac{q'}{q - 900} = 0.5. \tag{1.15}$$

Sada iz jednadžbe (1.15) imamo:

$$(\ln |q - 900|)' = 0.5. \tag{1.16}$$

Integriramo li jednadžbu (1.16) po t, dobivamo:

$$\ln |q(t) - 900| = 0.5t + C, \ C \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

Iz jednadžbe (1.17) direktno slijedi:

$$|q(t) - 900| = e^C e^{0.5t}, \ C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, imamo:

$$q(t) - 900 = \pm Ce^{0.5t}, \ C > 0.$$

Napokon, opće rješenje je dano u sljedećem obliku:

$$q(t) = 900 + Ce^{0.5t}, \ C \neq 0.$$

Uz početni uvjet $q(0) = 1000$, slijedi da imamo $1000 = 900 + Ce^0$ te iz toga $C = 100$.

Dakle, rješenje problema je dano s:

$$q(t) = 900 + 100e^{0.5t},$$

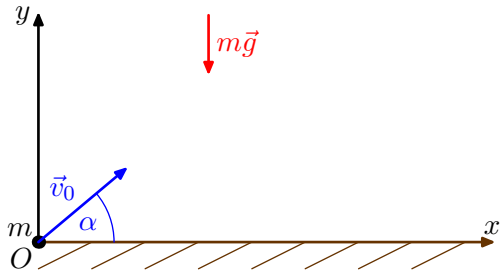
pa imamo:

$$q(10) = 900 + 100e^5 \sim 15741.$$

□

Zadatak 1.4 (Kosi hitac)**.** Tijelo mase m bačeno je s tla brzinom $v_0 > 0$ pod kutom $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ s obzirom na horizontalu. Otpor zraka zanemarujemo.

Odredite položaj tijela u trenutku t i udaljenost na kojoj će pasti od početnog položaja. Za koju vrijednost kuta α će ta udaljenost biti najveća? Skicirajte krivulju koju prebriše tijelo u letu.



Slika 2: Prikaz postavljenog koordinatnog sustava za problem kosog hica.

Rješenje: Za razliku od Primjera 1.2 i Zadatka 1.1, ovdje je očito riječ o dvodimenzionalnom (ravninskom) gibanju, pa nam nije dovoljno promatrati samo jednu koordinatnu os.

Postavimo ishodište koordinatnog sustava u početnom položaju tijela, os y okomito na horizontalnu plohu i orijentiranu prema gore, dok os x u smjeru horizontale i orijentiranu u smjeru kretanja (vidi Sliku 2).

Označimo s $(x(t), y(t))$ položaj tijela u trenutku t. Tada je $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$. S druge strane, za silu težu (jedinu silu koja djeluje na tijelo) imamo $m\vec{g} = m(0, -g)$, gdje je približno $g = |\vec{g}| = 9.8ms^{-2}$. Time iz Newtonove jednadžbe $m\vec{a} = m\vec{g}$ dobivamo

$$\big(x''(t), y''(t)\big) = (0, -g)\,.$$

odnosno

$$x''(t) = 0\,, \tag{1.18}$$
$$y''(t) = -g\,. \tag{1.19}$$

S obzirom na odabrani koordinatni sustav očito imamo

$$x(0) = 0\,, \tag{1.20}$$
$$y(0) = 0\,. \tag{1.21}$$

Vektor početne brzine $\vec{v}_0 = (x'(0), y'(0)))$ je vektor koji leži na pravcu kroz ishodište koji s osi x zatvara kut α, čija je duljina v_0, a koji je orijentiran gore desno (vidi Sliku 2). Dakle, imamo $\vec{v}_0 = (v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha)$, čime slijedi

$$x'(0) = v_0 \cos\alpha\,, \tag{1.22}$$
$$y'(0) = v_0 \sin\alpha\,. \tag{1.23}$$

Naš matematički model se sastoji od dvije obične diferencijalne jednadžbe, što nazivamo *sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi* s dvije jednadžbe i dvije nepoznanice (vidi Odjeljak 7). Srećom, u ovom slučaju je riječ o *nepovezanom* sustavu, tj. gornji problem možemo razdvojiti na rješavanje dva nezavisna problema sačinjena od (1.18), (1.20) i (1.22), odnosno (1.19), (1.21) i (1.23). Oba problema jednostavno rješavamo kao u Primjeru 1.2 i Zadatku 1.1, čime dobivamo

$$x(t) = tv_0 \cos\alpha\,, \tag{1.24}$$
$$y(t) = tv_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2\,. \tag{1.25}$$

Time smo ujedno odredili položaj tijela (do trenutka pada).

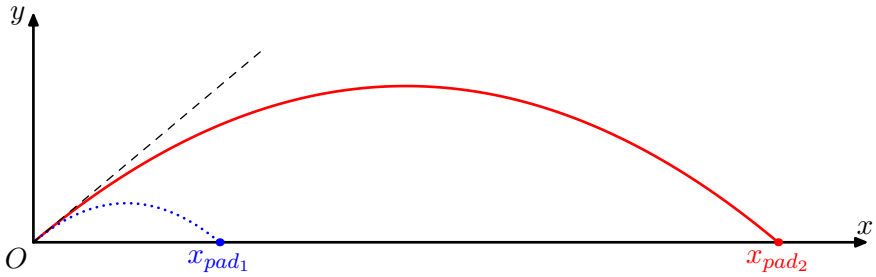
Trenutak pada T_{pad} dobivamo rješavanjem $y(T_{pad}) = 0$ i uzimanjem pozitivnog rješenja. Iz

$$T_{pad}\big(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g T_{pad}\big) = 0$$

slijedi $T_{pad} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. Sada je udaljenost x_{pad} na kojoj će pasti tijelo jednaka

$$x_{pad} = x(T_{pad}) = T_{pad} v_0 \cos\alpha = \frac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)\ .$$

Određivanje kuta za koji dobivamo najveću prijeđenu udaljenost određujemo tako da tražimo u kojoj točki skupa $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ funkcija $\alpha \mapsto \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$ postiže maksimum. Poznavajući svojstva funkcije sinus lako se vidi da je jedino rješenje kut $\alpha = \frac{\pi}{4}$, a alternativno smo do tog zaključka mogli doći koristeći diferencijalni račun (tražimo nultočke prve derivacije navedene funkcije).



Slika 3: Putanja tijela uz kut $\alpha = 40°$ i dvije vrijednosti iznosa početne brzine v_0: plavom točkastom linijom je označen slučaj $v_0^2/g = 0.1m$, a crvenom punom linijom $v_0^2/g = 0.4m$. U kojem su odnosu vrijednosti x_{pad_1} i x_{pad_2}?

Za kraj je preostalo skicirati parametarski zadanu krivulju $t \mapsto (x(t), y(t))$ za $t \in [0, T_{pad}]$. Obično nam je lakše skicirati krivulje u eksplicitnom obliku, što jednostavno postižemo izražavanjem varijable t iz (1.24) i uvrštavanjem u (1.25). Time dobivamo

$$\begin{aligned} y &= \Big(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\Big) v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2} g \Big(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\Big)^2 \\ &= \big(\operatorname{tg}\alpha\big) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha} x^2\ , \end{aligned}$$

pa dana krivulja odgovara dijelu gornje parabole između nultočaka (vidi Sliku 3).

□

2. Osnovni rezultati postojanja i jedinstvenosti rješenja

Promatramo diferencijalnu jednadžbu prvog reda u obliku

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big)\,.$$

Kako je naš cilj odrediti sva rješenja gornje jednadžbe, definirajmo precizno što točno smatramo pod pojmom rješenja.

Definicija 2.1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$. Kažemo da je funkcija $u : I \to \mathbb{R}$ rješenje diferencijalne jednadžbe

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big), \tag{2.1}$$

ako je

a) I interval u $\mathbb{R}$,

b) $u \in C^1(I; \mathbb{R})$,

c) $\Gamma_u := \Big\{\big(x, u(x)\big) : x \in I\Big\} \subseteq \Omega$,

d) (2.1) vrijedi za sve $x \in I$.

U primjerima iz prethodnog odjeljka vidjeli smo da za dobivanje *jedinstvenog* rješenja trebamo zadati i početne uvjete. Preciznije, naslutili smo da broj uvjeta mora odgovarati redu diferencijalne jednadžbe.

Problem određivanja rješenja jednadžbe (2.1) koje zadovoljava početni uvjet $u(x_0) = u_0$, pri čemu je $(x_0, u_0) \in \Omega$, nazivamo *inicijalnom*, *početnom* ili *Cauchyjevom zadaćom* (ili *problemom*).

Definicija 2.2. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $(x_0, u_0) \in \Omega$, te neka je I interval takav da je $x_0 \in I$. Kažemo da je $u \in C^1(I; \mathbb{R})$ rješenje Cauchyjeve zadaće

$$u'(x) = f\big(x, u(x)\big) \tag{2.2}$$

$$u(x_0) = u_0\,, \tag{2.3}$$

ako je u rješenje jednadžbe (2.2) i zadovoljava uvjet (2.3).

Napomena 2.3. Ako je $u : I \to \mathbb{R}$ rješenje diferencijalne jednadžbe (2.2), tada je i za svaki interval $\tilde{I} \subseteq I$ restrikcija $\tilde{u} := u_{|\tilde{I}}$ također rješenje. Da to bude rješenje i Cauchyjeve zadaće (2.2)–(2.3) dodatno treba biti ispunjeno $x_0 \in \tilde{I}$.

Naravno, cilj je odrediti rješenje Cauchyjeve zadaće definirano na najvećem mogućem intervalu koji sadrži x_0.

Osnovna pitanja u teoriji običnih diferencijalnih jednadžbi su:

- postojanje rješenja zadaće (2.2)–(2.3);

- jedinstvenost rješenja zadaće (2.2)–(2.3);
- određivanje eksplicitne formule za rješenje zadaće (2.2)–(2.3).

U (računskim) zadacima ćemo se uglavnom baviti trećom točkom, gdje ćemo prezentirati nekoliko metoda rješavanja ovisno o tipu jednadžbe. Ponekad određivanje eksplicitne formule za rješenje nije moguće ili je prekomplicirano, pa se u tom slučaju koriste numeričke metode za dobivanje aproksimacije rješenja. Taj alternativni pristup ovoj točki kratko ćemo spomenuti pri kraju idućeg poglavlja.

Odgovor na prve dvije točke dati ćemo sada osnovnim rezultatom postojanja i jedinstvenosti rješenja, ali i u idućem odjeljku za poseban oblik diferencijalnih jednadžbi (separabilne jednadžbe).

Teorem 2.4 (Picard). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $(x_0, u_0) \in \Omega$ i $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Neka su $\alpha_x, \alpha_u > 0$ takvi da za zatvoreni pravokutnik*

$$P := [x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x] \times [u_0 - \alpha_u, u_0 + \alpha_u] ,$$

vrijedi:

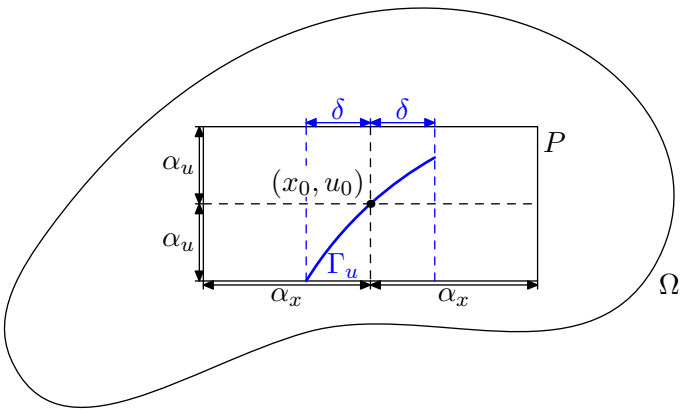
i) $P \subseteq \Omega$;

ii) $f \in C(P; \mathbb{R})$;

iii) f *Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na* P, *tj.*

$$(\exists L > 0)(\forall (x, u_1), (x, u_2) \in P) \quad |f(x, u_1) - f(x, u_2)| \leq L|u_1 - u_2| .$$

Tada postoji $\delta \in \langle 0, \alpha_x \rangle$ takav da (2.2)–(2.3) ima jedinstveno rješenje na intervalu $I = \langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$ (vidi Sliku 4).



Slika 4: Prikaz skupa Ω, pravokutnika P i jedinstvenog (lokalnog) rješenja u danog Teoremom 2.4

Napomena 2.5. a) Ako nije ispunjena pretpostavka (iii) prethodnog teorema, tj. f nije Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na P, tada i dalje znamo da rješenje postoji (*Peanov teorem*; v. [9, Teorem 2.7]), ali rješenje nije nužno jedinstveno (v. Primjer 2.10).

b) Primijetimo da je prethodni teorem lokalne prirode, tj. znamo da postoji jedinstveno rješenje samo na *malom* intervalu koji sadrži x_0. Međutim, uz dodatne pretpostavke na f se može iz Picadovog teorema dobiti rezultat postojanja i jedinstvenosti *globalnog* rješenja (rješenje koje se ne može proširiti na veći interval od onog na kojem je zadano). Na ovom kolegiju nećemo ulaziti u taj dio u općem slučaju, već ćemo samo u nekim posebnim primjerima, ali zainteresiranog čitatelja upućujemo na [9, Odjeljak 7].

Primjer 2.6. Provjerimo da je rješenje zadaće dane u Primjeru 1.4 uistinu jedinstveno (barem lokalno oko 0).

Jednadžba (1.4) i početni uvjet (1.6) u oznakama Teorema 2.4 glase

$$\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(0) = N\,, \end{cases}$$

pri čemu je $f(x, u) = ku$.

Funkcija f ne ovisi o x i linearno ovisi o u pa je očito neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$, te za proizvoljne $(x, u_1), (x, u_2) \in \mathbb{R}^2$ vrijedi:

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| = |ku_1 - ku_2| = k|u_1 - u_2|\,.$$

Dakle, f je Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli također na cijelom $\mathbb{R}^2$.

To znači da su pretpostavke Picardovog teorema ispunjene za svaki zatvoreni pravokutnik P, odnosno, za svaki $N \in \mathbb{R}$ gornja zadaća ima jedinstveno lokalno rješenje i to je upravo ono zapisano u Primjeru 1.4:

$$u(x) = Ne^{kx}\,. \tag{2.4}$$

Međutim, gornja funkcija je definirana na cijelom $\mathbb{R}$, pa bismo htjeli da je njom dano jedinstveno rješenje na cijelom $\mathbb{R}$, a ne samo lokalno oko točke 0. Preciznije, potrebno je odbaciti mogućnost da postoji funkcija v koja zadovoljava gornju Cauchyjevu zadaću, podudara se s funkcijom (2.4) na malom intervalu oko 0, ali nije jednaka toj funkciji, tj. postoji točka (očito van dane male okoline oko 0) u kojoj se vrijednosti funkcija v i u ne podudaraju. U ovom primjeru ćemo to moći dobiti, a ključno je to što je f Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na cijelom $\mathbb{R}^2$.

Naime, iz postupka Napomene 1.5 se vidi da je gornje rješenje jedino unutar klase funkcija koje nemaju nultočku (stalnog su predznaka). Dakle, preostalo je ispitati situaciju kada potencijalno rješenje ima nultočku.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ takva da $u(x_0) = 0$ i promotrimo diferencijalnu jednadžbu uz taj uvjet (uvjet $u(0) = N$ trenutno zanemarujemo). Kako je i za ovu zadaću ispunjen uvjet Picardovog teorema (jer je funkcija f Lipschiz neprekidna po drugoj varijabli na cijelom $\mathbb{R}^2$), dobivamo da je tada nužno $u \equiv 0$ na malom intervalu oko x_0 (ta funkcija je očito rješenje, a zbog jedinstvenosti nemamo drugog izbora). Pretpostavimo da u nije identički jednaka nuli na cijelom $\mathbb{R}$. Kako je nužno neprekidna, to znači da postoji $x_1 \in \mathbb{R}$ takva da je $u(x_1) = 0$ i u nije nula na maloj okolini lijevo ili desno od x_1. Sada opet primijenimo Picardov teorem i zaključujemo da je u nužno jednaka nuli i na maloj okolini oko x_1, čime dobivamo kontradikciju. Zaključak je sljedeći:

ako rješenje zadaće ima barem jednu nultočku, tada je ono konstantna funkcija 0. To je onda moguće samo ako je $N = 0$, jer u protivnom početni uvjet $u(0) = N$ nije zadovoljen.

Dakle, po gornjoj analizi i Napomeni 2.3, sva rješenja ove Cauchyjeve zadaće su restrikcije funkcije (2.4), odnosno funkcija (2.4) je jedinstveno rješenje definirano na cijelom $\mathbb{R}$ (*globalno rješenje*).

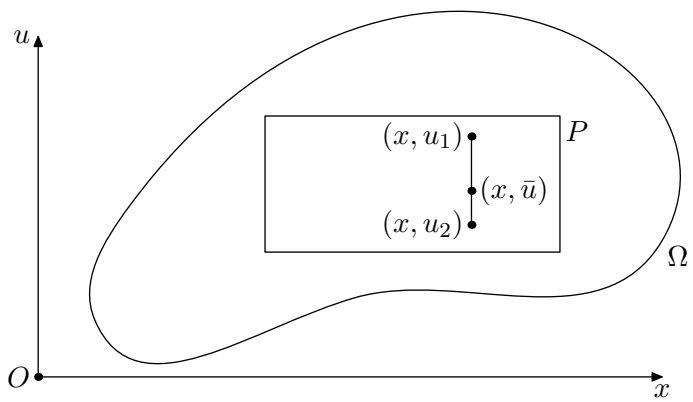
Sljedeća napomena nam olakšava provjeru pretpostavke (iii) Teorema 2.4 (v. [9, Zadatak 2.3]).

Napomena 2.7. Neka je $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ i njena parcijalna derivacija po drugoj varijabli postoji na zatvorenom pravokutniku $P \subseteq \Omega$. Tada je f Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na P ako i samo ako je njena parcijalna derivacija po drugoj varijabli omeđena na P.

Pokažimo samo jedan smjer, tj. da je omeđenost parcijalne derivacije dovoljan uvjet za Lipschitz neprekidnost. Naime, neka je $L := \sup_{(x,u)\in P} |\frac{\partial f}{\partial u}(x,u)|$ i neka su $(x, u_1), (x, u_2) \in P$ po volji odabrane. Po Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji $\bar{u}$ (između u_1 i u_2; vidi Sliku 5) takav da vrijedi

$$|f(x,u_1) - f(x,u_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial u}(x,\bar{u})\right||u_1 - u_2| \leq L|u_1 - u_2| \,.$$

Posebno, kako je neprekidna funkcija omeđena na kompaktu, dovoljno je provjeriti da su f i njena parcijalna derivacija po drugoj varijabli $\frac{\partial f}{\partial u}$ neprekidne na P.



Slika 5: Skupovi P i Ω.

Primjer 2.8. Promotrimo sljedeću Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{aligned} u' &= 1 + u^2 \\ u(0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ovdje se na desnoj strani jednadžbe javlja funkcija $f(x,u) = 1 + u^2$. Ona je očito neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$. Nadalje, njena parcijalna derivacija po drugoj varijabli $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = 2u$ je također neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$.

Dakle, po Napomeni 2.7 su ispunjene pretpostavke Picardovog teorema za svaki pravokutnik, pa onda i za neki oko točke $(0,0)$. Time dobivamo da gornja zadaća ima jedinstveno lokalno rješenje.

Jednadžba ima lijepu strukturu pa jedinstveno rješenje možemo odrediti postupkom kratko opisanim u Napomeni 1.5 (vidi i Zadatak 1.3). Naime, dijeljenjem jednadžbe s $1+u^2>0$ dobivamo

$$\frac{u'}{1+u^2}=1\ .$$

Kako je $\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}=(\operatorname{arctg} u(x))'$, integriranjem dobivamo

$$\operatorname{arctg} u(x)=x+C\,, \tag{2.5}$$

za neku konstantu $C\in\mathbb{R}$.

Uvrštavanjem početnog uvjeta $u(0)=0$ u gornju jednakost dobivamo $C=\operatorname{arctg} 0=0$, odnosno

$$\operatorname{arctg} u(x)=x\,.$$

Eksplicitnu formulu za u dobivamo djelovanjem funkcije tg. Međutim, ona nije definirana na cijelom $\mathbb{R}$ pa uzimamo najveći otvoreni interval koji sadrži 0 (jer je u toj točki dan početni podatak), a to je interval $\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle$. Dakle, konačno rješenje je dano s $u:\langle -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\rangle\to\mathbb{R}$,

$$u(x)=\operatorname{tg} x\ .$$

Uočimo, iako su f i $\frac{\partial f}{\partial u}$ neprekidne na cijelom $\mathbb{R}^2$, gornje rješenje očito ne možemo proširiti na cijeli $\mathbb{R}$.

Općenito, ako je početni uvjet dan s $u(x_0)=0$, tada je rješenje dano s $u:\langle x_0-\frac{\pi}{2},x_0+\frac{\pi}{2}\rangle\to\mathbb{R}$, $u(x)=\operatorname{tg}(x-x_0)$ (provjerite!).

Napomena 2.9. Neka je $F\in C^1(\Omega)$. Ako za svako (lokalno) rješenje $u\in C^1(I)$ diferencijalne jednadžbe (2.2) postoji realna konstanta C takva da vrijedi

$$F(x,u(x))=C\,,\quad x\in I\ , \tag{2.6}$$

tada se F naziva *prvi integral jednadžbe* (2.2). Dakle, pojam prvog integrala se javlja kada želimo opisati *sva* rješenja pripadne diferencijalne jednadžbe.

Može se pokazati da je nužan i dovoljan uvjet da F bude prvi integral jednadžbe (2.2) dan s:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,u)+\frac{\partial F}{\partial u}(x,u)f(x,u)=0\ ,\quad (x,u)\in\Omega\ , \tag{2.7}$$

tj. nužno je i dovoljno da je F rješenje gornje (parcijalne) diferencijalne jednadžbe.

Ilustrirajmo gornju tvrdnju. Ako je F prvi integral, tada vrijedi (2.6) za svako rješenje u. Deriviranjem te jednakosti po varijabli x dobivamo

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,u(x))+\frac{\partial F}{\partial u}(x,u(x))u'(x)=0\,,$$

što je upravo jednako (2.7) u točki $(x, u(x))$ kada iskoristimo da je u rješenje jednadžbe (2.2), tj. $u'(x) = f(x, u(x))$. Obratno, ako F zadovoljava (2.7) i u je rješenje jednadžbe (2.2), pokažimo da je $\frac{d}{dx}F(x, u(x)) = 0$ (što je ekvivalentno s (2.6)). Imamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x, u(x)) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x))u'(x)\\ &= \frac{\partial F}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x))f(x, u(x)) = 0\ ,\end{aligned}$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili lančano pravilo za derivaciju kompozicije, u drugoj smo iskoristili da je u rješenje jednadžbe (2.2), te smo u posljednjoj jednakosti primijenili (2.7).

Osim u posebnim slučajevima (vidi Odjeljak 6 posvećen egzaktnim jednadžbama), postupak dobivanja prvog integrala je identičan postupku standardnog rješavanja diferencijalnih jednadžbi, tj. iščitamo ga iz algebarske jednadžbe dobivene postupkom rješavanja, a koju svako rješenje mora zadovoljavati. Na primjer, iz (2.5) možemo zaključiti da je $F(x, u) = \operatorname{arctg} u - x$ (jedan) prvi integral pripadne diferencijalne jednadžbe. Naravno, cilj pri rješavanju je pokušati izraziti rješenje u što je moguće eksplicitnijem obliku (u prethodnom primjeru smo uspjeli eksplicitno izraziti rješenje).

Primjer 2.10. Promotrimo Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} u' = u^{\frac{1}{3}} \\ u(0) = 0\ . \end{cases} \tag{2.8}$$

Funkcija $f(x, u) = u^{\frac{1}{3}}$ je očito neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$, međutim, njena parcijalna derivacija po drugoj varijabli $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}$ nije uopće definirana u točki $(0, 0)$.

Dakle, direktnom primjenom Napomene 2.7 ne možemo dobiti odgovor na pitanje je li f Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli (za korištenje tvrdnje je potrebno da je parcijalna derivacija definirana na cijelom pravokutniku). Pokušajmo provjeriti to svojstvo po definiciji.

Koristeći

$$u - v = \left(u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}}\right)\left(u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{2}{3}}\right)$$

slijedi

$$\begin{aligned}f(x, u) - f(x, v) &= u^{\frac{1}{3}} - v^{\frac{1}{3}}\\ &= \frac{u - v}{u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{2}{3}}}\ .\end{aligned}$$

Da bi f bila Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli nužno i dovoljno je da je funkcija

$$(u, v) \mapsto \frac{1}{u^{\frac{2}{3}} + u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} + v^{\frac{2}{3}}}$$

omeđena na okolini točke $(0, 0)$. To očito ne vrijedi (nazivnik ide u nulu kada u i v idu u nulu), pa f nije Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli. Dakle, ne možemo primijeniti Picardov teorem.

Međutim, možemo primijeniti Peanov teorem (v. Napomenu 2.5) pa znamo sigurno da rješenje postoji, ali nije nužno jedinstveno. Zaista, lako se provjeri da su sljedeće dvije funkcije

$$u_1 \equiv 0 \ , \qquad u_2(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{8}{27}} x^{\frac{3}{2}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

rješenja zadaće (2.8).

Kod provjere funkcije u_2 promatrajte zasebno slučajeve $x < 0$ i $x > 0$, te na kraju još argumentirajte da su u_2 i njena derivacija neprekidne u $x = 0$.

Izbor početnih uvjeta može bitno utjecati na rješivost pripadne zadaće, kao što se može vidjeti u sljedećem zadataku gdje je napravljena mala promjena u početnom uvjetu u odnosu na prethodni primjer.

Zadatak 2.1. Provjerite da Cauchyjeva zadaća

$$\begin{cases} u' = u^{\frac{1}{3}} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

zadovoljava pretpostavke Picardovog teorema i provjerite da je na $\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \rangle$ jedinstveno (lokalno) rješenje dano s $u(x) = \left(\frac{2}{3}x + 1\right)^{\frac{3}{2}}$.

Sada dajemo skicu dokaza Teorema 2.4, dok za potpuni dokaz upućujemo na [9, Teorem 2.2].

Skica dokaza Teorema 2.4: Najprije ćemo izvesti ekvivalentnu formulaciju Cauchyjeve zadaće (2.2)–(2.3). Neka je $u : I \to \mathbb{R}$ rješenje te zadaće. Integriranjem (2.2) od x_0 do $x \in I$, korištenjem Newton-Leibnizove formule, te evaluiranjem uvjeta (2.3) dobivamo da u nužno zadovoljava

$$u(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u(y))\, dy \ , \quad x \in I \ . \tag{2.9}$$

Međutim, vrijedi i obrat. Preciznije, ako $u \in C(I)$ zadovoljava (2.9), tada je u rješenje Cauchyjeve zadaće (2.2)–(2.3). Naime, početni uvjet (2.3) je trivijalno ispunjen, dok iz (2.9) slijedi da je u klase C^1 (ona je primitivna funkcija neprekidne funkcije $y \mapsto f(y, u(y))$), pa deriviranjem uočavamo da u zadovoljava i (2.2).

Definirajmo sada *Picardove iteracije*:

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= u_0 \\ u_{k+1}(x) &:= u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u_k(y))\, dy \ , \quad k \in \mathbb{N} \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Ako niz funkcija (u_k) (uniformno) konvergira k nekoj neprekidnoj funkciji u, tada formalno prelazeći na limes u (2.10) dobivamo da u zadovoljava (2.9). Zbog gornje

ekvivalencije to onda znači da je limes u rješenje Cauchyjeve zadaće, čime se dobiva postojanje (lokalnog) rješenja. Za potpun dokaz potrebno je najprije pokazati dobru definiranost Picardovih iteracija (graf funkcije u_k mora biti sadržan u domeni funkcije f), a potom i pripadne konvergencije.

Pogledajmo sada kako se pokazuje jedinstvenost rješenja. Ideja je pretpostaviti da postoje dva rješenja $u_1, u_2 \in C^1(I)$ i pokazati da su ona nužno jednaka, odnosno da je funkcija $u := |u_1 - u_2|$ identički jednaka nuli. Neka je $x \in I$, $x > x_0$, po volji odabran (analogno se pokazuje za $x < x_0$). Funkcije u_1 i u_2 zadovoljavaju (2.9) pa imamo

$$\begin{aligned} u(x) &= |u_1(x) - u_2(x)| \\ &= \Big| u_0 + \int_{x_0}^{x} f(y, u_1(y))\, dy - u_0 - \int_{x_0}^{x} f(y, u_2(y))\, dy \Big| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} \big| f(y, u_1(y)) - f(y, u_2(y)) \big|\, dy \\ &\leq L \int_{x_0}^{x} |u_1(y) - u_2(y)|\, dy = L \int_{x_0}^{x} u(y)\, dy \ , \end{aligned}$$

pri čemu smo u prvoj nejednakosti iskoristili monotonost integrala (v. [8, Teorem 5.3]), dok smo u posljednjoj liniji (drugoj nejednakosti) primijenili svojstvo Lipshitzovosti funkcije f.

Sada nam je potrebna sljedeća važna lema (za dokaz upućujemo na [9, Lema 2.3]).

Lema 2.11 (Gronwallova lema)**.** *Neka je u neprekidna nenegativna funkcija na intervalu $[a, b\rangle$ za koju postoje nenegativne konstante A, B takve da*

$$u(x) \leq A + B \int_{a}^{x} u(y)\, dy \ , \quad x \in \langle a, b\rangle \ .$$

Tada vrijedi $u(x) \leq Ae^{B(x-a)}$.

Iz prethodnog računa slijedi da naša funkcija u ispunjava pretpostavke prethodne leme uz $A = 0$ i $B = L$. Time dobivamo da je $u(x) \leq 0$, a kako je očito po definiciji $u(x) \geq 0$, slijedi $u \equiv 0$. □

Ako Cauchyjeva zadaća ispunjava pretpostavke Picardovog teorema, tada iz dokaza vidimo da Picardove iteracije (2.10) konvergiraju k rješenju pa nam mogu poslužiti kao način dobivanja (aproksimativnog) rješenja.

Primjer 2.12. Zadana je Cauchyjeva zadaća

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x\big(1 + u(x)\big) \\ u(0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Pokažimo da su na kvadratu $[-1, 1] \times [-1, 1]$ zadovoljeni uvjeti Picardovog teorema, te potom odredimo nekoliko Picardovih iteracija.

Na desnoj strani diferencijalne jednadžbe imamo funkciju $f(x, u) = 2x(1 + u)$. Ona je očito neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$, diferencijabilna je (polinomi su diferencijabilne

funkcije), te je $\frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = 2x$ također neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^2$. Dakle, po Napomeni 2.7 su ispunjene pretpostavke Picardovog teorema, pa znamo da postoji (lokalno) jedinstveno rješenje.

Pokušajmo odrediti rješenje iz Picardovih iteracija. Za prvu iteraciju imamo $u_1 \equiv 0$. Iduće tri iteracije računamo po (2.10):

$$
\begin{aligned}
u_2(x) &= 0 + \int_0^x 2y\big(1+u_1(y)\big)\,dy = \int_0^x 2y\,dy = x^2\,,\\
u_3(x) &= 0 + \int_0^x 2y\big(1+u_2(y)\big)\,dy = \int_0^x 2y\,dy + \int_0^x 2y^3\,dy = x^2 + \frac{x^4}{2}\,,\\
u_4(x) &= 0 + \int_0^x 2y\big(1+u_3(y)\big)\,dy = \int_0^x 2y\,dy + \int_0^x 2y^3\,dy + \int_0^x y^5\,dy = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}\,.
\end{aligned}
$$

Pokušajmo sada naslutiti oblik opće Picardove iteracije. Iz gornjeg se čini da su u ovom slučaju sve Picardove iteracije polinomi s parnim potencijama. Nadalje, čini se da se povećanjem reda iteracije povećava i red polinoma, s tim da članovi nižeg reda ostaju isti kao u prethodnom koraku. Preciznije, slutimo da vrijedi: $u_{k+1}(x) - u_k(x) = C_k x^{2k}$, gdje je C_k realan broj. Kako je $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}$, ima smisla pretpostaviti da je $C_k = \frac{1}{k!}$. Ovi svi zaključci se mogu dokazati matematičkom indukcijom, što ostavljamo za vježbu. Na temelju ovih slutnji imamo:

$$
u_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^{2j}}{j!}\,, \quad k \geq 2\,,
$$

pa je (točkovni) limes niza funkcija (u_k) jednak redu potencija $u(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$ (naime Picardove iteracije su upravo parcijalne sume tog reda). Dakle, preostalo je odrediti sumu reda potencija (ako je konvergentan). Kako je Taylorov red funkcije e^x jednak

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
$$

(v. [8, Primjer 6.18]) i konvergira prema e^x na cijelom $\mathbb{R}$, imamo

$$
u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} - 1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} - 1 = e^{x^2} - 1\,,
$$

i to je upravo kandidat za rješenje.

Kako smo u gornjoj analizi bili neprecizni (cilj je bio samo iz Picardovih iteracija naslutiti rješenje), za kraj provjerimo da je funkcija u zaista rješenje Cauchyjeve zadaće, a onda će po Picardovom teoremu to biti i (lokalno) jedinstveno rješenje. Računamo:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= e^0 - 1 = 0\,;\\
u'(x) &= 2xe^{x^2} = 2x\big((e^{x^2}-1)+1\big) = 2x\big(u(x)+1\big)\,.
\end{aligned}
$$

Zadaci

Zadatak 2.2. Zadovoljava li jednadžba

$$u'(x) = \frac{2 + \sqrt[3]{u^2 - 4}}{1 + \sqrt{x+1}}$$

pretpostavke Picardovog teorema uz

a) $u(0) = 2$.

b) $u(1) = 3$.

c) $u(-1) = 2$.

Rješenje: a) NE b) DA c) NE

Zadatak 2.3. Zadana je diferencijalna jednadžba

$$u' = (x+1)\Big(1 - \frac{1}{u}\Big).$$

a) Možemo li primijeniti Picardov teorem ako za početni uvjet uzmemo $u(-1) = 1$?

b) Napravite prve dvije Picardove iteracije za isti početni uvjet.

Rješenje: a) DA b) $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = 1$

3. Separabilne i homogene jednadžbe

3.1. Separabilne jednadžbe

Promotrimo Cauchyjevu zadaću

$$\begin{aligned} u'(x) &= f(x, u(x)) \\ u(x_0) &= u_0 \ , \end{aligned}$$

uz dodatan uvjet na funkciju f:

$$f(x, u) = g(x)h(u) \ , \tag{3.1}$$

pri čemu su $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadane funkcije. Tada gornja Cauchyjeva zadaća poprima oblik

$$u'(x) = g(x)h(u(x)) \tag{3.2}$$

$$u(x_0) = u_0 \ . \tag{3.3}$$

Ako je g neprekidna na okolini točke x_0 i h Lipschitz neprekidna na okolini u_0, tada po Picardovom teoremu (Teorem 2.4) slijedi lokalno postojanje i jedinstvenost rješenja zadaće (3.2)–(3.3). Zaista, neka je g neprekidna na $[x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x]$, te h Lipschitz neprekidna (pa onda i neprekidna) na $[u_0 - \alpha_u, u_0 + \alpha_u]$ s Lipschitzovom konstantom $L_h > 0$ ($\alpha_x, \alpha_u > 0$). Tada je $f(x, u) := g(x)h(u)$ neprekidna na $P := [x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x] \times [u_0 - \alpha_u, u_0 + \alpha_u]$ (kao produkt neprekidnih funkcija), te za $(x, u_1), (x, u_2) \in P$ imamo

$$|f(x, u_1) - f(x, u_2)| = |g(x)||h(u_1) - h(u_2)| \leq \max_{x \in [x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x]} |g(x)| L_h |u_1 - u_2| \ ,$$

pa je f Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli uz Lipschitzovu konstantu

$$L = \max_{x \in [x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x]} |g(x)| L_h \ .$$

Međutim, ako je f separiranog oblika (3.1), tada pretpostavku Lipschitz neprekidnosti možemo zamijeniti drugim svojstvom funkcije h.

Teorem 3.1 (Separabilne jednadžbe)**.** *Neka su $g \in C([x_0 - \alpha_x, x_0 + \alpha_x])$ i $h \in C([u_0 - \alpha_u, u_0 + \alpha_u])$ za $\alpha_x, \alpha_u > 0$, te neka je h stalnog predznaka (strogo pozitivna ili strogo negativna) na $\langle u_0 - \alpha_u, u_0 + \alpha_u \rangle$. Tada postoji $\delta \in \langle 0, \alpha_x \rangle$ takav da (3.2)–(3.3) ima jedinstveno rješenje na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.*

Prethodni teorem je također lokalne prirode kao i Picardov teorem, te su (uz oblik desne strane (3.1)) oni u općem odnosu. Naime, pretpostavka stalnog predznaka ne povlači Lipschitz neprekidnost, i obratno.

Neka je u (lokalno) rješenje zadaće (3.2)–(3.3) dano prethodnim teoremom. Pogledajmo kako ga odrediti. Kako je $h(u(x)) \neq 0$, možemo jednadžbu (3.2) podijeliti s $h(u(x))$, te integrirati po x, čime dobivamo:

$$\int \frac{u'(x)}{h(u(x))} \, dx = \int g(x) \, dx \ .$$

Funkciju na lijevoj strani možemo jednostavnije izračunati tako da iskoristimo zamjenu varijabli $v = u(x)$, integriramo po v i potom vratimo supstituciju. Dakle, lijeva strana se može zapisati kao $H(u(x))$, pri čemu je

$$H(v) := \int \frac{dv}{h(v)} \ ,$$

tj. H je primitivna funkcija funkcije $\frac{1}{h}$.

Time smo dobili da rješenje u nužno zadovoljava implicitnu jednadžbu

$$H(u(x)) = \int g(x)\, dx \ .$$

To je upravo prvi integral diferencijalne jednadžbe (3.2), odnosno prvi integral (u smislu Napomene 2.9) je dan s

$$F(x, u) = H(u) - \int g(x)\, dx$$

(pokažite). U rijetkim situacijama ćemo moći eksplicitno izraziti rješenje (ako je H invertibilna i inverz možemo eksplicitno odrediti, onda imamo $u(x) = H^{-1}(\int g(x)\, dx)$), ali uglavnom ćemo rješenje izražavati u obliku prvog integrala.

Pri rješavanju zadataka nećemo svaki put iznova izvoditi prvi integral i provoditi gore opisanu zamjenu varijabli. Radi lakšeg pamćenja postupka je onda korisno jednadžbu zapisati u Leibnizovoj notaciji

$$\frac{du}{dx} = g(x)h(u) \ . \tag{3.4}$$

Sada prvi integral formalno dobivamo dijeljenjem jednadžbe s $h(u)$, *množenjem* s dx i integriranjem, tj.

$$\int \frac{du}{h(u)} = \int g(x)\, dx \ .$$

Naravno, ovaj postupak nije matematički korektan, ali dobiveni prvi integral je točan.

Napomena 3.2. U nekim zadacima nećemo imati zadan početni uvjet $u(x_0) = u_0$, već će nas se tražiti da odredimo *sva* rješenja. Tada u (3.4) slučajeve kada je $h(u) = 0$ ne možemo isključiti, te ih moramo zasebno analizirati (to su obično trivijalni slučajevi).

Rigorozan dokaz Teorema 3.1 se zasniva na opravdanju gornjeg postupka (npr. potrebno je pokazati da je H dobro definirana i da postoji okolina oko u_0 na kojoj je invertibilna) u što nećemo na ovom kolegiju ulaziti, a zainteresiranog čitatelja upućujemo na [9, Teorem 3.1].

Primjer 3.3. Vratimo se na zadaću Primjera 2.12:

$$\begin{aligned} u'(x) &= 2x\big(1 + u(x)\big) \\ u(0) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Koristeći Picardov teorem dobili smo postojanje jedinstvenog lokalnog rješenja, te smo ga pogodili koristeći Picardove iteracije. Pogledajmo kako odrediti rješenje gornjim postupkom prilagođenim za separabilne jednadžbe.

Uočimo najprije da je jednadžba zaista u separiranom obliku, te da su funkcije $g(x) = 2x$ i $h(u) = 1 + u$ neprekidne na cijelom $\mathbb{R}$. Nadalje, h je stalnog predznaka na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle -1, +\infty\rangle$. Dakle, za svaku početnu vrijednost funkcije u osim -1 (u našem slučaju je početna vrijednost 0) možemo primijeniti Teorem 3.1 i pripadni postupak rješavanja.

Kako je rješenje u neprekidno i zadovoljava $u(0) = 0$, očito postoji okolina točke 0 za koju ne postiže vrijednost -1, odnosno na kojoj je $h(u(x)) > 0$, pa dalje računamo na nekoj takvoj okolini.

Dakle, prvi integral je dan s

$$\int \frac{du}{1+u} = \int 2x\, dx\,,$$

iz čega slijedi

$$\ln\big(1 + u(x)\big) = x^2 + C\,,$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$ neka konstanta i pri čemu smo koristili $1 + u(x) > 0$. Uvrštavanjem uvjeta $u(0) = 0$ dobivamo $C = 0$, pa djelovanjem eksponencijalnom funkcijom konačno dobivamo $u(x) = e^{x^2} - 1$. To je naravno isto rješenje koje smo dobili u Primjeru 2.12.

Primjer 3.4 (Logistička jednadžba)**.** Malo složeniji model opisa rasta populacije od Malthusovog je dan zadaćom

$$\begin{aligned} p' &= \rho p\big(1 - \frac{1}{\kappa}p\big) \\ p(0) &= p_0\,, \end{aligned}$$

pri čemu su $\rho, \kappa > 0$ dane konstante, a $p = p(t)$ predstavlja veličinu populacije u trenutku t. Pripadna diferencijalna jednadžba se zove *logistička jednadžba*. Prirodno je uzeti $p_0 > 0$ (početna veličina populacije), ali radi potpunosti matematičke analize promatramo općeniti slučaj $p_0 \in \mathbb{R}$. Slično ćemo promatrati sve vrijednosti t za koje rješenje ima smisla, a ne samo slučaj $t \geq 0$.

Ova jednadžba je očito separabilna. Štoviše, desna strana $f(t, p) = \rho p(1 - p/\kappa)$ ne ovisi eksplicitno o varijabli t i takve jednadžbe nazivamo *autonomnim jednadžbama*. Kako je f neprekidno diferencijabilna, po Napomeni 2.7 i Teoremu 2.4 znamo da za svaki izbor početne vrijednosti p_0 postoji jedinstveno lokalno rješenje. Nadalje, sličnim postupkom kao u Primjeru 2.6 možemo dobiti i globalnu jedinstvenost rješenja.

Pogledajmo sada što možemo zaključiti o ovom problemu koristeći Teorem 3.1. Možemo uzeti $g \equiv 1$ i $h(p) = \rho p(1 - p/\kappa)$, koje su neprekidne, te h ima konstantan predznak na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, \kappa\rangle$ i $\langle \kappa, +\infty\rangle$.

Ako je $p_0 \in \{0, \kappa\}$, tada ne možemo primijeniti Teorem 3.1, pa niti pripadnu metodu rješavanja. Međutim, u tom slučaju je očito konstantna funkcija $p \equiv p_0$ rješenje. To je i jedino rješenje jer smo već ranije komentirali jedinstvenost za svaki

$p_0 \in \mathbb{R}$. Ova rješenja se nazivaju *ravnotežnim stanjima* (populacija se ne mijenja po vremenu).

Neka je sada $p_0 \notin \{0, \kappa\}$. Tada je prvi integral dan (lokalno) s

$$\int \frac{dp}{\rho p(1-\frac{p}{\kappa})} = \int dt \ , \tag{3.5}$$

pa je preostalo samo izračunati pripadne neodređene integrale.

Rastavom na parcijalne razlomke slijedi

$$\begin{aligned}\int \frac{dp}{\rho p(1-\frac{p}{\kappa})} &= \frac{1}{\rho}\int \frac{dp}{p} + \frac{1}{\rho\kappa}\int \frac{dp}{1-\frac{p}{\kappa}} \\ &= \frac{1}{\rho}\ln|p| - \frac{1}{\rho}\ln\Big|1-\frac{p}{\kappa}\Big| + C_1 = \frac{1}{\rho}\ln\Big|\frac{p}{1-\frac{p}{\kappa}}\Big| + C_1 \ ,\end{aligned}$$

gdje je $C_1 \in \mathbb{R}$ proizvoljna konstanta, te smo koristili da je funkcija $G(p) = \ln|p|$ derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $G'(p) = 1/p$.

Sada iz (3.5) djelovanjem eksponencijalnom funkcijom dobivamo

$$\Big|\frac{p}{1-\frac{p}{\kappa}}\Big| = C_2 e^{\rho t} \ ,$$

gdje je $C_2 = e^{-\rho C_1}$ proizvoljna pozitivna konstanta (jer je C_1 bila proizvoljna iz $\mathbb{R}$). Kako je na skupu na kojem rješavamo izraz $\frac{p}{1-\frac{p}{\kappa}}$ konstantnog predznaka, možemo maknuti apsolutnu vrijednost ako dopustimo i negativne vrijednosti za konstantu C_2. Dakle, za svaki $p_0 \notin \{0, \kappa\}$ rješenje diferencijalne jednadžbe zadovoljava

$$\frac{p(t)}{1-\frac{p(t)}{\kappa}} = C_2 e^{\rho t} \ , \tag{3.6}$$

za neku konstantu $C_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, odnosno

$$p(t) = \frac{C_2 e^{\rho t}}{1 + \frac{C_2}{\kappa} e^{\rho t}} \ . \tag{3.7}$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta $p(0) = p_0$ u (3.6) dobivamo

$$C_2 = \frac{p_0}{1-\frac{p_0}{\kappa}} \ ,$$

pa onda konačno iz (3.7) slijedi

$$p(t) = \frac{\frac{p_0}{1-\frac{p_0}{\kappa}} e^{\rho t}}{1 + \frac{p_0}{\kappa - p_0} e^{\rho t}} \cdot \frac{(\kappa - p_0)e^{-\rho t}}{(\kappa - p_0)e^{-\rho t}} = \frac{\kappa p_0}{p_0 + (\kappa - p_0)e^{-\rho t}} \ . \tag{3.8}$$

Iako je ova formula izvedena za slučaj $p_0 \notin \{0, \kappa\}$, jednostavnom provjerom se može vidjeti da daje točno rješenje i u slučaju $p_0 \in \{0, \kappa\}$.

Analizirajmo dobivena rješenja u ovisnosti o parametru p_0. Za $p_0 \in [0, \kappa]$ je nazivnik u (3.8) strogo pozitivan pa je rješenje definirano na cijelom $\mathbb{R}$, a rješenje u

lijevom rubu domene ide u 0, a u desnom u κ (pravci $p = 0$ i $p = \kappa$ su lijeva i desna horizontalna asimptota grafa rješenja). S druge strane, za $p_0 \in \langle \kappa, +\infty \rangle$ to nije slučaj, već je rješenje definirano samo na intervalu $\langle -\frac{1}{\rho} \ln \frac{p_0}{p_0-\kappa}, +\infty \rangle$ (provjerite). Bitno je uočiti da je 0 (točka u kojoj je zadan početni uvjet) sadržana u tom intervalu. Očito u desnom rubu domene i ovdje rješenje ide u κ, dok se u lijevom rubu javlja vertikalna asimptota (limes zdesna u točki $-\frac{1}{\rho} \ln \frac{p_0}{p_0-\kappa}$ je $+\infty$). U fizikalno nezanimljivom slučaju $p_0 \in \langle -\infty, 0 \rangle$ rješenje je definirano na intervalu $\langle -\infty, \frac{1}{\rho} \ln \frac{p_0-\kappa}{p_0} \rangle$.

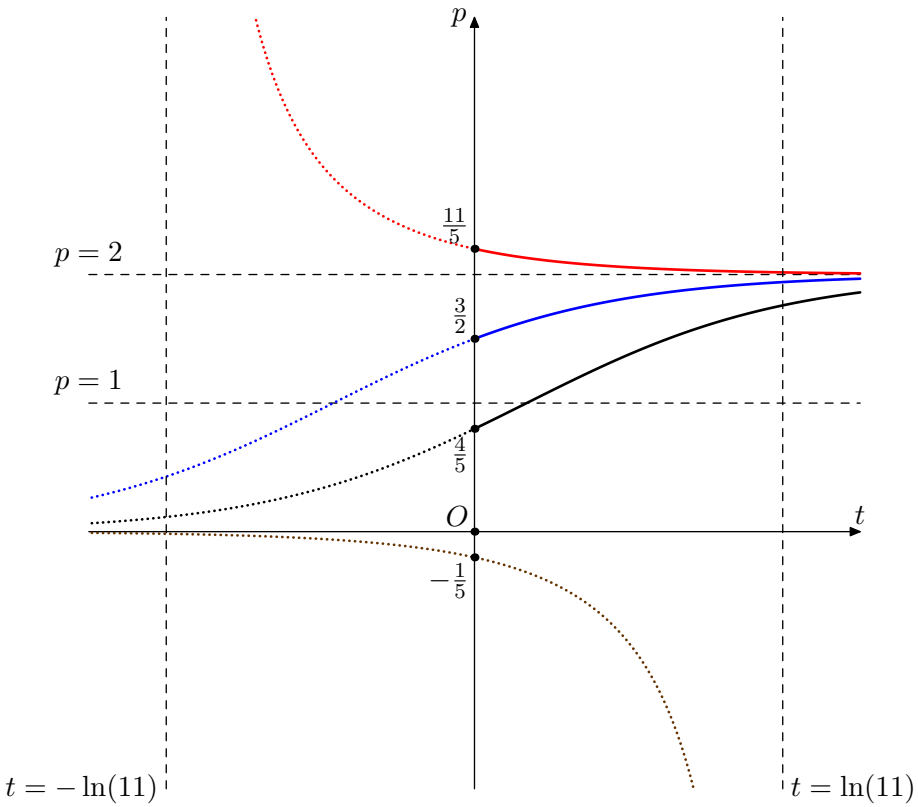
Da bismo mogli kvalitativno skicirati graf rješenja, potrebno je još ispitati prvu i drugu derivaciju. Srećom, ne trebamo derivirati rješenje dano formulom (3.8), već se možemo poslužiti logističkom jednadžbom koju ta funkcija zadovoljava. Naime, za $p_0 \in \langle 0, \kappa \rangle$ je uvijek $h(p(t)) > 0$ pa iz logističke jednadžbe dobivamo da je p' strogo pozitivna, odnosno p je strogo rastuća na cijeloj domeni. Za $p_0 \in \langle \kappa, +\infty \rangle$ imamo obratnu situaciju pa je funkcija strogo padajuća. Ovo zajedno s prethodno komentiranim limesima u rubovima domene daje da je slika funkcije (3.8) u slučaju $p_0 \in \langle 0, \kappa \rangle$ jednaka $\langle 0, \kappa \rangle$, dok je u slučaju $p_0 \in \langle \kappa, +\infty \rangle$ slika $\langle \kappa, +\infty \rangle$ (doduše, fizikalno nas zanimaju vrijednosti samo za $t \geq 0$).

Deriviranjem logističke jednadžbe dobivamo

$$p''(t) = \frac{d}{dt}\big(h(p(t))\big) = h'(p(t))p'(t) = h'(p(t))h(p(t))\,,$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti iskoristili da p zadovoljava logističku jednadžbu. Kako je $h'(p)h(p) = \rho^2 p(1-\frac{2}{\kappa}p)(1-\frac{1}{\kappa}p)$, točke infleksije se pojavljuju samo u točkama gdje graf funkcije siječe pravac $p = \frac{\kappa}{2}$ (jer u netrivijalnom slučaju $p_0 \notin \{0, \kappa\}$ rješenje ne smije poprimiti vrijednosti 0 i κ). Dakle, u slučaju $p_0 \in \langle \kappa, +\infty \rangle$ funkcija (3.8) je uvijek konveksna (jer je $p'' > 0$), dok se u slučaju $p_0 \in \langle 0, \kappa \rangle$ pojavljuje točka infleksije u točki $p(t) = \frac{\kappa}{2}$. Lijevo od te točke je funkcija konveksna, a desno je konkavna. Ovim pristupom možemo i bez eksplicitne formule za rješenje (3.8) iz same diferencijalne jednadžbe izvući dovoljno podataka o funkciji $p = p(t)$ da bismo mogli kvalitativno skicirati graf funkcije (barem za $t \geq 0$ uz $p_0 \geq 0$). Posebno, uočimo da ako je p_0 *blizu* κ, vrijednost $p(t)$ je za sve $t \geq 0$ *blizu* κ. S druge strane, koliko god uzeli p_0 *blizu* 0, $p(t)$ će za dovoljno veliki $t \geq 0$ biti *daleko* od 0 (teži ka κ). Iz tog razloga kažemo da je rješenje $p = \kappa$ *stabilno* ravnotežno stanje, dok je $p = 0$ *nestabilno* ravnotežno stanje.

Na Slici 6 je dana skica grafa funkcije p za nekoliko vrijednosti parametra p_0. Skicirajmo sada grafove funkcija za neke vrijednosti p_0.



Slika 6: Graf funkcije p za $\kappa = 2$ i $\rho = 1$ u ovisnosti o vrijednosti parametra p_0. Punom linijom su označeni fizikalno relevantni dijelovi grafa ($t \geq 0$ i $p(t) \geq 0$).

Zadaci

Zadatak 3.1. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$t^2x^2x' + 1 = x. \tag{3.9}$$

Rješenje: Zapišimo jednadžbu (3.9) na sljedeći način:

$$t^2x^2\frac{dx}{dt} + 1 = x,$$

što zapisujemo kao

$$t^2x^2\frac{dx}{dt} = x - 1. \tag{3.10}$$

Sada iz (3.10) slijedi:

$$t^2x^2dx = (x-1)dt. \tag{3.11}$$

Ovo je, očito, jednadžba sa separiranim varijablama.

Sada dijelimo jednadžbu (3.11) s $t^2(x-1)$. Time moramo isključiti točku $t = 0$ iz domene rješenja, pa je domena rješenja koja ćemo ovim postupkom dobiti u potpunosti sadržana ili u skupu $\langle -\infty, 0\rangle$ ili u $\langle 0, +\infty\rangle$. Nadalje, također ovim postupkom moramo isključiti mogućnost da funkcija x poprima vrijednost 1 u nekoj točki (na ovaj slučaju ćemo se vratiti na kraju). Zanimljivo je uočiti sljedeće: ako je točka

$t = 0$ ipak u domeni nekog rješenja, tada iz (3.10) nužno slijedi $x(0) = 1$. Dakle, dovoljno je na kraju samo komentirati slučaj kada funkcija x poprima vrijednost 1.

Za $x \neq 1$ iz jednadžbe (3.11) slijedi:

$$\frac{x^2}{x-1}dx = \frac{1}{t^2}dt. \tag{3.12}$$

Integriramo li jednadžbu (3.12), dobivamo:

$$\int \frac{x^2-1+1}{x-1}dx = \int \frac{1}{t^2}dt. \tag{3.13}$$

Sada iz (3.13) slijedi da sva rješenja za koja vrijedi $x(t) \neq 1$, za $t \neq 0$, postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da vrijedi:

$$\frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| = -\frac{1}{t} + C\,. \tag{3.14}$$

Time je (neki) prvi integral dan s

$$F(t,x) = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + \frac{1}{t}\,.$$

Komentirajmo još slučaj kada rješenje u nekoj točki poprima vrijednost 1. Za početak uočimo da za konstantnu funkciju $x = 1$ vrijedi $x' = \frac{dx}{dt} = 0$, pa uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo: $t^2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1$, čime slijedi $1 = 1$. Dakle, i $x = 1$ je rješenje.

Još je preostalo vidjeti postoji li rješenje x koje nije konstantna funkcija, a poprima vrijednost 1 u nekoj točki.

Pretpostavimo da za neki $t_0 \neq 0$ vrijedi $x(t_0) = 1$. Sada možemo primijeniti Picardov teorem (Teorem 2.4) na zadaću

$$x'(t) = \frac{x(t)-1}{t^2x(t)^2}\,, \quad x(t_0) = 1\,,$$

i zaključiti da je rješenje (lokalno) jedinstveno, pa je nužno konstantna funkcija s vrijednosti 1. Dakle, ako rješenje poprima vrijednost 1 u nekoj točki iz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, nužno je riječ o konstantnoj funkciji s vrijednosti 1.

S druge strane, već smo istaknuli da sva rješenja za koja vrijedi $x(t) \neq 1$, za $t \neq 0$, zadovoljavaju (3.14). Pretpostavimo da među njima postoje i ona kojima je točka $t = 0$ u domeni. Sada iz diferencijalne jednadžbe (3.9) nužno slijedi $x(0) = 1$, pa puštanjem limesa $t \to 0^{\pm}$ u (3.14) dobivamo $-\infty = -\infty + C$ za $t \to 0^+$, te $-\infty = +\infty + C$ za $t \to 0^-$. Kako je drugi izraz očito nemoguć, možemo zaključiti da se točka 0 sigurno ne može nalaziti u interioru domene rješenje, već eventualno rješenje možemo proširiti u $t = 0$ zdesna. □

Napomena 3.5. U prethodnom zadatku smo dali preciznu analizu slučajeva na kojima nismo mogli primijeniti metodu rješavanja za separabilne jednadžbe. Kako će obično takvi slučajevi rezultirati trivijalnim situacijama (takvo rješenje ne postoji ili je riječ o konstantnoj funkciji), u sljedećim zadacima ćemo te dijelove manje detaljno obraditi.

Zadatak 3.2. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$2t^2xx' + x^2 = 2. \tag{3.15}$$

Rješenje: Jednadžbu (3.15) zapisujemo kao:

$$2t^2x\frac{dx}{dt} = 2 - x^2. \tag{3.16}$$

Sada iz (3.16) dobivamo:

$$2t^2xdx = (2 - x^2)dt. \tag{3.17}$$

Za $x \neq \pm\sqrt{2}$ dijelimo jednadžbu (3.17) s $t^2(2 - x^2)$ (za $t = 0$ imamo $x^2(0) = 2$, tj. $x(0) = \pm\sqrt{2}$) kako bismo dobili:

$$\frac{2x}{2 - x^2}dx = \frac{1}{t^2}dt. \tag{3.18}$$

Integriramo li jednadžbu (3.18), dobivamo:

$$\int \frac{2x}{2 - x^2}dx = \int \frac{1}{t^2}dt. \tag{3.19}$$

Sada iz (3.19) imamo:

$$-\ln|2 - x^2| = -\frac{1}{t} - \ln C,\ C > 0. \tag{3.20}$$

Iz jednadžbe (3.20) dobivamo:

$$\ln\frac{|x^2 - 2|}{C} = \frac{1}{t},\ C > 0. \tag{3.21}$$

Iz (3.21) direktno slijedi:

$$|x^2 - 2| = Ce^{\frac{1}{t}},\ C > 0.$$

Zbog definicije rješenja, tj. njegove glatkoće i definicije na intervalu možemo maknuti apsolutnu vrijednost (ovisno o predznaku izraza $x^2 - 2$ prilagođavamo i predznak konstante):

$$x^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{t}},\ C \neq 0,$$

što zapisujemo kao

$$x^2 = 2 + Ce^{\frac{1}{t}},\ C \neq 0.$$

Za $x = \sqrt{2}$ i $x = -\sqrt{2}$ vrijedi $x' = \frac{dx}{dt} = 0$, pa je jednadžba (3.15) zadovoljena, tj. $2 = 2$.

Dakle,

$$x^2 = 2 + Ce^{\frac{1}{t}}, C \in \mathbb{R}.$$

je prvi integral zadane diferencijalne jednadžbe. □

Napomena 3.6. Često ćemo diferencijalne jednadžbe zapisivati u obliku *diferencijalnih formi* (kao što je slučaj s idućim zadatkom). Preciznije, za dane skalarne funkcije M, N definirane na otvorenom podskupu $\mathbb{R}^2$ promatramo

$$M(x,t)dt + N(x,t)dx = 0 \ .$$

U teoriju diferencijalnih formi nećemo ulaziti, već će za nas gornja jednadžba značiti da je potrebno pronaći prvi integral jedne od sljedeće dvije diferencijalne jednadžbe:

$$M(x(t),t) + N(x(t),t)x'(t) = 0 \ , \tag{3.22}$$
$$M(x,t(x))t'(x) + N(x,t(x)) = 0 \ . \tag{3.23}$$

U prvoj jednadžbi je x nepoznata funkcija u ovisnosti o varijabli t, dok je u drugoj jednadžbi situacija obratna. Lako je zapamtiti kako doći do ove dvije diferencijalne jednadžbe. Naime, samo formalno podijelimo početnu jednadžbu s dt i uz $\frac{dx}{dt} = x'$ prepoznajemo prvu jednadžbu, dok za drugu formalno dijelimo s dx. Koju od ove dvije jednadžbe rješavamo ovisi o tome za koju nam je lakše odrediti prvi integral.

Nije čudno da je u ovom slučaju svejedno koju od gornje dvije diferencijalne jednadžbe rješavamo jer to vrijedi i općenito. Naime, pretpostavimo da nam je zadana diferencijalna jednadžba (3.22) i neka je $x = x(t)$ neko (lokalno) rješenje za koje vrijedi $x'(t) \neq 0$ u svakoj točki t promatranog intervala. Tada je x invertibilna funkcija. Označimo njen inverz s $t = t(y)$ (ovdje t predstavlja funkciju, a y varijabli). Iz pravila za derivaciju inverzne funkcije znamo da vrijedi $t'(y) = \frac{1}{x'(t(y))}$. Uvrštavanjem $t(y)$ na mjesto t u diferencijalnoj jednadžbi (3.22) dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= M\big(x(t(y)),t(y)\big) + N\big(x(t(y)),t(y)\big)x'(t(y)) \\ &= M(y,t(y)) + N(y,t(y))\frac{1}{t'(y)} \ , \end{aligned}$$

pri čemu smo koristili $x(t(y)) = y$ (kompozicija inverznih funkcija je identiteta) i prethodno komentiranu vezu derivacija. Množenjem dobivene jednadžbe s $t'(y)$ prepoznajemo diferencijalnu jednadžbu (3.23) (samo imamo različite oznake za varijable).

Dakle, za rješenja za koja (lokalno) prva derivacija nema nultočku, svejedno koju od gornje dvije jednadžbe rješavamo. Međutim, za preostala rješenja ne vrijedi navedena ekvivalencija (npr. za rješenja koja su konstantne funkcije).

Ova ekvivalencija će biti vrlo korisna pri rješavanju nekih zadataka (npr. Zadatak 5.5).

Zadatak 3.3. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$(tx^2 - x^2 + t - 1)dt + (t^2x - 2tx + t^2 + 2x - 2t + 2)dx = 0. \tag{3.24}$$

Rješenje: Faktorizirajmo koeficijente u diferencijalnoj formi:

$$tx^2 - x^2 + t - 1 = (t-1)(x^2+1),$$

te

$$t^2x - 2tx + t^2 + 2x - 2t + 2 = t^2(x+1) - 2t(x+1) + 2(x+1) = (x+1)(t^2 - 2t + 2).$$

Sada jednadžba (3.24) postaje

$$(t-1)(x^2+1)dt + (x+1)(t^2 - 2t + 2)dx = 0. \tag{3.25}$$

Podijelimo jednadžbu (3.25) s $(x^2+1)(t^2-2t+2) = (x^2+1)((t-1)^2+1) > 0$ kako bismo dobili:

$$\frac{t-1}{t^2-2t+2}dt + \frac{x+1}{x^2+1}dx = 0\,,$$

a zatim integriranjem slijedi:

$$\int \frac{t-1}{t^2-2t+2}dt + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = 0\,.$$

Time dobivamo:

$$\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+2) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan x = -\frac{1}{2}\ln C,\ C > 0.$$

Sređivanjem gornjeg izraza slijedi:

$$\ln[(t^2-2t+2)(x^2+1)C] = -2\arctan x,\ C > 0.$$

Napokon, prvi integral zadane diferencijalne jednadžbe dan je s:

$$C(t^2-2t+2)(x^2+1) = e^{-2\arctan x},\ C > 0\,.$$

□

Zadatak 3.4. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} t^2x' - \cos(2x) = 1, \\ \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{9\pi}{4}. \end{cases}$$

Rješenje: Najprije odredimo prvi integral dane diferencijalne jednadžbe:

$$t^2\frac{dx}{dt} = 1 + \cos(2x). \tag{3.26}$$

Iz jednadžbe (3.26) slijedi:

$$t^2dx = (1+\cos(2x))dt. \tag{3.27}$$

Neka je $\cos(2x) \neq -1$, tj. $x \neq \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Podijelimo jednadžbu (3.27) s $t^2(1+\cos(2x))$ (za $t = 0$ je $\cos(2x(0)) = -1$, tj. $x(0) = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) kako bismo dobili:

$$\frac{1}{1+\cos(2x)}dx = \frac{1}{t^2}dt\,,$$

što dodatno integriramo:

$$\int \frac{1}{1+\cos(2x)}dx = \int \frac{1}{t^2}dt\,. \tag{3.28}$$

Uzmemo li u obzir da vrijedi jednakost $1+\cos(2x) = 2\cos^2 x$, iz jednadžbe (3.28) slijedi:

$$\frac{1}{2}\tan x = -\frac{1}{t} + C,\ C \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Sada iz (3.29) imamo:

$$\tan x = C - \frac{2}{t},\ C \in \mathbb{R}. \tag{3.30}$$

Prisjetimo se da je uvjet zadatka dan s:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{9\pi}{4}.$$

Ovdje ćemo koristiti važno svojstvo neprekidnog preslikavanja da *komutira s limesom*, tj. da vrijedi $\lim_{p\to p_0} f(p) = f(\lim_{p\to p_0} p) = f(p_0)$.

Sada imamo:

$$\lim_{t\to\infty} \tan x = \tan \lim_{t\to\infty} x = \tan\frac{9\pi}{4} = 1,$$

iz čega dobivamo

$$1 = \lim_{t\to\infty} \tan x = \lim_{t\to\infty}(C - \frac{2}{t}) = C,$$

pa slijedi

$$C = 1. \tag{3.31}$$

Dakle, iz (3.30) i (3.31) dobivamo:

$$\tan x = 1 - \frac{2}{t}.$$

Sada imamo:

$$\arctan(\tan x) = \arctan(\tan(x - 2\pi)) = x - 2\pi,$$

gdje smo uzeli u obzir to da mora biti zadovoljen početni uvjet (naime, $\arctan\colon \mathbb{R} \to \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$, pa je $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, a uvjet je $\frac{9\pi}{4}$). Direktno slijedi:

$$x = \arctan(1 - \frac{2}{t}) + 2\pi.$$

Za $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ imamo $x' = 0$, pa je jednadžba (3.26) zadovoljena, tj. vrijedi $1 = 1$. Dakle, $x = \frac{2k+1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su također rješenja polazne diferencijalne jednadžbe, ali ne i Cauchyjevog problema budući da niti za jedan $k \in \mathbb{Z}$ ne možemo postići $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{9\pi}{4}$. Iz toga slijedi da je

$$x = \arctan(1 - \frac{2}{t}) + 2\pi,$$

jedino rješenje dane Cauchyjeve zadaće. □

Zadatak 3.5 (Domaća zadaća)**.** Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe

$$3x^2x' + 16t = 2tx^3, \tag{3.32}$$

koje je ograničeno za $t \to \infty$.

Rješenje: Jednadžbu (3.32) zapisujemo na sljedeći način:

$$3x^2\frac{dx}{dt} = 2t(x^3 - 8). \tag{3.33}$$

Sada iz (3.33) dobivamo:

$$3x^2dx = 2t(x^3 - 8)dt. \tag{3.34}$$

Neka je $x \neq 2$. Podijelimo jednadžbu (3.34) s $x^3 - 8$ i dobivamo:

$$\frac{3x^2}{x^3 - 8}dx = 2tdt. \tag{3.35}$$

Integriramo li jednadžbu (3.35), imamo:

$$\int \frac{3x^2}{x^3 - 8}dx = \int 2tdt. \tag{3.36}$$

Sada iz (3.36) slijedi:

$$\ln|x^3 - 8| = t^2 + \ln C, \ C > 0.$$

Dobivamo jednadžbu:

$$|x^3 - 8| = Ce^{t^2}, \ C > 0.$$

Zbog glatkoće rješenja možemo brisati apsolutne vrijednosti, pa imamo:

$$x^3 = Ce^{t^2} + 8, \ C \neq 0.$$

$x = 2$ je također rješenje jednadžbe (3.33). Dakle, rješenje dane diferencijalne jednadžbe je dano sa:

$$x^3 = Ce^{t^2} + 8, \ C \in \mathbb{R}.$$

Uvjet zadatka: $x(t)$ je ograničeno za $t \to \infty$, što znači da je $x^3(t)$ ograničeno za $t \to \infty$. Dakle, imamo

$$\lim_{t\to\infty} x^3(t) = \lim_{t\to\infty}(Ce^{t^2} + 8) = \lim Ce^{t^2} + 8.$$

Kako je $t \mapsto e^{t^2}$ strogo rastuća funkcija i $\lim_{t\to\pm\infty} e^{t^2} = +\infty$, slijedi da je $C = 0$.

Dakle, $x^3 = 8$ je rješenje danog problema.

□

Zadatak 3.6 (Domaća zadaća)**.** Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} (1 + e^t)xx' = e^t, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{3.37}$$

Rješenje: Diferencijalnu jednadžbu (3.37) zapisujemo na sljedeći način:

$$(1+e^t)x\frac{dx}{dt} = e^t. \tag{3.38}$$

Sada iz (3.38) dobivamo:

$$(1+e^t)xdx = e^t dt. \tag{3.39}$$

Podijelimo jednadžbu (3.39) s $(1+e^t) > 0$ kako bismo dobili:

$$xdx = \frac{e^t}{1+e^t}dt\,,$$

a potom je integriramo:

$$\int xdx = \int \frac{e^t}{1+e^t}dt\,. \tag{3.40}$$

Sada iz (3.40) dobivamo:

$$\frac{x^2}{2} = \ln(1+e^t) + C,\ C \in \mathbb{R},$$

što je prvi integral diferencijalne jednadžbe.

Početni uvjet: $x(0) = 1$, pa slijedi $x^2(0) = 1$. Dakle, imamo:

$$\frac{1}{2} = \ln(1+e^0) + C,$$

iz čega dobivamo $C = \frac{1}{2} - \ln 2$. Stoga je rješenje problema dano s:

$$\frac{x^2}{2} = \ln(1+e^t) + \frac{1}{2} - \ln 2,$$

iz čega slijedi:

$$x^2 = 2\ln(1+e^t) + 1 - 2\ln 2,$$

pa napokon imamo:

$$x^2(t) = 1 + \ln\left[\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2\right].$$

Budući da rješenje Cauchyjevog problema mora biti glatko (neprekidno), imamo dvije mogućnosti. Ovdje je bitno napomenuti da je jedno od svojstava funkcija neprekidnih u točki sljedeće:

Ako je $f\colon \langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $t_0 \in \langle a,b\rangle$ i ako je $f(t_0) \neq 0$, onda postoji $\delta > 0$ takva da je:

$$f(t_0) > 0,\ |t-t_0| < \delta \Rightarrow f(t) > \frac{1}{2}f(t_0) > 0,$$

odnosno

$$f(t_0) < 0,\ |t-t_0| < \delta \Rightarrow f(t) < \frac{1}{2}f(t_0) < 0.$$

Prema tome, budući da je $x(0) = 1 > 0$, a rješenje Cauchyjevog problema mora biti neprekidno, iz gornje tvrdnje slijedi da i rješenje u okolini 0 mora biti veće od 0. Dakle, rješenje Cauchyjevog problema je

$$x(t) = \sqrt{1 + \ln\left[\left(\frac{1+e^t}{2}\right)^2\right]}.$$

□

Promatramo diferencijalnu jednadžbu oblika

$$x' = f(at + bx + c)\,, \quad a, b, c = const.,\ a, b \neq 0. \tag{3.41}$$

Takvu jednadžbu možemo svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama, i to supstitucijom:

$$z = at + bx + c. \tag{3.42}$$

Zaista, iz (3.42) slijedi:

$$\frac{dz}{dt} = a + b\frac{dx}{dt},$$

to jest

$$\frac{dz}{dt} = a + bf(z),$$

što je upravo jednadžba sa separiranim varijablama.

U idućem pododjeljku ćemo vidjeti još neke oblike diferencijalnih jednadžbi koji se odgovarajućom supstitucijom svode na separirani oblik.

Zadatak 3.7. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$(t + x)^2 x' = 9. \tag{3.43}$$

Rješenje: Supstitucijom $z = t + x$ gornju jednadžbu svodimo na jednadžbu sa separiranim varijablama. Najprije primijetimo da vrijedi:

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{dx}{dt},$$

to jest

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} - 1. \tag{3.44}$$

Dakle, iz (3.43) i (3.44) slijedi:

$$z^2\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) = 9,$$

iz čega dobivamo:

$$z^2\frac{dz}{dt} = 9 + z^2. \tag{3.45}$$

Sada iz (3.45) imamo:

$$z^2 dz = (9 + z^2)dt. \tag{3.46}$$

Podijelimo li jednadžbu (3.46) s $(9+z^2)>0$, dobivamo:

$$\frac{z^2}{9+z^2}dz = dt. \tag{3.47}$$

Integriramo li jednadžbu (3.47) imamo:

$$\int \frac{z^2+9-9}{9+z^2}dz = \int dt. \tag{3.48}$$

Iz (3.48) slijedi:

$$z - 3\arctan\frac{z}{3} = t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Vraćanjem supstitucije $z = t + x$, dobivamo:

$$t + x - 3\arctan\frac{t+x}{3} = t + C. \tag{3.49}$$

Sada iz (3.49) imamo:

$$\arctan\frac{t+x}{3} = \frac{x}{3} + C.$$

Napokon dobivamo rješenje u sljedećem obliku:

$$t + x = 3\tan\left(\frac{x}{3} + C\right),\ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 3.8. Riješite Cauchyjevu zadaću

$$\begin{cases} (t+2x)x' = 1, \\ x(0) = -1. \end{cases} \tag{3.50}$$

Rješenje: Supstitucijom $z = t + 2x$ gornju jednadžbu svodimo na jednadžbu sa separiranim varijablama. Primijetimo najprije da vrijedi:

$$\frac{dz}{dt} = 1 + 2\frac{dx}{dt},$$

iz čega dobivamo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt} - 1\right). \tag{3.51}$$

Uvrštavanjem (3.51) u (3.50), imamo:

$$\frac{1}{2}z\left(\frac{dz}{dt} - 1\right) = 1. \tag{3.52}$$

Sada iz (3.52) slijedi:

$$z\frac{dz}{dt} - z = 2. \tag{3.53}$$

Jednadžbu (3.53) zapisujemo na sljedeći način:

$$z\frac{dz}{dt} = z + 2.$$

Dobivamo jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$zdz = (z+2)dt \tag{3.54}$$

Neka je $z \neq -2$. Sada jednadžbu (3.54) podijelimo sa $(z+2) \neq 0$ kako bismo dobili:

$$\frac{z}{z+2}dz = dt. \tag{3.55}$$

Integriramo jednadžbu (3.55) i dobivamo:

$$\int \frac{z+2-2}{z+2}dz = \int dt.$$

Dakle, imamo:

$$z - 2\ln|z+2| = t + C.$$

Vraćanjem supstitucije $z = t + 2x$ dobivamo:

$$t + 2x - 2\ln|t + 2x + 2| = t + C.$$

Sada lako slijedi:

$$C + x = \ln|t + 2x + 2|, \ C \in \mathbb{R}.$$

Napokon, dobivamo:

$$e^C e^x = |t + 2x + 2|,$$

što zapisujemo kao:

$$Ce^x = t + 2x + 2, \ C \neq 0.$$

Za $z = -2$ slijedi $\frac{dz}{dt} = 0$, pa je zadovoljena jednadžba (3.53), tj. vrijedi $2 = 2$. Dakle, $z = -2$ je također rješenje dane jednadžbe. Stoga je $t + 2x + 2 = 0$ također prvi integral jednadžbe.

Napokon, imamo da je prvi integral dane diferencijalne jednadžbe dan s:

$$t + 2x + 2 = Ce^x, \ C \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta $x(0) = -1$ u gornji izraz dobivamo:

$$-2 + 2 = Ce^{-1},$$

iz čega slijedi da je $C = 0$. To znači da je rješenje našeg Cauchyjevog problema dano u sljedećem obliku:

$$t + 2x + 2 = 0,$$

to jest:

$$x(t) = -1 - \frac{t}{2}.$$

□

Zadatak 3.9 (Domaća zadaća)**.** Odredite prve integrale sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $t + tx + x'(x + tx) = 0$,

b) $x\sqrt{1-t^2}dx + t\sqrt{1-x^2}dt = 0$,

c) $txdt + (t+1)dx = 0$,

d) $2t^2xx' = 1 + t^2$,

e) $x' = \sqrt{4t + 2x + 1}$,

f) $x' - x = 2t - 3$,

g) $x' = (t-x)^2 + 1$,

h) $x' = \sin(t - x)$,

i) $\frac{2-e^t}{\sin^2 x}x' + 3e^t \cot x = 0$,

j) $x' = (at + bx + c)^2,\ a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Rješenje: a) $(t+1)(x+1) = Ce^{x+t}$, $C \in \mathbb{R}$; b) $\sqrt{1-x^2} = -\sqrt{1-t^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x = \pm 1$; c) $x = C(t+1)e^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$; d) $x^2 = t - \frac{1}{t} + C$, $C \in \mathbb{R}$; e) $\sqrt{4t+2x+1} - 2\ln(\sqrt{4t+2x+1} + 2) = t + C$, $C \in \mathbb{R}$; f) $2t + x - 1 = Ce^t$, $C \in \mathbb{R}$; g) $t + C = \frac{1}{t-x}$, $C \in \mathbb{R}$, $x = t$; h) $\frac{2}{\tan(\frac{t-x}{2})-1} + t + C = 0$, $C \in \mathbb{R}$, $x = t - \frac{\pi}{2} - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; i) $\tan x = C(e^t - 2)^3$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; j) $t + C = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan(\sqrt{\frac{b}{a}}(at + bx + c))$, $C \in \mathbb{R}$.

Zadatak 3.10 (Domaća zadaća)**.** Riješite sljedeće Cauchyjeve probleme:

a)
$$\begin{cases} x' \sin t = x \ln x, \\ x(\frac{\pi}{2}) = 1. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2\sqrt{t}dx = xdt, \\ x(4) = 1. \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x - tx' = a(1 + t^2x'), \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} (a^2 + x^2)dt + 2t\sqrt{at - t^2}dx = 0, \\ x(a) = 0,\ a \neq 0. \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} t^3x' \sin x = 2, \\ \lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

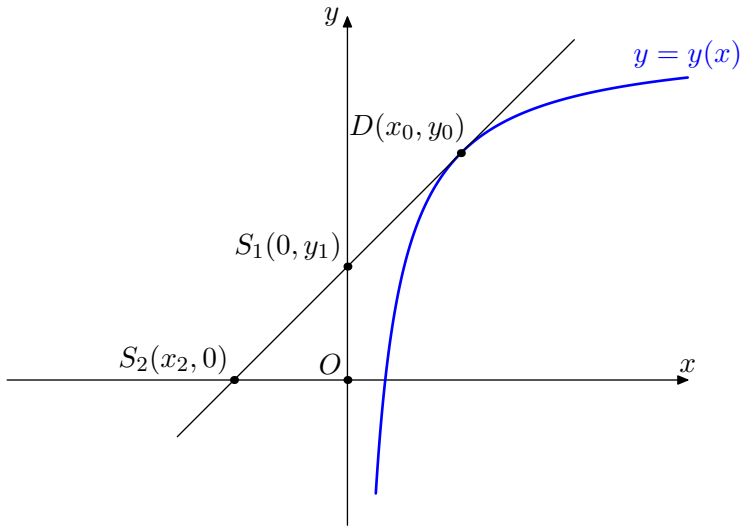
Rješenje: a) $x = 1$ b) $x = e^{\sqrt{t}-2}$ c) $x = \frac{a+t}{at+1}$ d) $x = a\tan(\frac{\sqrt{t(a-t)}}{t})$ e) $x = \arccos(\frac{1}{t^2})$

Zadaci s primjenama

U zadacima iz ovog dijela ćemo trebati najprije sami izvesti diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava tražena veličina (probleme *modeliramo* odgovarajućim diferencijalnim jednadžbama), a potom je i riješiti. Problemi će biti uglavnom vezani uz geometriju (derivacija se pojavljuje kao koeficijent smjera tangente) ili uz promatranje neke veličini za koju je određeno kako se mijenja po vremenu (slično kao u primjerima i zadacima iz Odjeljka 1).

Zadatak 3.11. Odredite sve krivulje sa svojstvom da u svakoj točki krivulje sjecište tangente s y-osi raspolavlja spojnice dirališta tangente i sjecišta tangente s x-osi.

Rješenje: Označimo s $y = y(x)$ krivulju koju tražimo. Neka je $D(x_0, y_0)$ proizvoljna točka te krivulje (time smo ujedno zadali $y(x_0) = y_0$) i promotrimo tangentu na krivulju u toj točki (vidi Sliku 7).



Slika 7: Skica tražene krivulje.

Također, znamo da je jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ dana s:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Označimo sa $S_1(0, y_1)$ i $S_2(x_2, 0)$ sjecišta te tangente s odgovarajućim koordinantim osima. Iz uvjeta zadatka, zbog toga što točka S_1 mora biti polovište dužine $\overline{DS_2}$, zaključujemo da vrijedi:

$$y_1 = \frac{1}{2}y_0\,.$$

S druge strane, y-komponentu točke S_1 možemo odrediti i iz jednadžbe tangente kroz točku D. Preciznije, u $S_1(0, y_1)$ imamo:

$$y_1 - y_0 = -y'(x_0)x_0\,,$$

odnosno:

$$y_1 = y_0 - x_0 y'(x_0)\,.$$

Izjednačavanjem dobivenih vrijednosti za y_1 dobivamo:

$$\frac{1}{2}y_0 = y_0 - x_0 y'(x_0)\,,$$

iz čega sređivanjem konačno slijedi:

$$x_0 y'(x_0) = \frac{1}{2}y_0\,.$$

Prema uvjetima zadatka, ova jednakost mora vrijediti za svaku točku grafa $D(x_0, y_0)$. Dakle, tražene krivulje $y = y(x)$ tražimo među rješenjima diferencijalne jednadžbe:

$$xy' = \frac{1}{2}y.$$

Jednadžbu rješavamo separacijom varijabli:

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y$$
$$xdy = \frac{1}{2}ydx.$$

Pretpostavimo sada da $x = 0$ nije u domeni rješenja (odnosno, da tražimo rješenja ili na $\langle -\infty, 0\rangle$ ili na $\langle 0, \infty\rangle$), te da je $y \neq 0$ (poslije je potrebno provjeriti i taj slučaj zasebno). Dijelimo jednadžbu s xy, te dobivamo:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{2x},$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

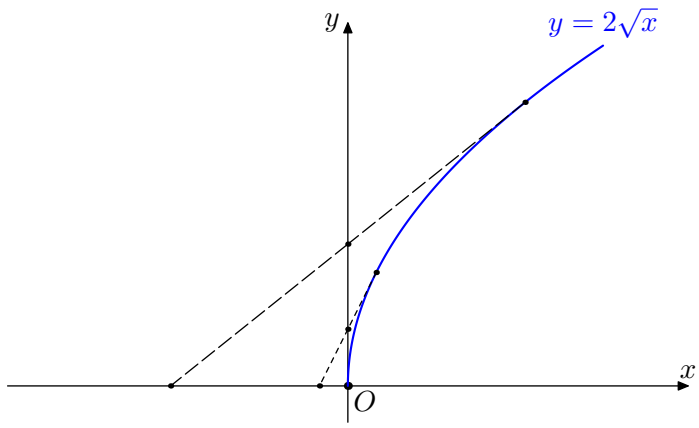
odnosno:

$$|y| = C\sqrt{|x|}, \qquad C > 0.$$

Zbog glatkoće rješenja možemo se riješiti apsolutnih vrijednosti te konačno dobivamo:

$$y = C\sqrt{|x|}, \qquad C \neq 0$$

(vidi Sliku 8).

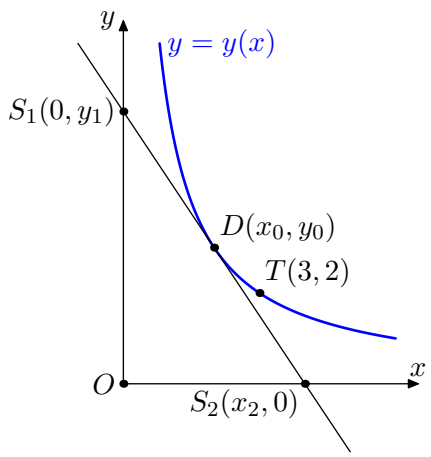


Slika 8: Prikaz jedne krivulje koja zadovoljava uvjet zadatka.

Dakle, skup svih rješenja je jedna familija parabola. Pritom je domena rješenja ili $\langle -\infty, 0\rangle$ ili $\langle 0, \infty\rangle$. Za kraj, vratimo se na slučaj $y = 0$. Iako ono jest rješenje diferencijalne jednadžbe, ta krivulja nije rješenje našeg polaznog problema zbog geometrijske besmislenosti uvjeta u tom slučaju.

□

Zadatak 3.12. Nađite krivulju koja prolazi točkom $T(3, 2)$, a diralište bilo koje njene tangente raspolavlja odsječak tangente među koordinatnim osima.



Slika 9: Skica tražene krivulje.

Rješenje: Označimo ponovno s $y = y(x)$ traženu krivulju, te neka su $D(x_0, y_0)$, $S_1(0, y_1)$ i $S_2(x_2, 0)$ kao i u prethodnom zadatku (vidi Sliku 9).

Ponovno primijetimo kako y-komponentu točke S_1 možemo dobiti na dva načina: iz uvjeta zadatka, zbog toga što je točka D polovište dužine $\overline{S_1S_2}$, slijedi da je

$$y_1 = 2y_0\,,$$

dok s druge strane, iz jednadžbe tangente kroz točku D, dobivamo isto kao i ranije:

$$y_1 = y_0 - x_0 y'(x_0)\,.$$

Izjednačavanjem ovih izraza dolazimo do diferencijalne jednadžbe koju krivulja mora zadovoljavati (ponovno iz razloga što ta jednakost mora vrijediti za svaku točku (x_0, y_0) na krivulji):

$$y = -xy'\,.$$

Rješavamo metodom separacije varijabli. Domena rješenja će biti takva da ne sadrži $x = 0$, te zasad pretpostavljamo da je $y \neq 0$. Dijeljenjem s xy jednadžba prelazi u:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x},$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\ln|y| = -\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

odnosno:

$$|y| = \frac{C}{|x|}, \qquad C > 0.$$

Zbog glatkoće rješenja, skup rješenja možemo zapisati u obliku:

$$y = \frac{C}{x}, \qquad C \neq 0.$$

Preostaje nam još među svim dobivenim krivuljama (rješenjima jednadžbe) pronaći ono koje sadrži točku $T(3,2)$. Uvrštavanjem $x = 3, y = 2$ u izraz dobivamo da takva krivulja odgovara konstanti $C = 6$. Dakle, tražena je krivulja (hiperbola):

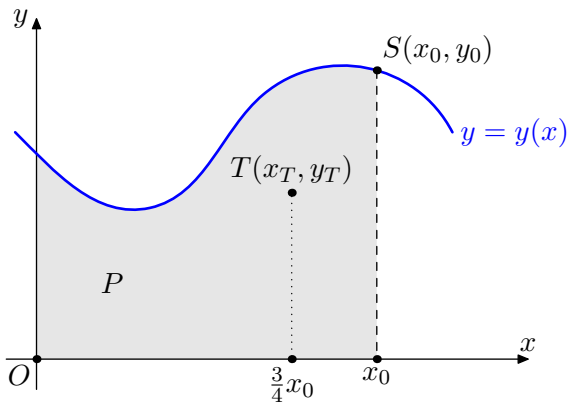
$$y = \frac{6}{x}.$$

Za kraj, primijetimo još kako $y = 0$ nije rješenje zadatka zbog toga što očito ne prolazi zadanom točkom (iako je rješenje diferencijalne jednadžbe).

□

Zadatak 3.13. Odredite krivulju takvu da je za svaku točku $S(x_0, y_0)$ na njoj x-komponenta težišta lika omeđenog koordinatnim osima, tom krivuljom i pravcem $x = x_0$ iznosi $\frac{3}{4}x_0$ (vidi Sliku 10). Pretpostavite da je $y(x) > 0$ za sve x, tj. da se krivulja nalazi iznad x-osi.

Rješenje: Uzmimo za početak $x_0 > 0$ te označimo s P lik dobiven uvjetima zadatka (kao na Slici 10), te označimo s $T(x_T, y_T)$ njegovo težište.



Slika 10: Skica tražene krivulje.

Skup P kao podskup ravnine možemo zapisati na sljedeći način:

$$P = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq x_0,\ 0 \leq y \leq y(x)\right\}.$$

Težište skupa P je, prema definiciji (vidi [7, Teorem 8.5]), točka (x_T, y_T) takva da vrijedi:

$$x_T = \frac{1}{|P|}\int_P x dP, \qquad y_T = \frac{1}{|P|}\int_P y dP,$$

pri čemu $\int_P x dP$ označava integral funkcije $f(x, y) = x$ na P, a $|P|$ označava površinu lika P (koja je zbog uvjeta da se krivulja nalazi iznad x-osi jednaka integralu konstantne funkcije s vrijednosti 1 na P, tj. $\int_P dP$).

Uvjet zadatka nam kaže da vrijedi:

$$x_T = \frac{3}{4}x_0.$$

Stoga želimo precizirati gornji izraz za x_T preko integrala. Već smo zapravo naveli parametrizaciju lika P, iz čega računamo:

$$|P| = \int_P dP = \int_0^{x_0} \Big(\int_0^{y(x)} dy \Big) dx = \int_0^{x_0} y(x) dx,$$

odnosno:

$$\int_P x dP = \int_0^{x_0} \Big(\int_0^{y(x)} x dy \Big) dx = \int_0^{x_0} x y(x) dx.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz za x_T dobivamo:

$$x_T = \frac{\int_0^{x_0} x y(x) dx}{\int_0^{x_0} y(x) dx}.$$

Vraćanjem na relaciju iz uvjeta zadatka, vidimo da za svaki x_0 imamo jednakost:

$$\frac{\int_0^{x_0} x y(x) dx}{\int_0^{x_0} y(x) dx} = \frac{3}{4} x_0,$$

odnosno:

$$\int_0^{x_0} x y(x) dx = \frac{3}{4} x_0 \int_0^{x_0} y(x) dx.$$

Dobivenu integralnu jednakost deriviramo (po x_0 koji je ovdje varijabla), te dobivamo:

$$x_0 y(x_0) = \frac{3}{4} \Big(\int_0^{x_0} y(x) dx + x_0 y(x_0) \Big),$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$x_0 y(x_0) = 3 \int_0^{x_0} y(x) dx.$$

Dobivenu jednakost ponovno deriviramo (po x_0) te dobivamo:

$$y(x_0) + x_0 y'(x_0) = 3y(x_0),$$

odnosno, nakon sređivanja:

$$x_0 y'(x_0) = 2y(x_0).$$

Kako ova jednakost vrijedi za sve $x_0 > 0$, zaključujemo da krivulju tražimo među rješenjima diferencijalne jednadžbe:

$$xy' = 2y.$$

Separacijom varijabli za $y \neq 0$ te uzimanjem u obzir domene koja ne uključuje $x = 0$, dobivamo:

$$\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x},$$

odakle integriranjem i primjenom eksponencijalne funkcije imamo:

$$|y| = C|x|^2, \qquad C > 0.$$

Zbog glatkoće rješenja, skup rješenja možemo zapisati u obliku

$$y = Cx^2, \qquad C \neq 0.$$

Međutim, zbog pretpostavke da je $y(x) > 0$, među tim rješenjima moramo odbaciti ona za koja je $C < 0$. Iz istog razloga i rješenje $y = 0$ odbacujemo. Dakle, tražena familija krivulja (parabola) je

$$y = Cx^2. \qquad C > 0\,.$$

□

Zadatak 3.14. Brzina raspadanja radija proporcionalna je postojećoj masi radija. Odredite koliki se postotak mase radija raspadne nakon 100 godina ako je poznato da je razdoblje poluraspada (vrijeme koje je potrebno da se raspadne polovica postojeće mase) 1600 godina.

Rješenje: S obzirom na prirodu zadatka, s t ćemo označavati vrijeme mjereno u godinama. Također, neka je $m(t)$ količina radija koja je prisutna u trenutku t. Prema pretpostavci zadatka, postoji $k > 0$ (faktor proporcionalnosti) takav da je brzina raspadanja radija u svakom trenutku proporcionalna trenutnoj masi radija. Iako je naš problem kontinuiran (odnosno, masa radija i brzina raspada se mijenjaju u svakom trenutku, a ne u vremenskim intervalima) pravimo se na trenutak da se on za *jako male* vremenske intervale ponaša diskretizirano (slično kao što i u slučaju određivanja smjera tangente pratimo sve manje i manje promjene y u odnosu na x). Uvjet zadatka, za *jako mali* vremenski interval Δt, tada možemo zapisati na sljedeći način:

$$\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} = -k \cdot m(t)\,,$$

gdje lijeva strana predstavlja brzinu promjene mase radija, a desna pretpostavku da je ta brzina proporcionalna trenutnoj masi. S obzirom da se radij raspada, masa s vremenom opada, pa zato s desne strane stoji $-k < 0$. Puštanjem limesa $\Delta t \to 0$ dobivamo:

$$m'(t) = -km(t)\,.$$

Kako ovo vrijedi u svakom trenutku t, masa radija $m(t)$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dm}{dt} = -km\,.$$

Također, označimo s $m_0 = m(0) > 0$ početnu masu radija. Uz taj početni uvjet, formirali smo Cauchyjevu zadaću. Primijetimo prije nastavka kako iz prirode problema slijedi da u svakom trenutku $t > 0$ masa radija mora biti nenegativan broj. Riješimo sada gornju zadaću. Diferencijalnu jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli (pritom nije ni potrebno promatrati slučaj $m = 0$ zbog prethodnih komentara):

$$\frac{dm}{m} = -kdt,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\ln|m| = -kt + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

odnosno:

$$|m| = Ce^{-kt}, \qquad C > 0.$$

Zbog zahtjeva $m \geq 0$ vidimo da nam u obzir dolaze samo rješenja oblika:

$$m(t) = Ce^{-kt}, \qquad C > 0.$$

Odredimo sada konstantu C uvrštavanjem početnih uvjeta. Imamo:

$$m_0 = m(0) = Ce^{-k\cdot 0} = C.$$

Dakle, masa radija se ponaša po pravilu:

$$m(t) = m_0 e^{-kt}.$$

Iz druge pretpostavke zadatka, onoj o brzini poluraspada, možemo također odrediti faktor proporcionalnosti k. Preciznije, imamo:

$$\begin{aligned} m(1600) &= \frac{1}{2}m_0 \\ \Leftrightarrow m_0 e^{-1600k} &= \frac{1}{2}m_0 \\ \Leftrightarrow -1600k &= -\ln 2 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{\ln 2}{1600}\,. \end{aligned}$$

Preostaje nam odrediti koliki se postotak p mase radija raspao nakon 100 godina. Računamo

$$\begin{aligned} p &= \frac{m(0) - m(100)}{m(0)} \\ &= 1 - \frac{m(100)}{m(0)} \\ &= 1 - e^{-100k} \\ &= 1 - e^{-\frac{\ln 2}{16}} \\ &= 1 - 2^{-\frac{1}{16}} \approx 0.0424\,. \end{aligned}$$

□

Zadatak 3.15. Svota od 10 000 kn položena je na bankovni račun uz godišnju kamatnu stopu od 8%. Za koliko godina će se početna svota udvostručiti ako je ukamaćivanje kontinuirano i složeno?

Istaknimo da ovdje pod *kontinuirano* i *složeno* ukamaćivanje mislimo da se u svakom (koliko god proizvoljnom malom) vremenskom intervalu kamate pridodaju osnovci i kamata se obračunava na početnu osnovicu i na do tada prispjelu kamatu.

Rješenje: Vrijeme ćemo ponovno mjeriti u godinama. Neka je $D(t)$ svota novca na računu u trenutku t, dana u kunama. Promotrimo opet naš problem u diskretiziranom obliku. Za mali interval Δt svota na računu se prema uvjetu zadatka uveća za $0.08 \cdot \Delta t \cdot D(t)$. Prema tome, svota na računu će u trenutku $t + \Delta t$ iznositi:

$$D(t + \Delta t) = D(t) + 0.08 \cdot \Delta t \cdot D(t)\,,$$

što možemo zapisati i kao:

$$\frac{D(t + \Delta t) - D(t)}{\Delta t} = 0.08 \cdot D(t)\,. \tag{3.56}$$

Puštanjem $\Delta t \to 0$ dobivamo diferencijalnu jednadžbu:

$$D'(t) = 0.08 \cdot D(t)\,.$$

U početnom trenutku na računu se nalazi 10000 kn, što možemo zapisati kao:

$$D(0) = 10000\,.$$

Ovime smo formulirali Cauchyjevu zadaću.
Uočimo da zbog prirode problema vrijedi $D(t) > 0$ i $D'(t) > 0$, za sve $t \geq 0$.

Riješimo sada diferencijalnu jednadžbu separacijom varijabli:

$$\frac{dD}{dt} = 0.08D.$$

Kako je riječ o istoj jednadžbi (samo uz druge oznake) kao i u prethodnom zadatku, možemo odmah zapisati formulu rješenja:

$$D(t) = Ce^{0.08t}, \qquad C > 0.$$

Konstantu C ćemo odrediti uvrštavanjem vrijednosti za početni uvjet $t = 0$:

$$10000 = D(0) = Ce^0 = C,$$

pa je rješenje dano s

$$D(t) = 10000e^{0.08t}.$$

Odredimo sada trenutak t u kojem će se početna svota udvostručiti, odnosno iznositi 20000.

$$\begin{aligned} D(t) &= 20000 \\ \Leftrightarrow 10000e^{0.08t} &= 20000 \\ \Leftrightarrow e^{0.08t} &= 2 \\ \Leftrightarrow 0.08t &= \ln 2 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{25}{2}\ln 2 \approx 8.87\,. \end{aligned}$$

□

Napomena 3.7. Istaknimo da se model korišten u prethodnom zadatku teoretski i u praksi ne koristi (nešto slično se vjerojatno jedino može naći u svijetu kriptovaluta). Naime, neovisno o tome je li ukamaćivanje jednostavno ili složeno, kamata se u pravilu obračunava ipak u diskretnim vremenskim intervalima. Tada puštanjem limesa $\Delta t \to 0$ u (3.56) ne dobivamo egzaktan model, već samo pripadnu aproksimaciju (može se pokazati da je pripadna *relativna pogreška* sve veća što je vremenski interval veći). Preciznije, ako nam nije dopušteno puštanje limesa $\Delta t \to 0$, iz (3.56) možemo samo po Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti zaključiti da postoji $\tilde{t} \in \langle t, t + \Delta t\rangle$ tako da $D'(\tilde{t}\,) = 0.08 \cdot D(t)$.

Za ilustraciju, riješimo prethodni zadatak i uz uvjet da je ukamaćivanje godišnje i složeno. Tada iz (3.56) za $\Delta t = 1$ slijedi

$$D(t+1) = 1.08 \cdot D(t)\,, \quad t \in \mathbb{N}_0$$

(primijetite da nam je sada t cijeli broj kako je problem diskretan, a ne kontinuiran). Iz gornjeg očito vrijedi $D(t) = (1.08)^t D(0) = 10000(1.08)^t$. Potrebno vrijeme t da se svota udvostruči sada dobivamo iz relacije $20000 = 10000(1.08)^t$, pa je $t = \frac{\ln 2}{\ln(1.08)} \approx 9$. Dakle, razlika je od nekih mjesec i pol dana.

Naravno, gornji model ima dovoljno jednostavnu egzaktnu formulu da nema potrebe koristiti aproksimaciju.

Spomenimo još da se ponekad rigorozni model složenog ukamaćivanja svejedno zapisuje u obliku eksponencijalne funkcije, ali tada se u (3.56) umjesto koeficijenta proporcionalnosti 0.08 koristi $\ln(1 + 0.08)$ (vidi [3]).

Zadatak 3.16*. [Domaća zadaća] Bazen ima oblik pravokutnika širine 20m i dužine 100m. U kutu A bazena nalazi se dječak i u ruci drži kraj konopa dugačkog 20m, na čijem je drugom kraju povezan brodić koji je u kutu B bazena. Dječak se kreće duž dulje stranice bazena prema trećem kutu C i vuče brodić tako da je konop stalno napet. Odredite položaj dječaka i brodića u trenutku kad je brodić 12m udaljen od stranice bazena duž koje se kreće dječak, $\overline{AC}$.

Zadatak 3.17 (Domaća zadaća)**.** Nađite krivulju koja prolazi točkom $(1, 2)$, sa svojstvom da je u svakoj točki koeficijent pravca tangente tri puta veći od koeficijenta pravca kroz ishodište i tu točku.

Rješenje: $y(x) = 2x^3$

Zadatak 3.18 (Domaća zadaća)**.** Odrediti sve krivulje sa svojstvom da je površina trokuta, kojeg čine tangenta, pravac kroz diralište paralelan y-osi i x-os, konstantna veličina a^2.

Rješenje: 1. slučaj: $y(x) = \frac{2a^2}{x+C}$, $C \in \mathbb{R}$, 2. slučaj: $y(x) = -\frac{2a^2}{x+C}$, $C \in \mathbb{R}$

Zadatak 3.19 (Domaća zadaća)**.** U populaciji s 500 miševa njih 5 namjerno je zaraženo zaraznom bolešću kako bi se testirao model širenja zaraze koja pretpostavlja da je brzina promjene broja zaraženih miševa proporcionalna produktu broja zaraženih i broja zdravih miševa. Koliko je vremena prema modelu potrebno da se zarazi polovica populacije ako je 24 sata nakon početka eksperimenta pregledom ustanovljeno da se bolešću zarazilo još 5 miševa?

Rješenje: $t \approx 6.5$ dana

Zadatak 3.20 (Domaća zadaća)**.** Na dan kad se rodio, želeći mu osigurati bolju budućnost, brižni roditelji su svom Perici u Zagrebačkoj banci otvorili devizni račun na kojega su položili 10000 eura i oročili na 18 godina. Ako se u međuvremenu na račun ne položi nikakav dodatni iznos, a kamatna stopa je 5 posto godišnje i ukamaćuje se složeno i kontinuirano, kolikom svotom novca će Perica raspolagati na svoj 18. rođendan?

Rješenje: $D(18) = 24596$

Zadatak 3.21 (Domaća zadaća)**.** U posudu u kojoj se nalazi 5 litara čiste vode ulijevamo otopinu soli koncentracije x kg/l brzinom 0.1 l/min. Otopina, koju miješanjem održavamo homogenom izlijeva se iz posude istom brzinom. Nakon 10 minuta, koncentracija soli u posudi dostiže 0.005 kg/l. Za koliko posto bi trebalo povećati koncentraciju otopine koju ulijevamo da bi se isto postiglo za dvostruko kraće vrijeme?

Rješenje: Diferencijalna jednadžba za koncentraciju $c(t)$ glasi $c'(t) = 0.02x - 0.02c(t)$, konačno rješenje je 90.485%

3.2. Homogene jednadžbe

U prethodnoj točki smo vidjeli kako separabilne diferencijalne jednadžbe lako možemo riješiti integriranjem. Štoviše, za njih imamo i prilagođen teorem o postojanju i jedinstvenosti (lokalnog) rješenja (Teorem 3.1).

Iz tog razloga je povoljno proučiti možemo li neke diferencijalne jednadžbe koje nisu izvorno u separabilnom obliku svesti na taj oblik. *Svođenje* obično podrazumijeva izbor nove nepoznate funkcije (ovisne o početnoj) koja zadovoljava novu separabilnu diferencijalnu jednadžbu.

Već smo u prošloj točki vidjeli da jednu takvu situaciju gdje smo diferencijalnu jednadžbu oblika (3.41) uz supstituciju (3.42) sveli na separabilni oblik. U ovom pododjeljku ćemo se baviti *homogenim* jednadžbama i nekim varijantama.

Pripadna supstitucija može imati neke singularitete pa treba biti oprezan da ne propustimo neke rješenja. Preciznije, može se dogoditi da neko rješenje početne jednadžbe ne možemo dobiti u novom obliku, te obratno, da neko rješenje nove jednadžbe nije prihvatljivo za početnu jednadžbu. Međutim, ako se i dogode takve situacije, obično će takva rješenja biti trivijalna i lako ćemo ih uočiti.

Definicija 3.8. Kažemo da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *homogena stupnja* k ako vrijedi:

$$f(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k f(t, x), \qquad (t, x) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Primjer 3.9. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s $f(t, x) = t^3 + x^3$ je homogena i to stupnja $k = 3$. Naime, za proizvoljni $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ i $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo:

$$f(\lambda t, \lambda x) = (\lambda t)^3 + (\lambda x)^3 = \lambda^3(t^3 + x^3) = \lambda^3 f(t, x)\,.$$

Definicija 3.10. Jednadžbu oblika

$$x'(t) = f\Big(\frac{x}{t}\Big) \tag{3.57}$$

nazivamo *homogenom diferencijalnom jednadžbom prvog reda.*

Uočimo da homogena diferencijalna jednadžba nema smisla za $t = 0$, pa je ta točka uvijek izvan otvorenog skupa na kojem promatramo tu jednadžbu.

Prisjetimo se da diferencijalnu jednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$M(t,x)dt + N(t,x)dx = 0\,,$$

kojeg shvaćamo kao

$$M(t,x(t)) + N(t,x(t))x'(t) = 0 \tag{3.58}$$

(vidi Napomenu 3.6). Po sljedećoj lemi, gornja jednadžba će biti homogena ako su funkcije M i N homogene funkcije istog stupnja.

Lema 3.11. *Ako su M i N homogene funkcije istog stupnja, onda za funkciju $f = \frac{M}{N}$ postoji funkcija jedne varijable, g, takva da za $t \neq 0$ vrijedi:*

$$f(t,x) = g\Big(\frac{x}{t}\Big)\,,$$

tj. $f(t,x) = \frac{M(t,x)}{N(t,x)}$ ovisi samo o kvocijentu $\frac{x}{t}$.

Dokaz: Definiramo funkciju jedne varijable $g(x) := \frac{M(1,x)}{N(1,x)}$.

Neka su $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ i $x \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

$$g\Big(\frac{x}{t}\Big) = \frac{M(1,x/t)}{N(1,x/t)} = \frac{t^k M(1,x/t)}{t^k N(1,x/t)} = \frac{M(t,x)}{N(t,x)} = f(t,x)\,,$$

čime je pokazana tvrdnja. □

Istaknimo ipak da diferencijalne jednadžbe (3.58) i $x'(t) = -\frac{M(t,x(t))}{N(t,x(t))}$ nisu nužno ekvivalentne jer u drugoj jednadžbi moramo isključiti rješenja za koja funkcija $t \mapsto N(t,x(t))$ ima barem jednu nultočku.

Uvođenjem supstitucije:

$$x = tu\,,\ \text{tj.}\ u = \frac{x}{t}\,,$$

gdje $u = u(t)$ predstavlja novu nepoznatu funkciju, jednadžbu (3.57) svodimo na diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama. Zaista, deriviranjem po t dobivamo:

$$\frac{dx}{dt} = u + t\frac{du}{dt}\,, \tag{3.59}$$

iz čega uvrštavanjem u jednadžbu (3.57) slijedi:

$$u + t\frac{du}{dt} = f(u)\,,$$

tj.

$$t\frac{du}{dt} = f(u) - u\,,$$

čime smo dobili upravo diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama (po u). Za $f(u) \neq u$, separacijom varijabli dobivamo:

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C\,.$$

Primjer 3.12. Odredite prvi integral jednadžbe

$$tdx = (t + x)dt\,.$$

Rješenje: Jednadžbu zapisujemo u obliku:

$$(t + x)dt - tdx = 0\,.$$

Definirajmo $M(t, x) = t + x$ i $N(t, x) = -t$. Pokažimo najprije da su ove funkcije homogene istog stupnja (kao u Primjeru 3.9). Funkcija M je homogena stupnja 1. S druge strane, za sve $t, x, \lambda \in \mathbb{R}$ imamo:

$$N(\lambda t, \lambda x) = -\lambda t = \lambda N(t, x)\,.$$

Stoga je po Lemi 3.11 naša jednadžba:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t + x}{t} = 1 + \frac{x}{t}$$

homogena jednadžba.

Kao što smo već ranije istaknuli, točka $t = 0$ se ne nalazi u domeni našeg rješenja, pa rješenje tražimo na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$ ili $\langle 0, \infty\rangle$. Uvodimo supstituciju:

$$u = \frac{x}{t}\,,$$

te deriviranjem po t vidimo da u zadovoljava sljedeću jednadžbu (vidi (3.59)):

$$u + t\frac{du}{dt} = 1 + u\,,$$

odnosno:

$$t\frac{du}{dt} = 1\,.$$

Opće rješenje gornje separabilne jednadžbe dano je s

$$u = \ln|t| + \ln C = \ln(C|t|)\,,$$

gdje je $C > 0$ (u gornjem smo konstantu integracije zapisali u obliku $\ln C$ tako da na kraju imamo jednostavniji izraz).

Sada se bitno sjetiti da je zadatak bio pronaći funkciju x, pa vraćanjem supstitucije $x = tu$ konačno dobivamo rješenje u sljedećem obliku:

$$x(t) = tu(t) = t\ln(C|t|)\,, \qquad C > 0\,.$$

□

Za kraj ovog odjeljka poopćimo prethodnu metodu za homogene jednadžbe na sljedeću klasu diferencijalnih jednadžbi:

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right), \tag{3.60}$$

pri čemu su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ te je $(a_i, b_i) \neq (0,0)$, $i = 1,2$. Uočimo da je za $a_1 = b_2 = 0$, $a_2 = b_1 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ (što je dopušten izbor), gornja jednadžba homogena, pa je gornjim zaista dan općenitiji problem od (3.57). S druge strane, za slučaj $(a_1, b_1) = (0,0)$ ili $(a_2, b_2) = (0,0)$ dobivamo upravo jednadžbu oblika (3.41), koju jednostavno svodimo na separabilni oblik, pa zato i nema potrebe da ovaj slučaj uključimo u analizu.

Kao i homogene jednadžbe, jednadžba (3.60) se također može svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama, a pripadna supstitucija ovisi o vrijednosti determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \,.$$

Prisjetimo se, ako je $\Delta \neq 0$, pripadna matrica je regularna, dok je u suprotnom singularna. Daljnju analizu ćemo razdvojiti upravo na ta dva slučaja.

1.) $\Delta \neq 0$.
Uvodimo nove varijable:

$$s = t - \alpha\,, \quad y(s) = x(t) - \beta\,, \tag{3.61}$$

gdje je s nova nezavisna varijabla, a y nova nepoznata funkcija, dok su α, β za sada neodređene konstante.

Po definiciji vrijedi

$$y'(s) = \frac{dy}{ds}(s) = \frac{dx(s+\alpha)}{ds} = x'(s+\alpha) = x'(t)\,.$$

Sada s obzirom na (3.60) dobivamo:

$$\begin{aligned} y'(s) = x'(t) &= f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1(s+\alpha) + b_1(y+\beta) + c_1}{a_2(s+\alpha) + b_2(y+\beta) + c_2}\right) = f\left(\frac{a_1 s + b_1 y + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 s + b_2 y + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right). \end{aligned}$$

Konstante α i β možemo odabrati kao rješenje linearnog sustava:

$$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0\,, \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0\,, \end{cases}$$

(po pretpostavci sustav ima jedinstveno rješenje). Uz tako odabrane konstante α, β jednadžba prelazi u homogenu jednadžbu:

$$y'(s) = f\left(\frac{a_1 s + b_1 y}{a_2 s + b_2 y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{s}}{a_2 + b_2 \frac{y}{s}}\right) =: g\left(\frac{y}{s}\right).$$

Istaknimo da druga jednakost vrijedi samo za $s \neq 0$. Dakle, novodobivenu jednadžbu promatramo na otvorenom skupu koji ne sadrži točku $s = 0$, tj. $t = \alpha$ (iako će možda neka rješenja i biti definirana u toj točki).

2.) $\Delta = 0$.
U ovome slučaju postoji $\lambda \neq 0$ takav da je $(a_2, b_2) = \lambda(a_1, b_1)$ (primijetite da smo za zaključak $\lambda \neq 0$ koristili da je $(a_i, b_i) \neq (0, 0)$, $i = 1, 2$). Sada jednadžba (3.60) glasi:

$$x'(t) = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{\lambda(a_1 t + b_1 x) + c_2}\right),$$

čime smo dobili oblik (3.41). Dakle, supstitucijom $z = a_1 t + b_1 x$ dobivamo

$$\frac{dz}{dt}(t) = a_1 + b_1 \frac{dx}{dt}(t) = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{\lambda z + c_2}\right) =: a_1 + b_1 g(z)\,.$$

Primjer 3.13. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$(2t - 4x + 6)dt + (t + x - 3)dx = 0.$$

Rješenje: Uočimo najprije da funkcija $x(t) = -t + 3$ nije rješenje ove jednadžbe, pa dijeljenjem jednadžbe s $t + x - 3$ dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$x'(t) = -\frac{2t - 4x + 6}{t + x - 3}\,.$$

Kako je ova jednadžba oblika (3.60), primijenjujemo prethodni postupak.

Odredimo pripadnu determinantu Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0\,.$$

Dakle, nalazimo se u prvom slučaju, te tražimo α, β kao u (3.61), tj. rješavamo sustav:

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0, \\ \alpha + \beta - 3 = 0. \end{cases}$$

Rješenje sustava je dano s $\alpha = 1, \beta = 2$, pa uvodimo supstituciju:

$$s = t - 1\,, \qquad y = x - 2\,.$$

Jednadžba tada prelazi u:

$$y'(s) = -\frac{2 - 4\frac{y}{s}}{1 + \frac{y}{s}}\,,$$

što je homogena jednadžba. Stoga uvodimo supstituciju $z = \frac{y}{s}$ te imamo:

$$\begin{aligned} z + s\frac{dz}{ds} &= -\frac{2 - 4z}{1 + z} \\ \Leftrightarrow s\frac{dz}{ds} &= -\frac{z^2 - 3z + 2}{z + 1} \\ \Leftrightarrow s\frac{dz}{ds} &= -\frac{(z - 1)(z - 2)}{z + 1}\,. \end{aligned}$$

Kao što smo ranije istaknuli, ovu diferencijalnu jednadžbu promatramo na otvorenom skupu koji ne sadrži točku $s = 0$ (odnosno $t = 1$). Uočimo da $z = -1$ upravo odgovara slučaju $x = -t + 3$, tako da nemamo problema s nazivnikom desne strane kako smo taj dio već komentirali.

Neka je sada $z \neq 1$ i $z \neq 2$. Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz = -\frac{1}{s}ds\,,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$-2\ln|z-1| + 3\ln|z-2| = -\ln|s| - \ln C\,, \qquad C > 0\,,$$

tj.

$$C|s| = \frac{(z-1)^2}{|z-2|^3}\,, \qquad C > 0\,.$$

Kako je izraz $z - 2$ konstantnog predznaka (slučaj $z = 2$ nije dopušten, a funkcija $s \mapsto z(s)$ je neprekidna), a diferencijalnu jednadžbu promatramo na otvorenom podskupu skupa $\langle -\infty, 0\rangle$ ili $\langle 0, +\infty\rangle$ (s je onda konstatnog predznaka), možemo maknuti apsolutne vrijednosti uz promatranje i negativne konstante:

$$Cs = \frac{(z-1)^2}{(z-2)^3}\,, \qquad C \neq 0\,.$$

Povratkom u polazne varijable, imamo:

$$z = \frac{y}{s} = \frac{x-2}{t-1}\,,$$

pa je

$$z - 1 = \frac{x-t-1}{t-1} \quad \text{i} \quad z - 2 = \frac{x-2t}{t-1}\,.$$

Uvrštavanjem gornjih izraza slijedi:

$$C(t-1) = \frac{\left(\frac{x-t-1}{t-1}\right)^2}{\left(\frac{x-2t}{t-1}\right)^3}\,,$$

čijim sređivanjem konačno dobivamo da su sva rješenja u ovom slučaju dana s

$$C(x-2t)^3 = (x-t-1)^2\,, \qquad C \neq 0\,.$$

Provjerimo još slučajeve $z = 1$ i $z = 2$. Slučaju $z = 1$ odgovara funkcija $x(t) = t + 1$, te se direktnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu može provjeriti da je ona zaista rješenje. Dodatno, ovo rješenje odgovara konstanti $C = 0$ u gornjem općem zapisu.

U slučaju $z = 2$, imamo:

$$2 = \frac{x-2}{t-1}\,,$$

odnosno:

$$x(t) = 2t\,.$$

I ovdje uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo da je time dano rješenje (ovdje se to rješenje ne može dobiti za niti jedan izbor konstante C u općem zapisu - formalno, ovo rješenje odgovara izboru $C = \infty$, odnosno $1/C = 0$). $\square$

Zadaci

Zadatak 3.22. Odredite prvi integral jednadžbe

$$tx' - x = \sqrt{t^2 + x^2}.$$

Rješenje: Za početak, dijeljenjem s t jednadžbu zapisujemo u obliku:

$$x' = \frac{x}{t} + \sqrt{1 + \left(\frac{x}{t}\right)^2}.$$

Primijetimo da je desna strana funkcija od $\frac{x}{t}$: ako stavimo $f(y) = y + \sqrt{1 + y^2}$, tada je desna strana upravo $f\left(\frac{x}{t}\right)$. Iz toga slijedi da je jednadžba homogena pa je svodimo na separabilnu.

Supstitucijom $u = \frac{x}{t}$ dolazimo do jednadžbe:

$$t\frac{du}{dt} = \sqrt{1 + u^2},$$

te separacijom varijabli:

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{dt}{t}.$$

Integriranjem izraza dobivamo:

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \ln|t| + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Odredimo sada integral s lijeve strane. Supstitucijom $u = \operatorname{sh} v$, uz $du = \operatorname{ch} v dv$, integral prelazi u:

$$\int \frac{\operatorname{ch} v dv}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 v}} = \int \frac{\operatorname{ch} v dv}{\operatorname{ch} v} = \int dv = v + C = \operatorname{Arsh} u + C.$$

Dakle, rješenje separirane jednadžbe je:

$$\operatorname{Arsh} u = \ln|t| + C,$$

odnosno:

$$u = \operatorname{sh}(\ln C|t|)) = \frac{C}{2}|t| - \frac{1}{2C|t|}, \qquad C > 0.$$

Vraćanjem supstitucije $x = tu$ konačno dobivamo:

$$x = t\left(\frac{C}{2}|t| - \frac{1}{2C|t|}\right) = \operatorname{sgn} t\left(\frac{C}{2}t^2 - \frac{1}{2C}\right), \qquad C > 0.$$

□

Zadatak 3.23. Odredite prvi integral jednadžbe

$$x' = \frac{2t + x + 1}{4t + 2x + 3}.$$

Rješenje: Za početak, uočimo da je jednadžba oblika (3.60), te da $x = -2t - \frac{3}{2}$ nije rješenje kako za te vrijednosti nije definirana diferencijalna jednadžba.

Računamo Δ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Dakle, nalazimo se u drugom slučaju. Stoga uvodimo supstituciju:

$$z = 2t + x.$$

Deriviranjem po t dobivamo:

$$\frac{dz}{dt} = 2 + \frac{dx}{dt} = 2 + \frac{z+1}{2z+3} = \frac{5z+7}{2z+3}\,.$$

Neka je sada $z \neq -\frac{7}{5}$. Separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{2z+3}{5z+7}dz = dt,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\frac{2}{5}z + \frac{1}{25}\ln|5z+7| = t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Konačno, povratkom u polazne varijable dobivamo:

$$10t + 5x + 7 = Ce^{5t-10x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Provjerimo još i slučaj $z = -\frac{7}{5}$. Iz toga slijedi:

$$-\frac{7}{5} = 2t + x,$$

odnosno:

$$x(t) = -2t - \frac{7}{5},$$

što zaista jest rješenje. □

Zadatak 3.24. Odredite prve integrale sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $t^2 + x^2 - 2txx' = 0$,

b) $x' = e^{\frac{x}{t}} + \frac{x}{t}$,

c) $tx' - x = t\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{t}$,

d) $(x + \sqrt{tx})dt = tdx$,

e) $tx' - x = (t+x)\ln\frac{t+x}{t}$,

f) $tx' = x\cos\ln\frac{x}{t}$,

g) $x' = \frac{x - t\sqrt{\frac{x}{t}-1}}{t}$.

Rješenje: a) $x^2 = t^2 + Ct$, $C \in \mathbb{R}$ b) $x = -t\ln(\ln C - \ln|t|))$, $C > 0$ c) $x = t\arcsin(Ct)$, $C \in \mathbb{R}$ d) $x = \frac{t}{4}\ln^2(C|t|)$, $C > 0$ e) $x = te^{Ct} - t$, $C \in \mathbb{R}$ f) $x = te^{2\,\mathrm{arccot}(C+\ln|t|)}$, $C \in \mathbb{R}$, $x = te^{2k\pi}, k \in \mathbb{Z}$ g) $x = t + t(\frac{-\ln|t|+C}{2})^2$, $C \in \mathbb{R}$, x=t

Zadatak 3.25. Odredite prve integrale sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $(2t+3x+1)dt+(3t+4x-1)dx=0$, c) $x'=2\left(\frac{x+2}{t+x-1}\right)^2$,

b) $(t+x+1)dt+(2t+2x-1)dx=0$, d) $(x'+1)\ln\frac{x+t}{t+3}=\frac{x+t}{t+3}$.

Rješenje: a) $x(t)=\frac{1}{4}(1-3t)\pm\frac{1}{4}\sqrt{C-8(t^2+t)+(3t-1)^2}$; b) $t+x-2=Ce^{-\frac{1}{3}(t+2x)}$, $C\in\mathbb{R}$; c) $\ln(|x+2|)+2\arctan(\frac{x+2}{t-3})=C$, $C\in\mathbb{R}$; d) $-x+(x+t)\ln(\frac{x+t}{t+3})-t=C$, $C\in\mathbb{R}$

4. Linearne jednadžbe

Do sada smo promatratli običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:

$$u'(x) = f(x, u(x)) \ , \tag{4.1}$$

ili pripadnu Cacuhyjevu zadaću kada dodatno postavljamo i početni uvjet:

$$u(x_0) = u_0 \ . \tag{4.2}$$

Picardov teorem (Teorem 2.4) nam govori o postojanju i jedinstvenosti lokalnog rješenja. U posebnom slučaju separirane desne strane

$$f(x, u) = g(x)h(u) \ ,$$

vidjeli smo još jedan takav rezultat (Teorem 3.1) koji nije posljedica spomenutog Picardovog teorema.

Separabilne jednadžbe su posebno značajne jer smo naučili u prethodnom odjeljku kako se one mogu jednostavno riješiti integriranjem, odnosno kako odrediti prvi integral pripadne diferencijalne jednadžbe. Štoviše, vidjeli smo i kako neke diferencijalne jednadžbe koje nisu separabilne svesti, uz pogodnu zamjenu varijabli, na diferencijalne jednadžbe u separiranom obliku, a time ih i riješiti. Preciznije, ovaj postupak možemo primijeniti za homogene jednadžbe (vidi (3.57)):

$$f(x, u) = g\Big(\frac{u}{x}\Big) \ ,$$

jednadžbe kojoj je desna strana oblika:

$$f(x, u) = g(ax + bu + c) \ ,$$

(vidi (3.41)) za neke konstante $a, b, c \in \mathbb{R}$ (slučaj $a = 0$ ili $b = 0$ je trivijalan jer je tada dana jednadžba već separabilna), te za najopćenitiji slučaj (obuhvaća oba prethodna; vidi (3.60))

$$f\Big(\frac{a_1x + b_1u + c_1}{a_2x + b_2u + c_2}\Big) \ ,$$

za neke $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ takve da $(a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$ (iako se obično uzima $(a_1, b_1) \neq (0, 0)$ i $(a_2, b_2) \neq (0, 0)$ jer se inače nalazimo u prethodnom slučaju).

U ovom odjeljku promatramo diferencijalnu jednadžbu (4.1) (odnosno pripadnu Cacuhyjevu zadaću (4.1)–(4.2)) uz dodatnu pretpostavku na desnu stranu

$$f(x, u) = a(x)u + b(x) \ , \tag{4.3}$$

pri čemu su a, b zadane funkcije. Takve diferencijalne jednadžbe nazivamo *linearnim diferencijalnim jednadžbama* (prvog reda). Ako je dodatno $b \equiv 0$, tada kažemo da je linearna jednadžba *homogena*. Za sve obične diferencijalne jednadžbe prvog reda (4.1) za koje desna strana f nije oblika (4.3) kažemo da su *nelinearne*.

Napomena 4.1. Ovdje je bitno istaknuti da razlikujemo pojmove *homogena diferencijalna jednadžba* (što odgovara jednadžbi (3.57)) i *homogena linearna diferencijalna jednadžba*.

Ako je u kontekstu jasno da pričamo o svojstvima linearnih diferencijalnih jednadžbi, tada ćemo ponekad biti neprecizni i samo reći da je jednadžba homogena.

Često linearne diferencijalne jednadžbe susrećemo u ekvivalentnom obliku

$$c_0(x)u'(x) + c_1(x)u(x) = c_2(x)\,,$$

pri čemu onda mora vrijediti $c_0 \neq 0$ u svakoj točki promatranog intervala (jer inače nemamo diferencijalnu jednadžbu, već algebarsku).

Uz pretpostavku da su a, b neprekidne funkcije na nekom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, postojanje i jedinstvenost lokalnog rješenja jednostavno slijedi primjenom Picardovog teorema. Naime, u tom slučaju je očito f neprekidna na $I \times \mathbb{R}$, te je derivabilna po drugoj varijabli. Kako je $\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = a(x)$ očito također neprekidna na $I \times \mathbb{R}$, po Napomeni 2.7 slijedi da su ispunjene pretpostavke Picardovog teorema za svaku točku $(x_0, u_0) \in I \times \mathbb{R}$.

Pitanje je kako odrediti to jedinstveno rješenje. Primijetimo da je u slučaju konstantnih funkcija a i b jednadžba separabilna (pa je onda znamo riješiti), te također za $a \equiv 0$ ili $b \equiv 0$.

Krenimo onda od slučaja homogene jednadžbe, odnosno $a \in C(I)$ i $b \equiv 0$, te riješimo jednadžbu metodom prikladnom za separabilne jednadžbe. Prateći oznake prethodnog odjeljka (vidi (3.1)), u ovom slučaju imamo $g(x) = a(x)$ i $h(u) = u$. Dakle, jedini je problem kada je $u_0 = 0$, ali iz jedinstvenosti rješenje (to imamo po Picardovom teoremu) znamo da je onda jedino rješenje $u \equiv 0$. S druge strane, po Teoremu 3.1 znamo da će za $u_0 > 0$ ($u_0 < 0$) rješenje (lokalno) stalno biti pozitivno (negativno).

Idemo sada na rješavanje za slučaj $u_0 \neq 0$. Dijeljenjem jednadžbe s $u(x)$ i integriranjem dobivamo:

$$\int_{u_0}^{u(x)} \frac{dv}{v} = \int_{x_0}^{x} a(y)\,dy\,,$$

(na lijevoj strani smo primijenili zamjenu varijabli $v = u(x)$).

Integral na lijevoj strani jednak je:

$$\ln|u(x)| - \ln|u_0| = \ln\left|\frac{u(x)}{u_0}\right| = \ln\frac{u(x)}{u_0}\,,$$

pri čemu smo u posljednjoj jednakosti koristili da su (barem lokalno) $u(x)$ i u_0 istog predznaka. Dakle, vraćanjem u gornju jednakost i djelovanjem eksponencijalnom funkcijom, konačno dobivamo da je rješenje homogene zadaće dano s:

$$u_h(x) = u_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy}\,, \tag{4.4}$$

odnosno vrijedi (provjerite!):

$$\begin{aligned} u_h'(x) &= a(x)u_h(x)\,, \quad x \in I\,, \\ u_h(x_0) &= u_0\,. \end{aligned}$$

Uočimo da je prethodna formula valjana i za slučaj $u_0 = 0$ (dobivamo $u_h \equiv 0$), iako smo u samom postupku rješavanja pretpostavili $u_0 \neq 0$.

Promotrimo sada općeniti slučaj $b \not\equiv 0$ kojeg nazivamo *nehomogenim* slučajem. Neka su $a, b \in C(I)$. Budući da smo ranije već ustvrdili da rješenje zadaće (4.1)–(4.2) postoji i jedinstveno je, preostalo je samo konstruirati (pronaći) jedno rješenje. U traženju rješenja koristimo metodu *varijacije konstanti*, odnosno pokušavamo odrediti funkciju λ takvu da funkcija:

$$u(x) = \lambda(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} \tag{4.5}$$

bude rješenje zadaće. Zapravo smo oblik gornje funkcije dobili tako da smo *varirali* konstantu u_0 (tj. umjesto nje smo stavili varijabilnu funkciju) u formuli za rješenje homogene jednadžbe (4.4).

Izvedimo uvjete koje funkcija λ mora zadovoljavati da bi (4.5) bilo rješenje zadaće (4.1)–(4.2). Iz početnog uvjeta dobivamo:

$$u_0 = u(x_0) = \lambda(x_0) e^{\int_{x_0}^{x_0} a(y)\,dy} = \lambda(x_0)\,. \tag{4.6}$$

Derivacija funkcije (4.5) glasi:

$$u'(x) = \lambda'(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} + \lambda(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} a(x) = \lambda'(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} + a(x) u(x)\ ,$$

pa uvrštavanjem u diferencijalnu jednadžbu dobivamo:

$$\lambda'(x) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} = b(x)\ ,$$

odnosno:

$$\lambda'(x) = b(x) e^{-\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy}\ . \tag{4.7}$$

Iz (4.6)–(4.7) vidimo da je λ nužno rješenje Cauchyjeve zadaće u kojoj se diferencijalna jednadžba prvog reda jednostavno rješava integriranjem (desna strana ne ovisi o nepoznatoj funkciji; vidi Napomenu 1.3(b)). Dakle, λ je dan s:

$$\lambda(x) = u_0 + \int_{x_0}^{x} b(z) e^{-\int_{x_0}^{z} a(y)\,dy}\,dz\ ,$$

pa uvrštavanjem u (4.5) konačno dobivamo:

$$\begin{aligned} u(x) &= u_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} + e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} \int_{x_0}^{x} b(z) e^{-\int_{x_0}^{z} a(y)\,dy}\,dz && (4.8)\\ &= u_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} + \int_{x_0}^{x} b(z) e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy + \int_{z}^{x_0} a(y)\,dy}\,dz \\ &= u_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(y)\,dy} + \int_{x_0}^{x} b(z) e^{\int_{z}^{x} a(y)\,dy}\,dz\ . && (4.9) \end{aligned}$$

Uočimo da prvi sumand u (4.9) odgovara rješenju pripadne homogene zadaće, dok je drugi sumand, kojeg ćemo označiti s $u_p(x)$, rješenje (provjerite!) nehomogene diferencijalne jednadžbe i homogenog početnog uvjeta, tj. vrijedi:

$$\begin{aligned} u_p'(x) &= a(x) u_p(x) + b(x)\ , \quad x \in I\,, \\ u_p(x_0) &= 0\ . \end{aligned}$$

Istu strukturu rješenja smo mogli ranije već vidjeti kod (algebarskih) nehomogenih linearnih sustava (vidi [2, Propozicija 4.1.10]).

Sada je lako provjeriti da je s (4.9) zaista dano rješenje zadaće (4.1)–(4.2) (uz pretpostavku (4.3)). Naime,

$$u(x_0) = u_h(x_0) + u_p(x_0) = u_0 + 0 = u_0 \,,$$

te za $x \in I$ vrijedi:

$$u'(x) = u_h'(x) + u_p'(x) = a(x)u_h(x) + a(x)u_p(x) + b(x) = a(x)u(x) + b(x) \,.$$

Nadalje, primijetimo da je rješenje (4.9) definirano na cijelom intervalu I (na cijeloj domeni funkcija a i b). Sada se slično kao u Primjeru 2.6 može pokazati da je s (4.9) dano jedinstveno *globalno* rješenje zadaće (4.1)–(4.2) (uz pretpostavku (4.3)). Zapišimo ove zaključke u obliku teorema.

Teorem 4.2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te neka su $a, b \in C(I)$. Tada za svake $x_0 \in I$ i $u_0 \in \mathbb{R}$ Cauchyjeva zadaća (4.1)–(4.2) s desnom stranom danom (4.3) ima jedinstveno rješenje na cijelom intervalu I koje je dano s (4.9).*

Napomena 4.3. a) Iz formule za rješenje (4.9) se jasno vidi da je za $u_0 \geq 0$ i nenegativnu funkciju b, rješenje također nenegativno *desno* od točke x_0, tj. $u(x) \geq 0$, $I \ni x \geq x_0$. Međutim, za $x < x_0$ možemo imati $u(x) < 0$ jer je tada u vanjskom integralu partikularnog rješenja (drugi sumand u (4.9)) gornja granica integrala manja od donje pa dobivamo minus predznak.

b) Pri rješavanju zadataka je obično prikladnije i jednostavnije ponoviti cijeli postupak varijacije konstanti (ili koristiti neku drugu sličnu metodu), nego koristiti izvedenu eksplicitnu formulu za rješenje. Naime, u formuli (4.9) se nerijetko javljaju zahtjevni integrali i komplicirani izrazi koji se nakon sređivanja svode na znatno jednostavniji oblik, pa taj tehnički zahtjevan međukorak izbjegavamo direktnom primjenom metode varijacije konstanti.

Uvjerite se sami u ovo tako da pokušate riješiti neke zadatke i metodom varijacije konstanti i direktnom primjenom formule (4.9).

c) Ako se traže sva rješenja linearne diferencijalne jednadžbe (nije zadan počeni uvjet), tada se u formuli (4.8) umjesto u_0 koristi proizvoljna konstanta $C \in \mathbb{R}$, a određeni integrali se mogu zamijeniti s proizvoljnim pripadnim primitivnim funkcijama, tj. s neodređenima integralima. Dakle, opće rješenje je dano s

$$e^{\int a(x)\,dx}\Big(C + \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\Big) \,. \tag{4.10}$$

Primjer 4.4. a) Promotrimo Cauchyjevu zadaću:

$$u' = u + 1 \,, \quad u(0) = 1 \,.$$

Pripadna diferencijalna jednadžba je nehomogena linearna, ali i separabilna, pa metodom prikladnom za separabilne jednadžbe jednostavno dobivamo da je

jedinstveno rješenje dano s $u(x) = 2e^x - 1$. Uvjerimo se da ćemo isti rezultat dobiti primjenom formule (4.9).

U našem slučaju su i a i b konstantne funkcije s vrijednošću 1, dok je $x_0 = 0$ i $u_0 = 1$. Dakle, imamo:

$$u(x) = e^{\int_0^x dy} + \int_0^x e^{\int_z^x dy}\, dz = e^x + e^x \int_0^x e^{-z}\, dz = e^x + e^x(-e^{-x} + 1) = 2e^x - 1 \ .$$

Naravno, kao što smo već istaknuli, formula (4.9) obično nije najprikladniji način za dobivanje rješenja.

b) Pogledajmo još jedan primjer na kojem ćemo još jednom ilustrirati kako se primijenjuje metoda varijacije konstanti. Neka je dana Cauchyjeva zadaća:

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} + 1 \ , \quad u(1) = 3 \ .$$

Pripadna diferencijalna jednadžba nije separabilna, međutim, ona je homogena pa je s odgovarajućom supstitucijom možemo svesti na separabilnu jednadžbu. Za vježbu riješite zadaću ovom metodom, a mi ćemo sada prezentirati rješavanje metodom varijacije konstanti.

Prvi korak je odrediti sva rješenja pripadne homogene jednadžbe

$$u'(x) = \frac{u(x)}{x} \ .$$

Dijeljenjem s $u(x)$ i integriranjem dobivamo da su sva rješenja oblika Cx, za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$.

U drugom koraku umjesto konstante C promatramo funkciju $x \mapsto C(x)$, te tražimo funkciju C takvu da $u(x) = C(x)x$ bude rješenje gornje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo $C'(x)x + C(x) = C(x) + 1$, iz čega slijedi:

$$C'(x)x = 1 \ .$$

Ovdje je bitno primijetiti da se u dobivenoj diferencijalnoj jednadžbi ne javlja C, već samo C'. To se uvijek mora dogoditi tako da ako to nije slučaj, očito se negdje nalazi pogreška u računu.

Dijeljenjem gornje jednadžbe s x i integriranjem dobivamo da je C nužno oblika $C(x) = \ln x + D$, za neku konstantu $D \in \mathbb{R}$. Ovdje nismo stavili apsolutnu vrijednost u argument funkcije ln kako je iz početnog uvjeta ($x_0 = 1 > 0$) jasno da jednadžbu rješavamo za $x > 0$. Dakle, rješenje početne nehomogene linearne jednadžbe je nužno oblika $u(x) = Dx + x \ln x$.

U posljednjem, trećem koraku, određujemo konstantu D iz početnog uvjeta:

$$3 = u(1) = D + 0 \implies D = 3 \ .$$

Dakle, jedinstveno rješenje je dano s $u(x) = 3x + x\ln x$ i definirano je na cijelom intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$ (što je u skladu s Teoremom 4.2).

Da je zadatak bio odrediti sva rješenja pripadne nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe, tj. nikakav početni uvjet nije bio zadan, tada bismo stali na drugom koraku, s tim da sada ipak moramo uzeti u obzir i $x < 0$, tako da su sva rješenja dana s

$u(x) = Dx + x\ln|x|$, $D \in \mathbb{R}$.

Zadaci

Zadatak 4.1. Odredite opće rješenje jednadžbe:

$$2t(t^2 + x)dt = dx.$$

Rješenje: Zapišimo jednadžbu najprije u sljedećem obliku:

$$x' - 2tx = 2t^3. \tag{4.11}$$

Vidimo kako je riječ o linearnoj jednadžbi, pa krećemo s rješavanjem pripadne homogene jednadžbe:

$$x' - 2tx = 0\,.$$

Primijetimo kako je funkcija $x = 0$ (jedno) rješenje te jednadžbe. Za $x \neq 0$, separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{dx}{x} = 2tdt\,,$$

odakle integriranjem i primjenom eksponencijalne funkcije slijedi:

$$x(t) = Ce^{t^2}, \qquad C \in \mathbb{R}\,.$$

Pretpostavimo sada *variranjem konstanti* da je opće rješenje početne jednadžbe (4.11) oblika:

$$x(t) = C(t)e^{t^2}\,,$$

za neku funkciju $t \mapsto C(t)$. Uvrštavanjem u (4.11) dobivamo:

$$C'(t)e^{t^2} = 2t^3\,,$$

odnosno:

$$C'(t) = 2t^3e^{-t^2}\,.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\begin{aligned}
C(t) &= \int 2t^3e^{-t^2}dt = \begin{bmatrix} u = t^2 \\ du = 2tdt \end{bmatrix} \\
&= \int ue^{-u}du \\
&= -ue^{-u} + \int e^{-u}du \\
&= -(u+1)e^{-u} + C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{R}, \\
&= -(t^2+1)e^{-t^2} + C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe (4.11) je oblika:

$$x(t) = C(t)e^{t^2} = C_0 e^{t^2} - t^2 - 1, \qquad C_0 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 4.2. Odredite opće rješenje jednadžbe

$$(t-1)x' + tx = e^{-t}.$$

Rješenje: Primijetimo najprije kako je jednadžba već zapisana u željenom obliku. Rješavanje onda započinjemo s pripadnom homogenom jednadžbom:

$$(t-1)x' + tx = 0\,.$$

Funkcija $x = 0$ je očito jedno rješenje homogene jednadžbe. Separacijom varijabli na domeni koja ne uključuje točku $t = 1$, za $x \neq 0$ dobivamo:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{tdt}{t-1}\,.$$

Integriranjem s lijeve strane dobivamo $\ln|x|$, dok s desne strane imamo

$$\int \frac{tdt}{t-1} = \int dt + \int \frac{dt}{t-1} = t + \ln|t-1| + C\,.$$

Dakle, sva rješenja homogene jednadžbe dana su s:

$$\ln|x| = -t - \ln|t-1| + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

odnosno:

$$x = C\frac{e^{-t}}{t-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Sada pretpostavljamo rješenje u obliku:

$$x(t) = C(t)\frac{e^{-t}}{t-1}\,,$$

te tražimo funkciju C. Deriviranjem i uvrštavanjem u početnu jednadžbu dobivamo

$$(t-1)\left(C'(t)\frac{e^{-t}}{t-1} - C(t)\frac{e^{-t}}{t-1} - C(t)\frac{e^{-t}}{(t-1)^2}\right) + t\left(C(t)\frac{e^{-t}}{t-1}\right) = e^{-t}\,,$$

odakle sređivanjem slijedi:

$$C'(t) = 1,$$

to jest:

$$C(t) = t + C_0, \qquad C_0 \in \mathbb{R}.$$

Konačno, opće rješenje jednadžbe dano je s:

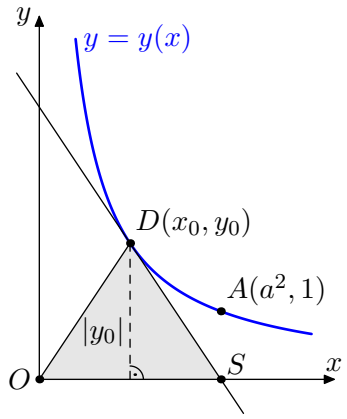
$$x(t) = (t + C)\frac{e^{-t}}{t-1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 4.3. Odredite jednadžbu krivulje koja prolazi točkom $A(a^2, 1)$ $(a > 0)$ i za koju vrijedi da je u svakoj njenoj točki površina trokuta kojeg određuje tangenta u toj točki, os apscisa i radijvektor te točke konstanta iznosa a^2.

Rješenje: Tražimo krivulju $y = y(x)$. Diralište tangente označavamo s $D(x_0, y_0)$. Jednadžba tangente na krivulju u točki D dana je s:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$



Slika 11: Skica tražene krivulje.

Odredimo točku S koja je dana kao sjecište tangete i x-osi (vidi Sliku 11):

$$-y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

iz čega dobivamo da je x komponenta točke S dana s:

$$x = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}\,.$$

Primijetimo da mora vrijediti $y'(x_0) \neq 0$, jer se inače ne može ispuniti uvjet zadatka (tangeta ne siječe apscisu). Dakle, točka S je dana s:

$$S\Big(\frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)}, 0\Big)\,.$$

Ovdje primjećujemo da je $y_0 > 0$ jer je $y(a^2) = 1 > 0$, a $y = y(x)$ ne može biti 0 zbog uvjeta zadatka jer je y konstantnog predznaka.

Uvjet zadatka glasi: $P_{\triangle OSD} = a^2$, $a > 0$, što je ekvivalentno s:

$$\Big(\forall D(x_0, y_0) \quad \text{krivulje}\Big) \quad \left|\frac{x_0 y'(x_0) - y_0}{y'(x_0)}\frac{y_0}{2}\right| = a^2.$$

Dakle, rješavamo jednadžbu:

$$\left|xy - \frac{y^2}{y'}\right| = 2a^2.$$

Ovdje je bitno napomenuti da je izraz pod apsolutnim vrijednostima stalno veći ili manji od nule jer ako je jednak nuli, uvjet zadatka ne može biti zadovoljen. Stoga je taj izraz stalnog predznaka pa imamo samo dvije mogućnosti:

$$xy - \frac{y^2}{y'} = 2a^2 \qquad \text{ili} \qquad xy - \frac{y^2}{y'} = -2a^2\,.$$

Lako se vidi da je jednadžba linearna po x, pa ako zapišemo jednadžbu u terminima funkcije $x = x(y)$ (vidi Napomenu 3.6), dobit ćemo linearnu jednadžbu po x. Ovim pristupom ne gubimo nikakvu općenitost jer smo već ranije komentirali da zbog uvjeta zadatka funkcija $x \mapsto y'(x)$ ne smije imati nultočke.

Sada razdvajamo analizu na dva slučaja.

a) $xy - \frac{y^2}{y'} > 0$. Imamo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{2a^2}{y^2}.$$

Ova je jednadžba linearna po x uz $a(y) = \frac{1}{y}$ te $b(y) = -\frac{2a^2}{y^2}$. Vrijedi:

$$\int a(y)dy = \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C\,.$$

Opće rješenje linearne jednadžbe dano je s:

$$x = e^{\int a(y)dy}\Big(\int e^{-\int a(y)dy} b(y)dy + C\Big),\ C \in \mathbb{R},$$

iz čega slijedi:

$$x = e^{\ln y}\Big(\int e^{-\ln y}\Big(-\frac{2a^2}{y^2}\Big)dy + C\Big),\ C \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

Sada iz (4.12) dobivamo:

$$x = y\Big(-2a^2\frac{y^{-2}}{-2} + C\Big),\ C \in \mathbb{R},$$

pa imamo:

$$x = \frac{a^2}{y} + Cy,\ C \in \mathbb{R}.$$

Jednadžba tražene krivulje koja prolazi točkom $A(a^2, 1)$, $a > 0$, jest partikularno rješenje za koje vrijedi početni uvjet $y(a^2) = 1$. Dakle, imamo:

$$a^2 = a^2 + C,$$

te stoga $C = 0$. Tražena krivulja je:

$$xy = a^2.$$

b) $xy - \frac{y^2}{y'} < 0$. Imamo sljedeću jednadžbu:

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = \frac{2a^2}{y^2}\,.$$

Imamo linearnu jednadžbu po x uz $a(y) = \frac{1}{y}$ te $b(y) = \frac{2a^2}{y^2}$ (jedina razlika u odnosu na prethodni slučaj je u predznaku funkcije b). Dakle, opće rješenje ove linearne jednadžbe je dano s

$$x = e^{\ln y}\Big(\int e^{-\ln y}\Big(\frac{2a^2}{y^2}\Big)dy + C\Big),\ C \in \mathbb{R}\,,$$

iz čega slijedi:

$$x = y\Big(-\frac{a^2}{y^2} + C\Big),\ C \in \mathbb{R}\,,$$

odnosno:

$$x = -\frac{a^2}{y} + Cy,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Jednadžba tražene krivulje koja prolazi točkom $A(a^2, 1)$, $a > 0$, jest partikularno rješenje za koje vrijedi početni uvjet $y(a^2) = 1$. Dakle, konstantu C dobivamo iz:

$$a^2 = -a^2 + C\,,$$

iz čega slijedi da je $C = 2a^2$. Tražena krivulja je stoga dana u sljedećem obliku:

$$x = -\frac{a^2}{y} + 2a^2 y\,.$$

$\square$

5. Nelinearne jednadžbe koje se svode na linearne

5.1. Bernoullijeva jednadžba

Bernoullijeva diferencijalna jednadžba je nelinearna obična diferencijalna jednadžba prvog reda oblika

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x(t)^\alpha \ , \quad t \in I \ , \tag{5.1}$$

pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te su $p, q : I \to \mathbb{R}$ dane funkcije. Slučajeve $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ smo isključili jer je u tom slučaju jednadžba linearna, pa po Teoremu 4.2 znamo sve o postojanju i jedinstvenosti rješenja.

Pogledajmo što možemo reći o postojanju i jedinstvenosti rješenja gornje jednadžbe. Za početak uočimo da je $x \equiv 0$ uvijek jedno rješenje, dok za funkcije koje poprimaju negativne vrijednosti gornja jednadžba nije dobro definirana za sve $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ (npr. za $\alpha = \frac{1}{2}$ očito mora biti $x(t) \geq 0$ u svakoj točki t domene funkcije). Stoga ćemo se fokusirati na traženje pozitivnih rješenja.

Ako označimo $f(t,x) = p(t)x + q(t)x^\alpha$, tada jednadžba (5.1) glasi $x'(t) = f(t, x(t))$. Uz pretpostavku $p, q \in C(I)$, funkcija f je očito neprekidna na $I \times \langle 0, +\infty\rangle$ za sve promatrane vrijednosti parametra α (za $x \leq 0$ u nekim slučajevima funkcija nije niti definirana). Nadalje, postoji parcijalna derivacija po drugoj varijabli x na $I \times \langle 0, +\infty\rangle$, te je dana s $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = p(t) + \alpha q(t) x^{\alpha-1}$. Jasno se vidi da je $\frac{\partial f}{\partial x}$ neprekidna na $I \times \langle 0, +\infty\rangle$, dok za $\alpha < 1$ je ne možemo proširiti za $x = 0$. Dakle, po Napomeni 2.7 vidimo da su za svaki $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ i sve $(t_0, x_0) \in I \times \langle 0, +\infty\rangle$ ispunjene pretpostavke Picardovog teorema. Zapišimo ove zaključke u obliku korolara.

Korolar 5.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te neka su $p, q \in C(I)$. Tada za svaki $t_0 \in I$ i $x_0 \in \langle 0, +\infty\rangle$ postoji interval $\tilde{I} \subseteq I$ za koji jednadžba (5.1) uz početni uvjet $x(t_0) = x_0$ ima jedinstveno pozitivno rješenje na $\tilde{I}$.*

U prethodnoj analizi smo istaknuli da uvjet $x_0 = 0$ može biti problematičan što se tiče jedinstvenosti rješenja. Zaista, u Primjeru 2.10 pripadna jednadžba je Bernoullijeva (uz $\alpha = \frac{1}{3}$), te je pokazano da postoje barem dva različita rješenja.

Međutim, već smo ranije istaknuli da nam je cilj pronaći (sva) pozitivna rješenja. Sada ćemo prezentirati metodu rješavanja koja se bazira na prikladnoj supstituciji uz koju jednadžbu svodimo na linearnu.

Neka je $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ proizvoljan i neka je $x \in C^1(\tilde{I})$ neko pozitivno rješenje jednadžbe (5.1). Tada je s

$$u := x^{1-\alpha} \ , \tag{5.2}$$

dobro definirana funkcija klase C^1 na $\tilde{I}$. Njenim deriviranjem dobivamo (ne pišemo argument t):

$$u' = (1-\alpha)x^{-\alpha}x' \ .$$

Vratimo se sad na jednadžbu (5.1) i pomnožimo je s $(1-\alpha)x^{-\alpha}$ (što je očito različito od nule za svaki $t \in \tilde{I}$), čime dobivamo:

$$(1-\alpha)x^{-\alpha}x' = p(1-\alpha)x^{1-\alpha} + (1-\alpha)q \ .$$

Sada prepoznamo izraze koji odgovaraju funkcijama u i u' pa konačno dobivamo da u zadovoljava sljedeću nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda:

$$u'(t) = (1-\alpha)p(t)u(t) + (1-\alpha)q(t)\ , \quad t \in \tilde{I}\ . \tag{5.3}$$

Dakle, sva pozitivna rješenja Bernoullijeve jednadžbe (5.1) dobivamo tako da odredimo sva rješenja u linearne jednadžbe (5.3) za koja je s $u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ dobro definirana pozitivna funkcija. Pripadna pozitivna rješenja Bernoullijeve jednadžbe potom dobivamo s:

$$x = u^{\frac{1}{1-\alpha}}\ .$$

Naravno, ako je dodatno dan i početni uvjet, tada tražimo samo jedno (jedinstveno) rješenje Bernoullijeve zadaće. Evaluiranje početnog uvjeta se može napraviti na samom kraju (dakle nakon što opišemo sva rješenja), a može i kod rješavanja linearne jednadžbe (5.3) pri čemu (uvažavajući supstituciju (5.2)) za početni uvjet uzimamo $u(t_0) = x(t_0)^{1-\alpha} = x_0^{1-\alpha}$.

U gornjem postupku traženja pozitivnih rješenja najbitnije je zapamtiti oblik supstitucije (5.2), a onda ostatak ide logično. Pamtiti točan oblik jedndžbe (5.3) nije potrebno jer će se pri rješavanju pripadnih zadataka očekivati da se provede cijeli gornji postupak. Ponekad će se, ovisno o tekstu zadatka, tražiti i da se, uz sva pozitivna rješenja, također istakne i trivijalno rješenje $x \equiv 0$.

Napomena 5.2. Primijetimo da za $\alpha = 2$ (što će biti slučaj kod Riccatijeve jednadžbe) u Korolaru 5.1 imamo jedinstvenost rješenja za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$. Tada je pripadno rješenje ili stalnog predznaka ili konstantna funkcija s vrijednosti 0 (obrazložite!).

Nadalje, u ovom slučaju je supstitucija (5.2) dobro definirana i za negativna rješenja pa gornjim postupkom možemo dobiti sva netrivijalna rješenja (i pozitivna i negativna).

Zadaci

Zadatak 5.1. Odredite prvi integral Bernoullijeve jednadžbe:

$$t^2y' + 2ty - y^3 = 0.$$

Rješenje: Za $t \neq 0$ dijelimo s t^2 i dobivamo:

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{1}{t^2}y^3.$$

Za $t = 0$ imamo $y(0) = 0$, a taj uvjet zadovoljava trivijalno rješenje: $y(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$.

Netrivijalno rješenje $y \neq 0$ mora biti različito od 0 u svim točkama (zbog jedinstvenosti), pa $t = 0$ nije u domeni netrivijalnog rješenja.

Koristimo supstituciju $u = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y^2}$ pa imamo $u'(t) = -\frac{2}{y^3}y'(t)$ (s obzirom na (5.1) je $p(t) = -\frac{2}{t}$, $q(t) = \frac{1}{t^2}$, $\alpha = 3$).

Za $y \neq 0$ dijelimo jednadžbu s y^3 (tj. sa y^α):

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{t}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{t^2}\ .$$

Sada dobivamo linearnu jednadžbu:

$$-\frac{1}{2}u' + \frac{2}{t}u = \frac{1}{t^2}\,. \tag{5.4}$$

Jednadžbu (5.4) zapisujemo na sljedeći način:

$$u' - \frac{4}{t}u = -\frac{2}{t^2}\,. \tag{5.5}$$

- Homogena jednadžba:

$$u' - \frac{4}{t}u = 0. \tag{5.6}$$

  Sada iz (5.6) imamo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{4u}{t}.$$

  Dobivamo jednadžbu:

$$\frac{du}{u} = 4\frac{dt}{t}. \tag{5.7}$$

  Integriramo li jednadžbu (5.7), dobivamo:

$$\ln|u| = 4\ln|t| + \ln C,\ C > 0,$$

  iz čega slijedi:

$$|u| = C|t|^4.$$

  Dobili smo rješenje homogene jednadžbe u sljedećem obliku:

$$u(t) = Ct^4,\ C \neq 0.$$

- Varijacija konstante:

$$u(t) = C(t)t^4. \tag{5.8}$$

  Deriviranjem (5.8) dobivamo:

$$u'(t) = C'(t)t^4 + 4C(t)t^3. \tag{5.9}$$

  Uvrstimo li (5.8) i (5.9) u (5.5) imamo:

$$C'(t)t^4 + 4C(t)t^3 - \frac{4}{t}C(t)t^4 = -\frac{2}{t^2}. \tag{5.10}$$

  Podijelimo li jednadžbu (5.10) s $t^4 \neq 0$, imamo:

$$C'(t) = -\frac{2}{t^6}. \tag{5.11}$$

  Integriramo jednadžbu (5.11) kako bi dobili:

$$C(t) = \frac{2}{5t^5} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

Nadalje, iz (5.8) i (5.12) dobivamo:

$$u(t) = \left(\frac{2}{5t^5} + C_1\right)t^4 = \frac{2}{5t} + C_1 t^4,\ C_1 \in \mathbb{R},$$

gdje je $\frac{2}{5t}$ partikularno rješenje nehomogene jednadžbe, dok je $C_1 t^4$ opće rješenje homogene jednadžbe.

Sada radimo povratak supstitucije $u = \frac{1}{y^2}$:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{2}{5t} + Ct^4,\ C \in \mathbb{R}.$$

Napokon, dobivamo rješenje u sljedećem obliku:

$$y^2 = \frac{5t}{2 + 5Ct^5}.$$

□

Zadatak 5.2 (Domaća zadaća)**.** Odredite opća rješenja jednadžbi:

a) $(2t+1)x' = 4t + 2x$,

b) $x' + x \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}$,

c) $(tx + e^t)dt - tdx = 0$,

d) $t^2x' + tx + 1 = 0$,

e) $(tx' - 1)\ln t = 2x$,

f) $x = t(x' - t\cos t)$,

g) $tx' + (t+1)x = 3t^2e^{-t}$,

h) $x' - \frac{x}{t\ln t} = t\ln t$.

Rješenje: a) $x = C(2t+1) + (2t+1)\ln|2t+1| + 1,\ C \in \mathbb{R}$ b) $x = C\cos t + \sin t,\ C \in \mathbb{R}$ c) $x = Ce^t + e^t \ln|t|,\ C \in \mathbb{R}$ d) $x = \frac{C}{t} - \frac{\ln|t|}{t},\ C \in \mathbb{R}$ e) $x = C\ln^2 t - \ln t,\ C \in \mathbb{R}$ f) $x = Ct + t\sin t,\ C \in \mathbb{R}$ g) $x = C\frac{e^{-t}}{t} + e^{-t}t^2,\ C \in \mathbb{R}$ h) $x = C\ln t + \frac{t^2}{2}\ln t,\ C \in \mathbb{R}$

Zadatak 5.3 (Domaća zadaća)**.** Odredite prve integrale sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $ty' + 2y = \frac{e^t}{y}$,

b) $y' + \frac{y}{t-3} = 5(t-3)y^{3/2}$.

Rješenje: a) $y^2 = \frac{2(t^3e^t - 3t^2e^t + 6te^t - 6e^t) + C}{t^4},\ C \in \mathbb{R}$ b) $y = \frac{9}{9C^2|t-3| - 30C|t-3|^{5/2} + 25(t-3)^4},\ C \in \mathbb{R}$

Zadatak 5.4 (Domaća zadaća)**.** Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' + \operatorname{tg}(2t)y = y^2\cos(2t)\sin(2t), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Rješenje: $y = \frac{5\sqrt{\cos(2t)}}{4 + \cos^{\frac{5}{2}}(2t)}$

Zadatak 5.5. Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:

$$x't^3 \sin x = tx' - 2x. \tag{5.13}$$

Rješenje: Uočimo najprije da diferencijalna jednadžba (5.13) nije separabilna, niti je oblika kojeg znamo svesti na separirani oblik. Nadalje, nije ni linearna ni Bernoullijeva. Dakle, jednadžbu po $x = x(t)$ ne znamo riješiti. Međutim, postoji mogućnost zamjene varijable t i nepoznate funkcije x tako da se zapiše jednadžba za funkciju $t = t(x)$ (vidi Napomenu 3.6), što ćemo i napraviti kako nemamo drugog izbora. Time jedino gubimo rješenja koja su konstantne funkcije, ali jednostavno se vidi (uvrštavanjem $x \equiv C$ u (5.13)) da je jedino takvo rješenje $x \equiv 0$.

Sada ćemo se prisjetiti kako izvesti iz (5.13) diferencijalnu jednadžbu za $t = t(x)$.

Jednadžbu (5.13) zapisujemo kao:

$$\frac{dx}{dt} t^3 \sin x = t \frac{dx}{dt} - 2x,$$

pa sređivanjem slijedi:

$$\frac{dx}{dt}(t^3 \sin x - t) = -2x.$$

Tako dobiveni oblik pomnožimo *formalno* s $-\frac{dt}{dx}$, čime dobivamo:

$$2x \frac{dt}{dx} = t - t^3 \sin x\,, \tag{5.14}$$

što je upravo diferencijalna jednadžba za funkciju $t = t(x)$ (što je inverzna funkcija funkciji $x = x(t)$).

Dijeljenjem jednadžbe (5.14) s $2x \neq 0$ (prisjetite se da smo već komentirali slučaj $x = 0$) dobivamo:

$$\frac{dt}{dx} - \frac{1}{2x} t = -\frac{\sin x}{2x} t^3\,.$$

Time smo dobili Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu po $t = t(x)$.

Uvodimo supstituciju $z = \frac{1}{t^2}$ te imamo: $z' = -\frac{2}{t^3}\frac{dt}{dx}$.

Podijelimo li jednadžbu s $t^3 \neq 0$, dobivamo:

$$\frac{1}{t^3}\frac{dt}{dx} - \frac{1}{2x}\frac{1}{t^2} = -\frac{\sin x}{2x}. \tag{5.15}$$

Sada jednadžba (5.15) postaje:

$$-\frac{z'}{2} - \frac{1}{2x} z = -\frac{\sin x}{2x}. \tag{5.16}$$

Pomnožimo li jednadžbu (5.16) s -2, dobivamo:

$$z' = -\frac{1}{x} z + \frac{\sin x}{x}. \tag{5.17}$$

Dobili smo linearnu jednadžbu, gdje je (u oznakama Odjeljka 4) $a(x) = -\frac{1}{x}$ i $b(x) = \frac{\sin x}{x}$. Vrijedi:

$$\int a(x) = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C\,,$$

pa je funkcija $x \mapsto -\ln|x|$ jedna primitivna funkcija funkcije a. Time uvrštavanjem u (4.10) dobivamo da je opće rješenje jednadžbe (5.17) dano s:

$$z = e^{-\ln x}\Big(\int e^{\ln x}\frac{\sin x}{x}dx + C\Big),\ C \in \mathbb{R},$$

iz čega slijedi:

$$z = \frac{1}{x}\Big(\int \sin x\, dx + C\Big),\ C \in \mathbb{R},$$

pa napokon imamo:

$$z = \frac{1}{x}(-\cos x + C),\ C \in \mathbb{R}.$$

Naravno, gornju nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu smo mogli riješiti i direktnom primjenom metode varijacije konstanti.

Vraćanjem supstitucije $z = \frac{1}{t^2}$, dobivamo:

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{x}(C - \cos x),\ C \in \mathbb{R},$$

i napokon:

$$x = t^2(C - \cos x),\ C \in \mathbb{R}.$$

□

5.2. Riccatijeva jednadžba

Riccatijeva diferencijalna jednadžba je nelinearna obična diferencijalna jednadžba prvog reda oblika

$$x'(t) = q_0(t) + q_1(t)x(t) + q_2(t)x(t)^2\ , \quad t \in I\ , \tag{5.18}$$

pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval te su $q_0, q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ dane funkcije. Kako za $q_0 \equiv 0$ dobivamo Bernoullijevu jednadžbu uz $\alpha = 2$, Riccatijeva jednadžba se često naziva i nehomogena Bernoullijeva jednadžba uz potenciju $\alpha = 2$.

Slično kao kod Bernoullijeve jednadžbe, možemo dobiti rezultat postojanja i jedinstvenosti (lokalno) rješenja pripadne Cauchyjeve zadaće pozivajući se na Picardov teorem, što ostavljamo kao zadatak. Ipak, primijetimo da općenito funkcija $x \equiv 0$ neće biti rješenje jednadžbe (5.18), te da nam $x_0 \leq 0$ u početnom uvjetu $x(t_0) = x_0$ ne predstavlja problem za postojanje i jedinstvenost rješenja.

Sada ćemo prezentirati postupak kojim određujemo sva rješenja jednadžbe (5.18), te će njena sličnost s Bernoullijevom jednadžbom igrati bitnu ulogu.

Neka je x_1 jedno dano rješenje jednadžbe (5.18). Cilj nam je odrediti ostala rješenja, odnosno proizvoljno rješenje x te jednadžbe različito od x_1. Uvedimo supstituciju $z = x - x_1$ i pokažimo da z zadovoljava odgovarajuću Bernoullijevu jednadžbu. Naime, uvrstimo $x = z + x_1$ u (5.18). Time dobivamo (ne pišemo varijablu t):

$$\begin{aligned} x_1' + z' &= q_0 + q_1(z + x_1) + q_2(x_1 + z)^2 \\ &= (q_0 + q_1x_1 + q_2x_1^2) + (q_1 + 2q_2x_1)z + q_2z^2\ . \end{aligned}$$

Kako x_1 zadovoljava jednadžbu (5.18), x_1' se pokrati s cijelim izrazom unutar zagrade u prvom članu s desne strane. Time dobivamo da funkcija z nužno zadovoljava sljedeću Bernoullijevu jednadžbu:

$$z' = (q_1 + 2q_2x_1)z + q_2z^2 \,. \tag{5.19}$$

Dakle, sva rješenja jednadžbe (5.18) su dana s $x_1 + z$, pri čemu je x_1 neko dano rješenje te jednadžbe, dok je z proizvoljno rješenje Bernoullijeve jednadžbe (5.19).

Sva rješenja Bernoullijeve zadaće (5.19) dobivamo tako da uvedemo supstituciju $u = \frac{1}{z}$ (ovdje je $\alpha = 2$; pogledati Napomenu 5.2) i riješimo pripadnu linearnu jednadžbu za u. Sada su sva rješenja Riccatijeve jednadžbe (5.18) dana s $x_1 + \frac{1}{u}$, pri čemu je u rješenje pripadne linearne jednadžbe pridružene jednadžbi (5.19).

Ovim vidimo da nam funkcija z nije više bitna pa možemo sa supstitucijom $x = x_1 + \frac{1}{u}$ direktno prijeći na problem u terminima funkcije u.

Sažmimo gornji postupak rješavanja u sljedeći algoritam:

1.) Odrediti jedno rješenje x_1 jednadžbe (5.18) pogađanjem (često je riječ o monomu, tj. $x_1(t) = Ct^k$ za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$ i potenciju $k \in \mathbb{Z}$).

2.) Uvrstiti $x = x_1 + \frac{1}{u}$ u jednadžbu (5.18) i izvesti linearnu jednadžbu koju zadovoljava u.

3.) Odrediti sva rješenja u pripadne linearne jednadžbe.

4.) Skup svih rješenja jednadžbe (5.18) je dan s

$$\{x_1\} \cup \left\{ x_1 + \frac{1}{u} : u \text{ rj. linearne jednadžbe iz trećeg koraka koje nema nultočki} \right\} .$$

Napomenimo samo da se izraz $\frac{1}{u}$ često može srediti tako da obuhvatimo i trivijalno rješenje, čime onda nema potrebe za izdvajanjem rješenja x_1.

Zadaci

Zadatak 5.6. Odredite opće rješenje Riccatijeve jednadžbe:

$$x' - \frac{1}{1-t^3}x^2 + \frac{t^2}{1-t^3}x + \frac{2t}{1-t^3} = 0, \ t \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

ako se zna da je za neku konstantu $a \in \mathbb{R}$ funkcija $t \mapsto at^2$ njeno partikularno rješenje.

Rješenje: Partikularno rješenje je dano u obliku $x_1(t) = at^2$ pa stoga imamo $x_1'(t) = 2at$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu imamo:

$$2at - \frac{a^2t^4}{1-t^3} + \frac{at^4}{1-t^3} + \frac{2t}{1-t^3} = 0. \tag{5.20}$$

Pomnožimo li jednadžbu (5.20) s $1 - t^3 \neq 0$, dobivamo:

$$2at(1-t^3) - a^2t^4 + at^4 + 2t = 0 \,.$$

Iz gornje jednadžbe slijedi:

$$2at - 2at^4 - a^2t^4 + at^4 + 2t = 0\,,$$

što zapisujemo kao

$$2t(a+1) - at^4(a+1) = 0\,.$$

Dakle, da bi funkcija x_1 bila jedno rješenje početne diferencijalne jednadžbe, nužan i dovoljan uvjet na parametar a jest da za svaki $t \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vrijedi

$$(a+1)(2t - at^4) = 0\,.$$

Očito je

$$a = -1$$

jedini mogući izbor, pa je jedno partikularno rješenje dano s

$$x_1(t) = -t^2\,.$$

Supstitucijom $x = x_1 + z$ Riccatijevu jednadžbu svodimo na Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu s $\alpha = 2$, koju zatim svodimo na linearnu diferencijalnu jednadžbu uvodeći supstituciju $u = \frac{1}{z}$. Stoga, supstitucijom $x = x_1 + \frac{1}{u}$ Riccatijevu jednadžbu odmah prevodimo u linearnu diferencijalnu jednadžbu. Dakle, uvodimo zamjenu: $x = -t^2 + \frac{1}{u}$, pa imamo $x' = -2t - \frac{u'}{u^2}$.

Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo:

$$-2t - \frac{u'}{u^2} - \frac{1}{1-t^3}\Big(-t^2 + \frac{1}{u}\Big)^2 + \frac{t^2}{1-t^3}\Big(-t^2 + \frac{1}{u}\Big) + \frac{2t}{1-t^3} = 0\,. \tag{5.21}$$

Pomnožimo jednadžbu (5.21) s $1 - t^3$ kako bismo dobili:

$$-2t + 2t^4 - \frac{u'}{u^2}(1-t^3) - t^4 + \frac{2t^2}{u} - \frac{1}{u^2} - t^4 + \frac{t^2}{u} + 2t = 0\,. \tag{5.22}$$

Sada pomnožimo jednadžbu (5.22) s $u^2 \neq 0$ i dobivamo:

$$-(1-t^3)u' + 3t^2u - 1 = 0\,. \tag{5.23}$$

Podijelimo jednadžbu (5.23) s $-(1-t^3) \neq 0$ te slijedi:

$$u' = -\frac{3t^2}{t^3-1}u + \frac{1}{t^3-1}\,.$$

Time smo dobili linearnu diferencijalnu jednadžbu uz $a(t) = -\frac{3t^2}{t^3-1}$, $b(t) = \frac{1}{t^3-1}$ (koristeći oznake Odjeljka 4).

Opće rješenje dobivene linearne diferencijalne jednadžbe dano je s (vidi (4.10)):

$$u = e^{\int a(t)dt}\Big(\int e^{-\int a(t)dt} b(t)dt + C\Big),\ C \in \mathbb{R}.$$

Znamo da vrijedi:

$$\int a(t)dt = \int -\frac{3t^2}{t^3-1}dt = -\ln|t^3-1| + C.$$

Sada imamo:

$$u = e^{-\ln(t^3-1)}\Big(\int e^{\ln(t^3-1)}\frac{1}{t^3-1}dt + C\Big),\ C \in \mathbb{R}.$$

Dobivamo rješenje u sljedećem obliku:

$$u = \frac{t+C}{t^3-1},\ C \in \mathbb{R}.$$

Naravno, gornju nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu smo mogli riješiti i direktnom primjenom metode varijacije konstanti.

Vraćanjem supstitucije $x = -t^2 + \frac{1}{u}$, konačno dobivamo:

$$x = -t^2 + \frac{t^3-1}{t+C} = \frac{-Ct^2-1}{t+C},\ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 5.7. Odredite prve integrale sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $(t+x^2)dx = xdt$,

b) $(\sin^2 x + t\operatorname{ctg} x)x' = 1$,

c) $(2t+x)dx = xdt + 4\ln x dx$,

d) $x' = \frac{x}{3t-x^2}$,

e) $(1-2tx)x' = x(x-1)$,

f) $(2t^2 x\ln x - t)x' = x$,

g) $(x^2+2x+t^2)dx + 2tdt = 0$.

Rješenje: a) $x = -\frac{C}{2} \pm \frac{\sqrt{C^2+4t}}{2},\ C \in \mathbb{R},\ x = 0$ b) $t = C\sin x - \sin x\cos x,\ C \in \mathbb{R}$ c) $t = Cx^2 - x + 2\ln x + 1,\ C \in \mathbb{R}$ d) $t = Cx^3 + x^2,\ C \in \mathbb{R},\ x = 0$ e) $t = \frac{C+x-\ln|x|}{(x-1)^2},\ x = 0,\ x = 1$ f) $t = \frac{1}{x(C-\ln^2 x)},\ C \in \mathbb{R}$ g) $t^2 = Ce^{-x} - x^2,\ C \in \mathbb{R}$

6. Egzaktne jednadžbe

Promotrimo običnu diferencijalnu jednadžbu

$$u'(x) = f(x, u(x)) \ . \tag{6.1}$$

Prisjetimo se da je $F \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, prvi integral gornje jednadžbe ako postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da svako rješenje u diferencijalne jednadžbe (6.1) vrijedi:

$$F(x, u(x)) = C \ ,$$

na nekom otvorenom intervalu. Deriviranjem ovog izraza po varijabli x dobivamo da svako rješenje u jednadžbe (6.1) također zadovoljava diferencijalnu jednadžbu (vidi Napomenu 2.9):

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, u(x)) + \frac{\partial F}{\partial u}(x, u(x))u'(x) = 0 \ . \tag{6.2}$$

Uz oznake $M = \frac{\partial F}{\partial x}$ i $N = \frac{\partial F}{\partial u}$ gornja jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$M(x, u(x)) + N(x, u(x))u'(x) = 0 \ . \tag{6.3}$$

Pretpostavimo sada da nam je u zadatku umjesto jednadžbe (6.1) bila zadana jednadžba (6.3). U tom slučaju prvi integral F možemo odrediti rješavanjem sljedećeg jednostavnog sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, u) &= M(x, u) \\ \frac{\partial F}{\partial u}(x, u) &= N(x, u) \ . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Da je taj sustav zaista jednostavan za riješiti (ako rješenje F postoji) uvjerit ćemo se uskoro na primjeru. Sada istaknimo da je rješenje F (ako postoji) određeno do na aditivnu konstantu, tj. ako F zadovoljava sustav (6.4), tada je za svaku konstantu $c \in \mathbb{R}$ funkcija $F + c$ također rješenje tog sustava.

U gornjem slučaju je postojanje funkcije F bilo osigurano iz samih definicija funkcija M i N. Međutim, u zadacima nećemo imati tu informaciju, pa je bitno znati ima li sustav (6.4) rješenje prije nego što ga krenemo rješavati tako da smanjimo utrošak vremena i mogućnost pogreške. Prije nego što krenemo na analizu rješivosti sustava (6.4), uvedimo sljedeću definiciju.

Definicija 6.1. Diferencijalna jednadžba (6.3) je *egzaktna* ako postoji otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ i funkcija $F \in C^1(\Omega)$ koja zadovoljava sustav (6.4).

Tada je F prvi integral jednadžbe (6.3).

Za početak primijetimo da je pitanje postojanja rješenja sustava (6.4) u potpunosti ekvivalentno pitanju je li vektorska funkcija

$$(x, u) \xmapsto{\Phi} \begin{bmatrix} M(x, u) \\ N(x, u) \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

potencijalna, tj. postoji li skalarna funkcija F takva da je $\nabla F = \Phi$ (uvjerite se u ekvivalentnost raspisivanjem ovog izraza po komponentama).

Odgovor na drugo (ekvivalentno) pitanje smo već vidjeli na kolegijima *Diferencijalni i integralni račun 1 i 2*, čega ćemo se sada prisjetiti (vidi [7, teoremi 17.31 i 22.4]).

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i 1-povezan, te $\Phi \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ dana funkcija ($\Phi = \Phi(x, u)$). Tada je Φ potencijalna ako i samo ako vrijedi

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial u} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \quad \text{u } \Omega \ ,$$

pri čemu smo s Φ_j označili j-tu komponentu funkcije Φ.

Ako ste zaboravili definiciju 1-povezanog skupa, svakako se prisjetite, a ovdje ćemo samo kratko reći da se intuitivno to svojstvo može shvatiti tako da je skup povezan (između svake dvije točke tog skupa postoji *put* koji u potpunosti leži u tom skupu) te da nema *rupa*. Na primjer, $\mathbb{R}^2$, krug (otvoren i zatvoren), pravokutnik (otvoren i zatvoren) su primjeri 1-povezanih skupova, dok su $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ i kružni vijenac primjeri povezanih skupova koji nisu 1-povezani.

Primjenom gornje tvrdnje na vektorsku funkciju (6.5) konačno dobivamo da je, uz 1-povezanost skupa Ω (što je slučaj koji će nas jedini zanimati pri rješavanju ovakvih diferencijalnih jednadžbi), jednadžba (6.3) egzaktna ako i samo ako vrijedi $M, N \in C^1(\Omega)$ i

$$\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \text{u } \Omega \ . \tag{6.6}$$

Pogledajmo sada jedan primjer.

Primjer 6.2. Dana je Cauchyjeva zadaća

$$\begin{cases} 2x + u(x)^2 + 2xu(x)u'(x) = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u(1) = 1 \ . \end{cases}$$

Jednadžbu ćemo riješiti tako da ćemo uočiti da se radi o egzaktnoj jednadžbi. Međutim, to nije jedini način na koji se ova jednadžba može riješiti (razmislite o svim ostalim metodama rješavanja koje smo obradili, odredite koje su primjenjive te također pomoću njih riješite danu zadaću). Nadalje, primjenom Picardovog teorema pokažite da ova zadaća zaista ima jedinstveno lokalno rješenje (oko točke $x = 1$).

Korisno je pripadnu diferencijalnu jednadžbu zapisati u obliku diferencijalne forme (paziti da je zapis takav da na jednoj strani jednakosti bude 0):

$$(2x + u^2)dx + 2xudu = 0 \ .$$

Izraz uz dx označimo s M, a uz du s N, tj.

$$M(x, u) = 2x + u^2 \ , \quad N(x, u) = 2xu \ .$$

Uočimo da su M i N funkcije klase C^∞ (pa onda i klase C^1) na $\mathbb{R}^2$ (što je otvoren i 1-povezan skup). Dakle, sada znamo da je pripadna diferencijalna jednadžba egzaktna ako i samo ako vrijedi $\frac{\partial M}{\partial u} = \frac{\partial N}{\partial x}$. Deriviranjem dobivamo:

$$\frac{\partial M}{\partial u} = 2u = \frac{\partial N}{\partial x} \ ,$$

pa je diferencijalna jednadžba egzaktna.

Prvi integral F dobivamo rješavanjem sustava:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,u) = M(x,u) = 2x + u^2 \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = N(x,u) = 2xu\ . \tag{6.8}$$

Bitno je naglasiti da po prethodnoj analizi znamo da rješenje ovog sustava postoji.

Uočimo da za provjeru egzaktnosti izraz uz dx deriviramo po varijabli u, dok kod određivanja prvog integrala F taj izraz odgovara parcijalnoj derivaciji po varijabli x funkcije F. Na ovaj redoslijed obratite posebnu pažnju tako da se kasnije izbjegnu neke moguće pogreške.

Prethodni sustav rješavamo tako da odaberemo jednu jednadžbu i integriramo je po varijabli po kojoj smo derivirali funkciju F (jednadžbu biramo po tome koji nam je izraz lakše integrirati). Krenimo ovdje od prve jednadžbe. Dakle, jednadžbu (6.7) integrirajmo po varijabli x čime dobivamo (u se u ovom slučaju promatra kao parametar):

$$F(x,u) = x^2 + xu^2 + A(u)\ . \tag{6.9}$$

Ovdje je $A(u)$ konstanta integracije koja može ovisiti o varijabli u (jer smo samo integrirali po varijabli x), pa je A funkcija jedne varijable. Dobivenu jednadžbu deriviramo po varijabli u (varijabli po kojoj nismo integrirali) i uvrstimo dobiveno u (6.8):

$$2xu = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = 2xu + A'(u)\ . \tag{6.10}$$

Time smo dobili da funkcija A zadovoljava $A'(u) = 0$, odnosno da je A konstanta. Vraćanjem u (6.9), konačno dobivamo da su sva rješenja sustava (6.7)–(6.8) dana s:

$$F(x,u) = x^2 + xu^2 + A\ .$$

Kako je nama dovoljno odrediti jedan prvi integral, biramo $A = 0$.

Po definiciji prvog integrala, sada znamo da postoji konstanta $C \in \mathbb{R}$ takva da rješenje dane Cauchyjeve zadaće u zadovoljava $F(x, u(x)) = C$, odnosno:

$$x^2 + xu(x)^2 = C\ .$$

Kako nam je dan i početni uvjet, konstantu C određujemo tako da u ovu jednadžbu uvrstimo $x = 1$ (a po uvjetu imamo $u(1) = 1$):

$$1 + 1 = C\,,$$

pa je $C = 2$.

Time je jedinstveno (lokalno) rješenje Cauchyjeve zadaće implicitno dano s

$$x^2 + xu(x)^2 = 2\,,$$

a na intervalu $\langle 0, \sqrt{2}\rangle$ ga možemo i eksplicitno izraziti s

$$u(x) = \sqrt{\frac{2 - x^2}{x}}\ .$$

Obrazložite zašto smo uzeli u obzir samo pozitivan korijen i provjerite da je ova funkcija zaista rješenje dane Cauchyjeve zadaće.

Napomena 6.3. Iako je postupak rješavanja egzaktnih jednadžbi jednostavan, često se ipak zbog nepažnje mogu pojaviti pogreške (npr. ako se u prethodnom primjeru umjesto M u izrazu (6.7) uvrsti $\frac{\partial M}{\partial u}$ kako se s tom funkcijom do tog trenutka radilo). Srećom, u većini slučajeva je vrlo jednostavno uočiti pogrešku, što ćemo objasniti referirajući se na prethodni primjer.

Sređivanjem jednadžbe (6.10) ne smije nam ostati nikakva ovisnost o varijabli x jer bi to značilo da funkcija A također ovisi o varijabli x, a to je neistina. Na primjer, da smo dobili $A'(u) = xu$ (umjesto $A'(u) = 0$), možemo odmah zaključiti da postoji pogreška u postupku.

Napomena 6.4. Postupak rješavanja sustava parcijalnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda (6.7)–(6.8) možemo i šablonizirati tako da izvedemo opću formulu za rješenje sustava (6.4).

Naime, integriranjem po varijabli x jednadžbe $\frac{\partial F}{\partial x}(x,u) = M(x,u)$, uz korištenje

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}(x,u)\,dx = F(x,u) + A(u)$$

($A(u)$ je konstanta integracije koja može ovisiti o parametru u jer po toj varijabli nismo integrirali), dobivamo

$$F(x,u) = \int M(x,u)\,dx - A(u)\,. \tag{6.11}$$

Preostalo je odrediti funkciju $u \mapsto A(u)$.

Deriviranjem gornje jednadžbe po varijabli u dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(x,u) &= \frac{\partial}{\partial u}\int M(x,u)\,dx - A'(u)\\ &= \int \frac{\partial M}{\partial u}(x,u)\,dx - A'(u)\,,\end{aligned}$$

pri čemu smo u drugoj jednakosti koristili da je M klase C^1 pa možemo s derivacijom ući pod integral.

Korištenjem $\frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = N(x,u)$, iz gornje jednakosti slijedi

$$A'(u) = \int \frac{\partial M}{\partial u}(x,u)\,dx - N(x,u)\,,$$

pa je nužno

$$A(u) = \iint \frac{\partial M}{\partial u}(x,u)\,dxdu - \int N(x,u)\,du\,.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u (6.11) konačno dobivamo da je F nužno dan s:

$$F(x,u) = \int M(x,u)\,dx + \int N(x,u)\,du - \iint \frac{\partial M}{\partial u}(x,u)\,dxdu\,. \tag{6.12}$$

S korištenjem prethodne formule treba biti oprezan iz dva razloga: paziti da točno zapamtimo formulu (jer ćemo u protivnom dobiti pogrešno rješenje), te biti svjestan da njenom primjenom ne možemo uočiti problem ako smo krivo zaključili da je jednadžba egzaktna (za razliku od prethodne metode; vidi Napomenu 6.3). Zadržimo se kratko na drugom problemu.

Kod formule (6.12) smo istaknuli da je to *nužan* oblik rješenja (prvog integrala) F. Kada možemo zaključiti da je to i dovoljan uvjet? Pogledajmo sljedeće: da smo pri gornjem postupku krenuli od druge jednadžbe u (6.4), umjesto od prve, tada bismo dobili da je F dan s (pokažite!):

$$F(x,u) = \int M(x,u)\,dx + \int N(x,u)\,du - \iint \frac{\partial N}{\partial x}(x,u)\,dudx\ .$$

Očito će novodobivena formula biti jednaka prethodnoj ako je ispunjen uvjet (6.6), tj. ako je pripadna diferencijalna jednadžba egzaktna.

Dakle, formulu (6.12) možemo koristiti tek kad smo se zaista uvjerili da je pripadna diferencijalna jednadžba egzaktna!

Nažalost egzaktnost jednadžbi uvelike ovisi o načinu na koji je jednadžba zapisana, što se može vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 6.5. Promotrimo jednadžbu (6.1) i ispitajmo uz koje dodatne uvjete će biti egzaktna. Njen zapis u obliku diferencijalne forme glasi:

$$f(x,u)dx - du = 0\ .$$

Dakle, u ovom slučaju imamo $M = f$ i N je konstantna funkcija s vrijednosti -1.

Jednadžba će biti egzaktna ako i samo ako je ispunjen uvjet (6.6), tj. ako i samo ako je $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$. Taj uvjet je ispunjen ako i samo ako je funkcija f neovisna o varijabli u.

U prethodnom primjeru smo vidjeli da je jednadžba (6.1) egzaktna samo u trivijalnom slučaju kada je funkcija f neovisna o varijabli u, a tada jednadžbu lako rješavamo integriranjem. Međutim, ako je jednadžba rješiva, odnosno ako postoji prvi integral F, tada je možemo (barem lokalno) ekvivalentno zapisati u obliku (6.2), što je trivijalno egzaktna jednadžba. Time se postavlja pitanje na koji način diferencijalnu jednadžbu koja nije egzaktna svesti na ekvivalentnu jednadžbu koja je egzaktna. Ovo je netrivijalno pitanje te ćemo prezentirati kako to učiniti samo u nekim posebnim slučajevima.

Općenitosti radi, pretpostavimo da je početna jednadžba dana u obliku (6.3):

$$M(x,u(x)) + N(x,u(x))u'(x) = 0\ ,$$

pri čemu su $M, N \in C^1(\Omega)$, gdje je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i 1-povezan. Nadalje, pretpostavimo da jednadžba nije egzaktna, ali da postoji funkcija $\mu : \Omega \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ klase C^1 takva da je jednadžba:

$$\mu(x,u(x))M(x,u(x)) + \mu(x,u(x))N(x,u(x))u'(x) = 0$$

egzaktna. Tada kažemo da je μ *integrirajući faktor* jednadžbe (6.3).

Kako smo pretpostavili da μ nema nultočki, očito su gornje dvije diferencijalne jednadžbe ekvivalentne (samo drugu podijelimo s $\mu(x, u(x))$). Odredimo koje nužno uvjete mora μ ispunjavati, što nam može pomoći u određivanju jedne takve funkcije.

Po (6.6) nužno mora vrijediti:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)\,,$$

odnosno:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial u} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\Big)\mu \tag{6.13}$$

u skupu Ω. Ova parcijalna diferencijalna jednadžba po μ je općenito preteška za rješavanje pa pogledajmo samo dva posebna slučaja.

Pretpostavimo da postoji funkcija $\mu = \mu(x)$ koja ovisi samo o varijabli x i zadovoljava (6.13). U tom slučaju je $\frac{\partial \mu}{\partial u} = 0$ i $\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu'$, pa nakon dijeljenja s $-N\mu$ (ovaj račun je valjan samo na podskupu koji ne sadrži nultočke funkcije N) u (6.13) dobivamo:

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\Big)\,. \tag{6.14}$$

Uočimo da lijeva strana gornje jednakosti ovisi samo o x tako da je nužno da i desna strana jednakosti ovisi samo o varijabli x. Ako je to slučaj, jednostavno se provjeri da je s:

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\right)dx} \tag{6.15}$$

dano jedno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (6.13), odnosno jedna funkcija za koju početna diferencijalna jednadžba (6.3) nakon množenja s njom postaje egzaktna, pri čemu skup rješenja ostaje nepromijenjen. Do formule (6.15) možemo doći tako da integriramo jednadžbu (6.14) i koristimo da je $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = (\ln \mu(x))'$.

Analogno postupamo i u slučaju kada funkcija $\mu = \mu(u)$ ovisi samo o varijabli u. Tada je u slučaju da izraz $\frac{1}{M}\big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\big)$ ovisi samo o varijabli u jedan dobar izbor funkcije μ dan s:

$$\mu(u) = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\right)du} \tag{6.16}$$

(pokažite!).

Ako nije zadovoljeno da izraz $-\frac{1}{N}\big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\big)$ ovisi samo o varijabli x niti da izraz $\frac{1}{M}\big(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial u}\big)$ ovisi samo o varijabli u, tada ne postoji tražena funkcija μ koja ovisi samo o jednoj varijabli. Tražena funkcija se tada obično dobiva iz (6.13) promišljenim pogađanjem.

U sljedeća dva primjera ćemo vidjeti kako primijeniti ovaj postupak svođenja jednadžbe na egzaktni oblik.

Primjer 6.6. Promotrimo jednadžbu

$$2xu + (2x^2 + 3u)u' = 0\,. \tag{6.17}$$

U ovom slučaju su $M(x, u) = 2xu$ i $N(x, u) = 2x^2 + 3u$ klase C^∞ na cijelom $\mathbb{R}^2$. Iz:

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, u) - \frac{\partial M}{\partial u}(x, u) = 4x - 2x = 2x\,,$$

zaključujemo da jednadžba nije egzaktna.

Međutim, izraz:

$$\frac{1}{M}\Big(\frac{\partial N}{\partial x}(x,u) - \frac{\partial M}{\partial u}(x,u)\Big) = \frac{2x}{2xu} = \frac{1}{u}\,,$$

ovisi samo o varijabli u pa koristimo (6.16) za određivanje integrirajućeg faktora $\mu = \mu(u)$. Kako je $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$, jedan integrirajući faktor je dan s $\mu(u) = u$ (uzeli smo $C = 0$). Promatramo ga za $u \in \langle 0, +\infty\rangle$ ili $u \in \langle -\infty, 0\rangle$ jer je 0 jedina nultočka funkcije μ.

Nakon množenja s u početna diferencijalna jednadžba glasi:

$$2xu^2 + (2x^2u + 3u^2)u' = 0\,. \tag{6.18}$$

Označimo (nove) koeficijente s $\tilde{M}(x,u) = 2xu^2$ i $\tilde{N}(x,u) = 2x^2u + 3u^2$. Sada imamo:

$$\frac{\partial \tilde{M}}{\partial u}(x,u) = 4xu = \frac{\partial \tilde{N}}{\partial x}\,,$$

pa je novodobivena jednadžba zaista egzaktna.

Iz gornje analize znamo da će proizvoljno rješenje $u : I \to \mathbb{R}$ jednadžbe (6.18) biti ujedno i rješenje početne jednadžbe (6.17) ako u svakoj točki x intervala I vrijedi $0 \neq \mu(u(x)) = u(x)$. Za određivanje svih rješenja jednadžbe (6.17) koje imaju nultočku (ili ispitivanje možemo li proširiti pronađena rješenja na veći interval koji će obuhvatiti i neke eventualne nultočke), moramo se vratiti u tu početnu jednadžbu (6.17) i provesti direktnu provjeru. Na primjer, konstantna funkcija $u \equiv 0$ je očito rješenje jednadžbe (6.17). Nadalje, ako je u neko rješenje jednadžbe (6.17) za koje imamo $u(x_0) = 0$ i $u'(x_0) \neq 0$ u nekoj točki x_0, tada je nužno $x_0 = 0$ jer uvrštavanjem dobivamo $2x_0^2u'(x_0) = 0$.

Odredimo sva rješenja jednadžbe (6.18). Prvi integral F zadovoljava

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x,u) &= \tilde{M}(x,u) = 2xu^2\,,\\ \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) &= \tilde{N}(x,u) = 2x^2u + 3u^2\,.\end{aligned}$$

Integriranjem prve jednadžbe po x dobivamo $F(x,u) = x^2u^2 + A(u)$, za neku funkciju A, pa deriviranjem po u i uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobivamo:

$$2x^2u + 3u^2 = \frac{\partial F}{\partial u}(x,u) = 2x^2u + A'(u)\,,$$

odnosno $A'(u) = 3u^2$. Dakle, $A(u) = u^3 + C$, za neku konstantu C, pa je (jedan) prvi integral dan s:

$$F(x,u) = x^2u^2 + u^3\,.$$

Time su sva rješenja jednadžbe (6.17) dana s:

$$x^2u(x)^2 + u(x)^3 = C\,,$$

za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$, pri čemu ne uzimamo u obzir funkcije koje imaju izolirane nultočke kratnosti jedan (osim u $x = 0$).

Rješenje ne možemo općenito eksplicitno izraziti. Međutim, za neke vrijednosti parametra C možemo. Na primjer, za $C = 0$ dobivamo $u(x)^2\big(x^2 + u(x)\big) = 0$, pa je $u(x) = -x^2$ jedno rješenje jednadžbe (6.17) (provjerite!).

Za kraj razmislite kojom biste još metodom mogli odrediti sva rješenja jednadžbe (6.17) (sjetite se da je ponekad korisno zamijeniti funkciju i varijablu; vidi Napomenu 3.6).

Primjer 6.7. Želimo odrediti prvi integral diferencijalne jednadžbe (zapisane u obliku diferencijalne forme):

$$(t^2 + x^2 + t)dt - xdx = 0\ .$$

Ovdje imamo $M(t, x) = t^2+x^2+t$ i $N(t, x) = -x$, što su funkcije klase C^∞ na cijelom $\mathbb{R}^2$.

Kako je

$$\frac{\partial N}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial M}{\partial x}(t, x) = 0 - 2x = -2x\ ,$$

vidimo da jednadžba nije egzaktna. Međutim, izraz

$$-\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial N}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial M}{\partial x}(t, x)\Big) = -\frac{-2x}{-x} = -2$$

ne ovisi o varijabli t, pa iz (6.15) dobivamo da je jedan integrirajući faktor pripadne jednadžbe dan s $\mu(t) = e^{-2t}$. Kako je μ pozitivna funkcija, množenjem početne diferencijelne jednadžbe s μ dobivamo u potpunosti ekvivalentnu diferencijalnu jednadžbu.

Dovršite račun tako da pokažete da je prvi integral dan s $F(t, x) = -\frac{e^{-2t}}{2}(t^2 + x^2 + 2t + 1)$.

Zadaci

Zadatak 6.1. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$(4 + t^2)\frac{dx}{dt} + 2tx = 4t.$$

Rješenje: Formalnim množenjem s dt dobivamo zapis diferencijalne jednadžbe u obliku diferencijalne forme:

$$(4 + t^2)dx + 2txdt = 4tdt. \tag{6.19}$$

Znamo da vrijedi $d(2t^2) = 4tdt$ i trebamo odrediti $f(t, x)$ takav da je $d(f(t, x)) = (4 + t^2)dx + 2txdt$, pri čemu je d potpuni diferencijal. Dakle, određujemo $f(t, x)$ iz sljedećih uvjeta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 4 + t^2 \Rightarrow f(t, x) = (4 + t^2)x + \Psi(t),$$

te

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = 2tx \implies f(t,x) = t^2x + \varphi(x).$$

Sada dobivamo jednakost:

$$4x + t^2x + \Psi(t) = t^2x + \varphi(x),$$

iz koje slijedi:

$$\Psi(t) = \varphi(x) - 4x \iff \Psi(t) = C = \varphi(x) - 4x.$$

Dakle, imamo $\Psi(t) = C$ te $\varphi(x) = 4x + C$, pa imamo:

$$f(t,x) = t^2x + 4x + C = x(t^2+4) + C.$$

Sada iz jednadžbe (6.19) dobivamo:

$$d((4+t^2)x + C) = d(2t^2)$$

iz čega imamo:

$$(4+t^2)x = 2t^2 + C.$$

Napokon, prvi integral početne jednadžbe dan je u sljedećem obliku:

$$x(t) = \frac{2t^2}{4+t^2} + \frac{C}{4+t^2}\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Uočimo da u ovom zadatku nismo direktno pratili postupak iz prethodnih primjera, već smo si malo olakšali postupak tako da nismo razmatrali cijelu diferencijalnu formu pri traženju potencijala (izostavili smo član $4tdt$ jer smo taj član jednostavno zapisali u obliku potpunog diferencijala). □

Zadatak 6.2. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$(2t + 3t^2x)dt + (t^3 - 3x^2)dx = 0.$$

Rješenje: Uvedimo najprije funkcije: $f_1(t,x) = 2t + 3t^2x$ te $f_2(t,x) = t^3 - 3x^2$. Očito vrijedi $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Provjerimo uvjet egzaktnosti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = 3t^2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x) = 3t^2,$$

to jest, vrijedi uvjet:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x).$$

Dakle, jednadžba je egzaktna. Tražimo funkciju F koja daje prvi integral, tj. za koju vrijedi $\nabla F(t,x) = (f_1, f_2)(t,x)$. Dakle, mora vrijediti

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = f_1(t,x) = 2t + 3t^2x,$$

te

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = f_2(t,x) = t^3 - 3x^2.$$

Rješenje je dano u sljedećem obliku (vidi Napomenu 6.4):

$$F(t,x) = \int (2t + 3t^2 x)dt + \int (t^3 - 3x^2)dx - \int\int 3t^2 dtdx = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, imamo:

$$t^2 + t^3 x + t^3 x - x^3 - t^3 x = C,\ C \in \mathbb{R},$$

to jest:

$$t^2 + t^3 x - x^3 = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 6.3. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$\Big(\frac{t}{\sin x} + 2\Big)dt + \frac{(t^2+1)\cos x}{\cos(2x) - 1}dx = 0.$$

Rješenje: Nužno je $\sin x \neq 0$ te $\cos(2x) - 1 \neq 0$, što je ekvivalentno sa $\sin^2 x \neq 0$, tj. $\sin x \neq 0$. Definiramo funkcije:

$$f_1(t,x) = \frac{t}{\sin x} + 2\,, \quad f_2(t,x) = \frac{(t^2+1)\cos x}{\cos(2x) - 1}\,.$$

Očito vrijedi da su funkcije f_1 i f_2 klase C^1 na prirodnoj domeni, tj. na skupu $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : \sin x \neq 0\}$. Nadalje, imamo:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = -\frac{t\cos x}{\sin^2 x}\,, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x) = \frac{2t\cos x}{\cos(2x) - 1} = -t\frac{\cos x}{\sin^2 x}\,.$$

Za svaki $k \in \mathbb{Z}$ je skup $\mathbb{R} \times \langle k\pi, (k+1)\pi\rangle$ otvoren i 1-povezan, te je sadržan u prirodnoj domeni funkcija f_1 i f_2, pa na njemu možemo primijeniti nužan i dovoljan uvjet za egzaktne jednadžbe (6.6). Dakle, kako vrijedi

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x)$$

slijedi da je jednadžba egzaktna. Tražimo prvi integral, tj. funkciju F (vidi Napomenu 6.4):

$$F(t,x) = \int \Big(\frac{t}{\sin x} + 2\Big)dt + \int \frac{(t^2+1)\cos x}{-2\sin^2 x}dx + \int\int t\frac{\cos x}{\sin^2 x}dtdx = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, imamo:

$$\frac{t^2}{2\sin x} + 2t + \frac{t^2+1}{2\sin x} - \frac{t^2}{2\sin x} = C,\ C \in \mathbb{R},$$

iz čega dobivamo:

$$\frac{t^2}{2\sin x} + 2t + \frac{1}{2\sin x} = C,\ C \in \mathbb{R},$$

što je prvi integral početne jednadžbe.

Zadatak smo mogli riješiti i na sljedeći način: tražimo funkciju Ψ takvu da vrijedi:

$$\partial_t \Psi = \frac{t}{\sin x} + 2 \Rightarrow \Psi = \frac{t^2}{2\sin x} + 2t + C(x),$$

te:

$$\partial_x \Psi = \frac{(t^2+1)\cos x}{\cos(2x) - 1} = -\frac{t^2 \cos x}{2\sin^2 x} + C'(x).$$

Dakle, sada imamo:

$$C'(x) = \frac{\cos x}{\cos(2x) - 1} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x},$$

pa iz toga dobivamo:

$$C(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{2\sin^2 x} = \frac{1}{2\sin x} + C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 6.4. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$2t(1+\sqrt{t^2-x})dt - \sqrt{t^2-x}dx = 0.$$

Rješenje: Uvodimo sljedeće funkcije: $f_1(t,x) = 2t(1+\sqrt{t^2-x})$ i $f_2(t,x) = -\sqrt{t^2-x}$. One su definirane na skupu $\{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : t^2 \geq x\}$ (što je otvoren i 1-povezan skup), te su na njemu i glatke.

Vrijedi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = \frac{-2t}{2\sqrt{t^2-x}} = -\frac{t}{\sqrt{t^2-x}}\,,$$

te:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x) = -\frac{t}{\sqrt{t^2-x}}\,.$$

Sada imamo zadovoljen uvjet egzaktnosti:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial f_2}{\partial t}(t,x)\,,$$

pa je jednadžba egzaktna. Tražimo prvi integral, tj. funkciju F u sljedećem obliku (vidi Napomenu 6.4):

$$F(t,x) = \int 2t(1+\sqrt{t^2-x})dt - \int \sqrt{t^2-x}dx + \int\int \frac{t}{\sqrt{t^2-x}}dtdx = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Laganim računom dobivamo:

$$t^2 + \frac{2}{3}\sqrt{(t^2-x)^3} = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 6.5. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$tdt = (tdx + xdt)\sqrt{1+t^2}. \tag{6.20}$$

Rješenje: Očito je $\sqrt{1+t^2} > 0$, pa dijelimo jednadžbu (6.20) s tim izrazom:

$$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt = tdx + xdt. \tag{6.21}$$

Jednadžbu (6.21) možemo zapisati pomoću potpunog diferencijala na sljedeći način:

$$d(\sqrt{1+t^2}) = d(tx).$$

Dakle, jednadžbu smo sveli na potpuni diferencijal pa imamo:

$$\sqrt{1+t^2} = tx + C,\ C \in \mathbb{R},$$

što je upravo traženi prvi integral. □

Zadatak 6.6. Odredite prvi integral jednadžbe:

$$xdt - tdx = 2t^3 \operatorname{tg} \frac{x}{t} dt. \tag{6.22}$$

Rješenje: Očito $t = 0$ nije u domeni rješenja. Podijelimo jednadžbu (6.22) s t^2:

$$\frac{xdt - tdx}{t^2} = 2t \operatorname{tg} \frac{x}{t} dt\,,$$

iz čega slijedi

$$-d\left(\frac{x}{t}\right) = 2t \operatorname{tg} \frac{x}{t} dt$$

(sveli smo lijevu stranu na potpuni diferencijal).

Uvodimo supstituciju $u = \frac{x}{t}$, pa imamo:

$$-du = 2t \operatorname{tg} u dt.$$

Sada imamo:

$$\int \frac{\cos u}{\sin u} du = -\int 2t dt,$$

te integracijom dobivamo:

$$\ln|\sin u| = -t^2 + C,\ C \in \mathbb{R},$$

iz čega slijedi:

$$|\sin u| = Ce^{-t^2},\ C > 0.$$

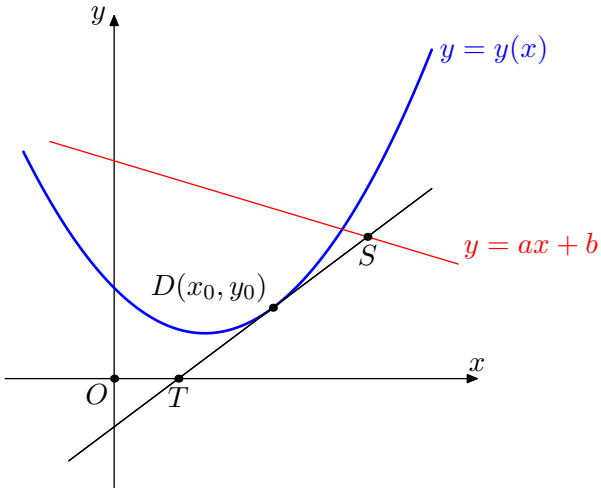
Napokon, dobivamo:

$$\left|\sin \frac{x}{t}\right| = Ce^{-t^2},\ C > 0,$$

iz čega imamo:

$$\sin \frac{x}{t} = Ce^{-t^2}, C \neq 0.$$

□



Slika 12: Skica tražene krivulje.

Zadatak 6.7. Odredite krivulje sa svojstvom da je u svakoj točki krivulje odsječak tangente između x osi i pravca $y = ax + b$ podijeljen točkom dodira na dva jednaka dijela.

Rješenje: Tražimo krivulju $y = y(x)$. Diralište tangente označavamo s $D(x_0, y_0)$. Jednadžba tangente u točki D dana je s:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Odredimo točku $T(x, 0)$:

$$-y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

Dakle, imamo točku:

$$T\Big(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, 0\Big).$$

Odredimo točku S (leži na pravcu $y = ax + b$):

$$ax + b - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Sada lako dobivamo $S(x_S, y_S)$, gdje je:

$$x_S = \frac{b - y_0 + y'(x_0)x_0}{y'(x_0) - a}\,, \quad y_S = a\frac{b - y_0 + y'(x_0)x_0}{y'(x_0) - a} + b\,.$$

Uočimo da je $y'(x_0) \neq 0$ (u protivnom tangenta ne bi sjekla x-os) te $y'(x_0) \neq a$ (u protivnom tangenta ne bi sjekla pravac $y = ax + b$).

Iz uvjeta zadatka znamo da točka dirališta D raspolavlja dužinu $\overline{ST}$:

$$x_D = \frac{1}{2}(x_S + x_T), \quad y_D = \frac{1}{2}(y_S + y_T). \tag{6.23}$$

Nakon sređivanja, iz jednadžbe za x_D dobivamo:

$$y'(x_0)(2y_0 - ax_0 - b) = ay_0. \tag{6.24}$$

Iz jednadžbe za y_D slijedi:

$$y_0 = \frac{1}{2}\Big(a\frac{b - y_0 + y'(x_0)x_0}{y'(x_0) - a} + b + 0\Big). \tag{6.25}$$

Iz jednadžbe (6.25) opet se dobiva jednadžba (6.24). Dakle, dovoljno je provjeriti samo jedan od uvjeta (6.23) jer su točke S, D, T kolinearne (leže na tangenti).

Sada zbog proizvoljnosti točke dirališta $D(x_0, y_0)$ imamo jednadžbu:

$$y'(2y - ax - b) = ay. \tag{6.26}$$

Iz jednadžbe (6.26) slijedi:

$$-aydx + (2y - ax - b)dy = 0.$$

Definirajmo funkcije $f_1(x, y) = -ay$ i $f_2(x, y) = 2y - ax - b$. Očito vrijedi $f_1, f_2 \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Nadalje, vidimo da vrijedi:

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = -a\,,$$

te

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = -a\,,$$

pa je nužan i dovoljan uvjet (6.6) da jednadžba bude egzaktna zadovoljen.

Tražimo funkciju F koja daje prvi integral. Po Napomeni 6.4 vrijedi:

$$F(x, y) = \int(-ay)dx + \int(2y - ax - b)dy - \int\int(-a)dxdy = C,\ C \in \mathbb{R},$$

iz čega slijedi:

$$-axy + y^2 - axy - by + axy = C,\ C \in \mathbb{R},$$

te napokon:

$$y^2 - by - axy = C,\ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 6.8. Odredite prvi integral sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $x' = \frac{2tx}{x^2 - t^2}$,

b) $(2 - 9tx^2)tdt + (4x^2 - 6t^3)xdx = 0$,

c) $\frac{3t^2 + x^2}{x^2}dt - \frac{2t^3 + 5x}{x^3}dx = 0$,

d) $(1 + x^2\sin(2t))dt - 2x\cos^2 tdx = 0$,

e) $x' = \frac{3t^2x^2 - x + 1}{t - 2x - 2t^3x}$.

Rješenje: a) $F(t, x) = \frac{x^3}{3} - t^2x + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $F(t, x) = x^4 - 3t^3x^2 + t^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$; c) $F(t, x) = \frac{t^3}{x^2} + t + \frac{5}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$; d) $F(t, x) = t - x^2\cos^2 t + C$, $C \in \mathbb{R}$; e) $F(t, x) = t^3x^2 - tx + t + x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$.

7. Sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

7.1. Opća teorija

Krenimo s uvodnim motivacijskim primjerom.

Primjer 7.1. Promotrimo Volterrin model za populaciju koja se sastoji od dvije vrste: plijen i grabežljivac. Model je dan s:

$$\begin{cases} G'(t) = G(t)(aP(t) - b) \\ P'(t) = P(t)(-cG(t) + d)\,, \end{cases} \tag{7.1}$$

pri čemu nam varijabla t označava vremenski trenutak (u odabranim jedinicama; npr. minuta, 20 minuta, sat itd.), $P(t)$ i $G(t)$ redom broj jedinki plijena i grabežljivca u trenutku t, dok su a, b, c, d dane pozitivne konstante.

Pretpostavljamo da je promatrani sustav zatvoren (pojedine jedinke ne mogu ući ili otići iz promatranog područja; npr. ribe u akvariju), da grabežljivci nemaju prirodnih neprijatelja te da se hrane isključivo s jedinkama plijena, da su grabežljivici jedini prirodni neprijatelji plijena te da se plijen hrani sirovinom za koju pretpostavljamo da je dostupna u neograničenim količinama.

Izbor parametara a, b, c, d je ključan da ovaj matematički model dobro opisuje promatranu populaciju. Njihove vrijednosti se obično određuju empirijski (npr. kroz određen vremenski period je promatrana populacija *na terenu* i zapisivani su točni podaci), dok se onda za daljnje proučavanje populacije (i eventualna predviđanja stanja u budućnosti) može koristiti ovaj matematički model.

Promotrimo ponašanje ovog modela u nekim posebnim situacijama. Ako je $G \equiv 0$, tada funkcija P zadovoljava diferencijalnu jednadžbu $P' = dP$. Njenim rješavanjem dobivamo da za $P(0) > 0$ vrijedi $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$ (jer $d > 0$). Dakle, ako nema grabežljivaca, broj jedinki plijena neomeđeno raste. Kako je to opravdano time što plijen nema prirodnog neprijatelja, možemo biti zadovoljni s modelom. Međutim, model ipak nije idealan jer je jasno da neomeđeni rast neke populacije u stvarnosti nije moguć (samo stanište zbog prostornih i prirodnih kapaciteta može podnijeti samo konačan broj odgovarajućih jedinki).

S druge strane, za $P \equiv 0$ dobivamo $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$ (uz $G(0) \geq 0$), što objašnjavamo činjenicom da su bez jediniki plijena grabežljivci ostali bez hrane pa izumiru.

Pogledajmo koja su još stacionarna rješenja dopuštena (rješenja koja su dana kao konstantne funkcije). Ako su G i P konstantne funkcije, iz (7.1) dobivamo da nužno mora vrijediti:

$$\begin{aligned} G(aP - b) &= 0 \\ P(-cG + d) &= 0\,. \end{aligned}$$

Ovaj sustav jednadžbi je zadovoljen samo u dva slučaja:

(i) $G = P = 0$, i

(ii) $G = \frac{d}{c}$, $P = \frac{b}{a}$.

U vektorskom slučaju je opis ravnotežnih stanja složeniji od skalarnog slučaja gdje smo imali dvije mogućnosti: stabilno i nestabilno ravnotežno stanje (vidi Primjer 3.4). Više o ovoj temi možete pronaći u [9, Poglavlje 14].

Pogledajmo sada kako možemo sustav (7.1) zapisati u matričnom obliku.

Definirajmo $u_1 := G$, $u_2 := P$, te vektorsku funkciju:

$$\mathbf{U} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} .$$

Nadalje, uvodimo $f_1(t, u_1, u_2) := u_1(au_2 - b)$, $f_2(t, u_1, u_2) := u_2(-cu_1 + d)$, te vektorsku funkciju:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{U}) := \begin{bmatrix} f_1(t, u_1, u_2) \\ f_2(t, u_1, u_2) \end{bmatrix} .$$

Time sustav (7.1) možemo ekvivalentno zapisati s:

$$\mathbf{U}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{U}(t)) . \tag{7.2}$$

Uočimo da je ovaj matrični zapis prirodno poopćenje skalarne obične diferencijalne jednadžbe prvog reda $u'(t) = f(t, u(t))$.

Općenito, sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda s $n \in \mathbb{N}$ jednadžbi zapisujemo s:

$$\mathbf{U}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{U}(x)) , \tag{7.3}$$

pri čemu je $\mathbf{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dana funkcija (desna strana), a $\mathbf{U} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ nepoznata (vektorska) funkcija.

Vektorske funkcije ćemo ponekad zapisivati kao jednostupčane matrice, a ponekad kao uređene n-torke, odnosno elemente prostora $\mathbb{R}^n$. Dakle, ovdje ćemo implicitno podrazumijavati izomorfizam vektorskih prostora $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (jednostupčane matrice nad poljem realnih brojeva).

Sada nam je cilj poopćiti definicije i rezultate Odjeljka 2 na vektorski slučaj dan s (7.3). Krenimo s definicijom rješenja.

Definicija 7.2. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup i $\mathbf{F} \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Kažemo da je funkcija $\mathbf{U} : I \to \mathbb{R}^n$ *rješenje diferencijalne jednadžbe* (7.3) ako je:

a) I interval u $\mathbb{R}$.

b) $\mathbf{U} \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$.

c) $\Gamma_{\mathbf{U}} := \Big\{ \big(x, \mathbf{U}(x)\big) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in I \Big\} \subseteq \Omega$.

d) (7.3) vrijedi za sve $x \in I$.

Nadalje, za uređeni par $(x_0, \mathbf{U}_0) \in \Omega$ takav da je $x_0 \in I$ kažemo da je $\mathbf{U} : I \to \mathbb{R}^n$ *rješenje Cauchyjeve zadaće*:

$$\begin{cases} \mathbf{U}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{U}(x)) \\ \mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}_0 , \end{cases} \tag{7.4}$$

ako je $\mathbf{U}$ rješenje jednadžbe (7.3) i vrijedi $\mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}_0$.

Uočimo da za $n = 1$ prethodna definicija odgovara ranije uvedenim definicijama 2.1 i 2.2 u skalarnom slučaju.

U potpunosti analogna tvrdnja Picardovog teorema vrijedi i u vektorskom slučaju, a dokaz prati istu ideju koju smo opisali u Odjeljku 2. Jedina razlika je da za opis Lipschitzovog uvjeta trebamo apsolutnu vrijednost (norma na vektorskom prostoru $\mathbb{R}$) zamijeniti s nekom normom $\|\cdot\|$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$.

Teorem 7.3 (Picardov teorem u vektorskom slučaju)**.** *Neka je $P \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ $(n+1)$-dimenzio-*
nalan zatvoren kvadar i neka je $\mathbf{F} \in C(P; \mathbb{R}^n)$ Lipschitz neprekidna po posljednjih n varijabli, tj. postoji konstanta $L > 0$ takva da vrijedi:

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{U}) - \mathbf{F}(x, \mathbf{V})\| \leq L\|\mathbf{U} - \mathbf{V}\| \,, \quad (x, \mathbf{U}), (x, \mathbf{V}) \in P \,,$$

gdje je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$.

Tada za svaki uređeni par $(x_0, \mathbf{U}_0) \in \operatorname{Int} P$ postoji $\delta > 0$ takav da Cauchyjeva zadaća (7.4) ima jedinstveno rješenja na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$.

Napomena 7.4. Kao i u slučaju $n = 1$, Lipschitz neprekidnost možemo provjeriti promatranjem određenih parcijalnih derivacija. Preciznije, ako su za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ funkcije $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ neprekidne na P, tada je $\mathbf{F}$ Lipschitz neprekidna po $\mathbf{U}$.

Vratimo se sada na prvi primjer i provjerimo pretpostavke Picardovog teorema.

Primjer 7.5. Promotrimo sustav (7.1), tj. sustav (7.2), i pogledajmo za koje $(x_0, \mathbf{U}_0)$ su pretpostavke Picardovog teorema ispunjene.

Prisjetimo se da je funkcija $\mathbf{F}$ dana s:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{U}) = \begin{bmatrix} u_1(au_2 - b) \\ u_2(-cu_1 + d) \end{bmatrix} .$$

Komponente funkcije $\mathbf{F}$ su polinomi u varijabli $\mathbf{U}$, a o varijabli t ne ovise. Dakle, funkcija $\mathbf{F}$ je klase C^∞ na cijelom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$.

Ispitajemo pripadne parcijalne derivacije:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial u_1}(t, \mathbf{U}) &= au_2 - b \,, & \frac{\partial f_1}{\partial u_2}(t, \mathbf{U}) &= au_1 \,, \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1}(t, \mathbf{U}) &= -cu_2 \,, & \frac{\partial f_2}{\partial u_2}(t, \mathbf{U}) &= -cu_1 + d \,. \end{aligned}$$

Kako su sve parcijalne derivacije očito također klase C^∞ na cijelom prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$, po prethodnoj napomeni zaključujemo da su pretpostavke Picardovog teorema ispunjene za svaki $(x_0, \mathbf{U}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, pa time za svaki početni uvjet naš sustav ima (lokalno) rješenje.

Pogledajmo još jedan primjer linearnog sustava diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 7.6 (Linearni sustav običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda)**.** U (7.3) promatramo $\mathbf{F}(x, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U}+\mathbf{B}(x)$, pri čemu su matrična funkcija $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ i vektorska funkcija $\mathbf{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dane.

Iz definicije funkcije $\mathbf{F}$ je jasno da je ona neprekidna po $\mathbf{U}$ na cijelom prostoru $\mathbb{R}^n$, dok je po x neprekidna tamo gdje su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ neprekidne.

Nadalje, vrijedi $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(x, \mathbf{U}) = a_{ij}(x)$, pri čemu je $\mathbf{A}(x) = [a_{ij}(x)]$.

Dakle, po prethodnoj napomeni, ako su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ neprekidne na cijelom $\mathbb{R}$, tada su pretpostavke Picardovog teorema ispunjene za svaki $(x_0, \mathbf{U}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, a time je osigurano i postojanje lokalnog rješenja.

Za linearne sustave se rezultat prethodnog primjera (dobiven iz Picardovog teorema) može dodatno pojačati s rezultatom postojanja *globalnog* rješenja (kao i u skalarnom slučaju; vidi Teorem 4.2). Rezultat navodimo bez dokaza.

Teorem 7.7. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, te $\mathbf{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$, $\mathbf{B} \in C(I; \mathbb{R}^n)$.*

Tada za svaki uređeni par $(x_0, \mathbf{U}_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ Cauchyjeva zadaća (7.4), uz $\mathbf{F}(x, \mathbf{U}) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U} + \mathbf{B}(x)$, ima jedinstveno rješenje na cijelom I.

Strategija prezentirana u Odjeljku 4 s kojom smo konstruktivno pokazali postojanje globalnog rješenja je u ovom slučaju znatno složenija (vidi [9, Odjeljak 10]), te je nećemo u toj općenitosti obrađivati. Postojanje globalnog rješenje se alternativno može pokazati korištenjem teorije neproširivog rješenja (vidi uputu uz [9, Teorem 8.6]).

U idućoj točki proučavamo neka dodatna svojstva linearnih sustava.

7.2. Linearni sustavi prvog reda

Za $\mathbf{A} \in C(I; M_n(\mathbb{R}))$ i $\mathbf{B} \in C(I; \mathbb{R}^n)$, gdje je $I \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni interval, promatramo sustav:

$$\mathbf{U}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x) + \mathbf{B}(x). \tag{7.5}$$

Želimo analizirati skup rješenja sustava (7.5) (kako nismo zadali uvjet $\mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}_0$, rješenje neće biti jedinstveno).

Promotrimo najprije pripadnu homogenu jednadžbu:

$$\mathbf{U}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x). \tag{7.6}$$

Definiramo:

$$\mathcal{U} := \{\mathbf{U} \in C^1(I; \mathbb{R}^n) : \ \mathbf{U} \text{ rješenje od } (7.6)\}.$$

Teorem 7.8. *Skup svih rješenja $\mathcal{U}$ je vektorski potprostor prostora $C^1(I; \mathbb{R}^n)$.*

Dokaz: $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ uz operaciju zbrajanja funkcija i množenja skalarom, pa samo trebamo pokazati:

(1) Ako su $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{U}$, tj. rješenja od (7.6), tada je $\mathbf{U} + \mathbf{V}$ rješenje od (7.6).

(2) Ako je $\mathbf{U}$ rješenje od (7.6), tada je za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\mathbf{U}$ rješenje od (7.6).

Pokažimo najprije tvrdnju (1). Za proizvoljan $x \in I$ imamo:

$$\begin{aligned}(\mathbf{U}+\mathbf{V})'(x) &= \mathbf{U}'(x)+\mathbf{V}'(x)\\ &= \mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x)+\mathbf{A}(x)\mathbf{V}(x)\\ &= \mathbf{A}(x)(\mathbf{U}(x)+\mathbf{V}(x)) = \mathbf{A}(x)(\mathbf{U}+\mathbf{V})(x)\,.\end{aligned}$$

Sada pokazujemo tvrdnju (2):

$$\begin{aligned}(\alpha\mathbf{U})'(x) &= \alpha\mathbf{U}'(x)\\ &= \alpha\mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x)\\ &= \mathbf{A}(x)(\alpha\mathbf{U}(x)) = \mathbf{A}(x)(\alpha\mathbf{U})(x)\,.\end{aligned}$$

□

Teorem 7.9. $\dim\mathcal{U} = n$.

Dokaz: Za fiksan $x_0 \in I$ definiramo preslikavanje $\Phi_{x_0}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, $\Phi_{x_0}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}(x_0)$. Pokažimo da je Φ_{x_0} izomorfizam (bijektivan linearan operator).

Linearnost. Za $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{U}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\Phi_{x_0}(\mathbf{U}+\mathbf{V}) &= (\mathbf{U}+\mathbf{V})(x_0)\\ &= \mathbf{U}(x_0)+\mathbf{V}(x_0) = \Phi_{x_0}(\mathbf{U})+\Phi_{x_0}(\mathbf{V}).\end{aligned}$$

Za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ imamo:

$$\Phi_{x_0}(\alpha\mathbf{U}) = (\alpha\mathbf{U})(x_0) = \alpha\mathbf{U}(x_0) = \alpha\Phi_{x_0}(\mathbf{U}).$$

Surjektivnost. Neka je $\mathbf{U}_0 \in \mathbb{R}^n$ proizvoljan. Postoji li $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ takav da $\Phi_{x_0}(\mathbf{U}) = \mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}_0$? Da, po Teoremu 7.7 slijedi da postoji jedinstveni $\mathbf{U} \in C^1(I;\mathbb{R}^n)$ takav da vrijedi:

$$\begin{cases}\mathbf{U}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x),\\ \mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}_0.\end{cases}$$

Injektivnost. Neka su $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathcal{U}$ takvi da $\Phi_{x_0}(\mathbf{U}) = \Phi_{x_0}(\mathbf{V})$. Sada imamo $\Phi_{x_0}(\mathbf{U}-\mathbf{V}) = 0$, pa vrijedi $\mathbf{U} = \mathbf{V}$, tj. $\operatorname{Ker}\Phi_{x_0}(\mathbf{U}) = \{0\}$.

Dakle, $\Phi_{x_0}\colon \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ je linearna bijekcija. Sada imamo da je $\dim\mathcal{U} = \dim\mathbb{R}^n = n$. □

Dakle, prostor $\mathcal{U}$ (prostor linearno nezavisnih rješenja pripadne homogene jednadžbe (7.6)) je određen s n funkcija $\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^n$ (koje čine bazu prostora $\mathcal{U}$). Svaku takvu bazu zovemo *fundamentalno rješenje sustava* (7.5). Uočimo da fundamentalno rješenje ovisi samo o pripadnom homogenom sustavu (7.6).

Kako odrediti neka rješenja homogenog sustava (7.6)?

Pretpostavimo da je $\mathbf{A}$ konstantna matrica, te neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost i $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ pripadni svojstveni vektor.

Pokažimo da je $\mathbf{U}(x) := e^{\lambda x}\mathbf{V}$ rješenje od (7.6):

$$\begin{aligned}\mathbf{U}'(x) &= \lambda e^{\lambda x}\mathbf{V} = e^{\lambda x}(\lambda\mathbf{V}) = e^{\lambda x}\mathbf{A}\mathbf{V}\\ &= \mathbf{A}(e^{\lambda x}\mathbf{V}) = \mathbf{A}\mathbf{U}(x).\end{aligned}$$

Ukoliko je $\mathbf{A}$ dijagonalizabilna, tada bismo ovim postupkom dobili n rješenja homogene jednadžbe koji su onda kandidati za fundamentalno rješenje.

Primjer 7.10. Neka je $n = 2$ i $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Računamo:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Sada dobivamo da su $\lambda_1 = 3$ i $\lambda_2 = -1$ svojstvene vrijednosti.

Odredimo pripadne svojstvene vektore:

$$\lambda_1 = 3 \ldots \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi $-2x_1 + x_2 = 0$ te $x_2 = 2x_1$, pa dobivamo da je $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ odgovarajući svojstveni vektor.

Dalje računamo:

$$\lambda_2 = -1 \ldots \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

iz čega slijedi da je $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ odgovarajući svojstveni vektor.

Sada dobivamo da su:

$$\mathbf{U}^1(x) := e^{3x} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{U}^2(x) := e^{-x} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

rješenja jednadžbe $\mathbf{U}' = \mathbf{A}\mathbf{U}$.

Ukoliko su linearno nezavisni, onda čine fundamentalna rješenja:

$$\begin{aligned} &\alpha \mathbf{U}^1(x) + \beta \mathbf{U}^2(x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & e^{3x}\alpha + e^{-x}\beta = 0, \ 2e^{3x}\alpha - 2e^{-x}\beta = 0, \ x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{bmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Imamo jedinstveno rješenje ako i samo ako vrijedi:

$$(\exists x \in \mathbb{R})\ 0 \neq \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-x} \\ 2e^{3x} & -2e^{-x} \end{vmatrix} = -2e^{2x} - 2e^{2x} = -4e^{2x},$$

iz čega slijedi da je $\{\mathbf{U}^1, \mathbf{U}^2\}$ fundamentalno rješenje. Opće rješenje je sada oblika $\mathbf{U}(x) = C_1\mathbf{U}^1(x) + C_2\mathbf{U}^2(x)$.

Sljedeći teoremom se olakšava provjera linearne nezavisnosti.

Teorem 7.11. $\mathbf{U}^1, \ldots, \mathbf{U}^n$ *tvore fundamentalno rješenje sustava (7.5) ako i samo ako vrijedi* $\det \mathbf{W}(x) \neq 0$ *za neki* $x \in I$*, pri čemu je:*

$$\mathbf{W}(x) = [\mathbf{U}^1(x)\ \mathbf{U}^2(x)\ \ldots \mathbf{U}^n(x)] \in M_n(\mathbb{R}), \ x \in I,$$

matrica Wronskog.

Dokaz: Koristeći izomorfizam Φ_{x_0}. □

Vratimo se sada na skup rješenja od (7.5):

$$\mathcal{R} := \{\mathbf{U} \in C^1(I; \mathbb{R}^n) \colon \ \mathbf{U} \text{ rješenje od (7.5)}\}.$$

Vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 7.12. $\mathcal{R} = \mathbf{U}_p + \mathcal{U} := \{\mathbf{U}_p + \mathbf{U} \colon \ \mathbf{U} \in \mathcal{U}\}$, *gdje je* $\mathbf{U}_p$ *neko rješenje (7.5) (partikularno rješenje).*

Primjer 7.13. Neka je $n = 2$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Iz Primjera 7.10 znamo da je opće rješenje oblika $C_1(x)\mathbf{U}^1(x) + C_2(x)\mathbf{U}^2(x)$. Računamo:

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^{3x} + C_2(x)'e^{-x} &= 1, \\ 2C_1'(x)e^{3x} - 2C_2(x)'e^{-x} &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje sustava je dano u obliku $C_1(x) = -\frac{1}{4}e^{-3x} + D_1$, $C_2(x) = \frac{1}{4}e^{x} + D_2$, za $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$.

Zadatak 7.1 (Domaća zadaća)**.** Riješite sustav:

$$\begin{cases} u' = 2u - v - 3 \\ v' = -2u + 3v + 1 \\ u(0) = 2 \\ v(0) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: $u(x) = \frac{1}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{x} + 2$, $v(x) = -\frac{2}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^{x} + 1$

8. Diferencijalne jednadžbe višeg reda

8.1. Linearne jednadžbe višeg reda s konstantnim koeficijentima

Opća jednadžba višeg reda (n-tog reda) je dana s:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', \dots, u^{(n-1)}),$$

ali mi ćemo promatrati samo poseban slučaj:

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + a_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + a_1 u' + a_0 u = b(x), \tag{8.1}$$

pri čemu su $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$ (konstante) i $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Jednadžbu (8.1) zovemo linearna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima.

Zapišimo je kao linearni sustav (7.5). Definiramo $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ s

$$\begin{aligned} &U_1(x) := u(x),\\ &U_2(x) := u'(x),\\ &\dots\\ &U_n(x) := u^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Uočimo da vrijedi $U_1'(x) = u'(x) = U_2(x)$, odnosno općenito imamo:

$$U_k'(x) = U_{k+1}(x),\ \ k = 1, \dots, n-1.$$

Sada promatramo sustav:

$$\begin{cases} U_1'(x) = U_2(x)\\ U_2'(x) = U_3(x)\\ \dots\\ U_{n-1}'(x) = U_n(x)\\ U_n'(x) \overset{(8.1)}{=} -a_0U_1(x) - a_1U_2(x) - \cdots - a_{n-1}U_n(x) + b(x), \end{cases}$$

koji u vektorskom obliku poprima oblik:

$$\mathbf{U}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{U}(x) + \mathbf{B}(x), \tag{8.2}$$

pri čemu je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ & & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},\ \mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ b(x) \end{bmatrix}.$$

Formulacije (8.1) i (8.2) su ekvivalentne na sljedeći način.

Lema 8.1. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni interval, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $b \in C(I)$. Ako je $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ rješenje sustava (8.2), tada je funkcija $u := U_1 \in C^n(I)$ i u je rješenje (8.1). Obratno, ako je $u \in C^n(I)$ rješenje sustava (8.1), tada je $\mathbf{U} := (u, u', \dots, u^{(n-1)}) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ rješenje sustava (8.2).*

Dokaz: Neka je $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$ rješenje sustava (8.2) na I. Definirajmo $u := U_1$. Očito je $u \in C^1(I)$. Iz prve jednadžbe (8.2) imamo:

$$u' = U_1' = U_2.$$

Kako je $U_2 \in C^1(I)$, tada je i $u' \in C^1(I)$, pa je $u \in C^2(I)$. Iz sljedećih jednadžbi analogno dobivamo:

$$\begin{aligned} &u'' = U_2' = U_3 \in C^1(I) \\ &\dots \\ &u^{(n-1)} = U_{n-1}' = U_n \in C^1(I) \Rightarrow u \in C^n(I). \end{aligned}$$

Iz posljednje jednadžbe u (8.2) konačno imamo:

$$\begin{aligned} u^{(n)} = U_n' &= -a_0 U_1 - a_1 U_2 - \dots - a_{n-1} U_n + b \\ &= -a_0 u - a_1 u' - \dots - a_{n-1} u^{(n-1)} + b. \end{aligned}$$

Obrat slijedi iz raspisa prije iskaza ove leme. □

Sada možemo prenijeti prethodne rezultate o linearnim sustavima (teoremi 7.7, 7.8, 7.9, 7.12) na linearne jednadžbe višeg reda oblika (8.1).

Za početak, uočimo da se početni uvjet za (8.2):

$$\mathbf{U}(x_0) = \mathbf{U}^0 = (U_1^0, \dots, U_n^0) \in \mathbb{R}^n$$

koristeći prethodnu lemu prebacuje u sljedeći početni uvjet za (8.1):

$$\begin{cases} u(x_0) = U_1^0 \\ u'(x_0) = U_2^0 \\ \dots \\ u^{(n-1)}(x_0) = U_n^0. \end{cases} \tag{8.3}$$

Teorem 8.2. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval, $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ i $b \in C(I)$.*

a) Za svake $x_0 \in I$ i $(U_1^0, \dots, U_n^0) \in \mathbb{R}^n$ početna zadaća (8.1)+(8.3) ima jedinstveno rješenje $u \in C^n(I)$.

b) Neka je $b \equiv 0$ (homogena jednadžba). Tada je

$$\tilde{\mathcal{U}} := \{u \in C^n(I) \colon \ u \text{ rješenje od } (8.1)\},$$

vektorski prostor i $\dim \tilde{\mathcal{U}} = n$.

c) Neka je $\tilde{\mathcal{R}} := \{u \in C^n(I)\colon\ u$ *rješenje od* (8.1)$\}$. *Tada je*

$$\tilde{\mathcal{R}} = u_p + \tilde{\mathcal{U}} = \{u_p + u\colon u \in \tilde{\mathcal{U}}\},$$

gdje je u_p *jedno rješenje (8.1) (partikularno rješenje).*

Konkretno rješavanje jednadžbe (8.1) radimo kao i ranije kod linearnih jednadžbi:

1) zapisujemo sva rješenja pripadne homogene jednadžbe

2) konstruiramo jedno partikularno rješenje (metoda varijacije konstanti ili metoda neodređenih koeficijenata)

3) parametre dobivamo iz početnih uvjeta ako su dani

Za 1) bitnu ulogu igraju svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$ iz (8.2), ali ova matrica općenito nije dijagonalizabilna pa je postupak kompliciraniji.

Karakteristični polinom pridružen jednadžbi (8.1) dan je sa

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

pri čemu je $P(\lambda) = \det(\lambda I - \mathbf{A})$, pri čemu je $\mathbf{A}$ iz (8.2), tj. nultočke polinoma P su svojstvene vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

Realne nultočke polinoma P označavamo sa $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, kompleksne nultočke polinoma P sa $\lambda_{m+1} = \alpha_{m+1} + i\beta_{m+1}, \ldots, \lambda_{m+p} = \alpha_{m+p} + i\beta_{m+p}$, $\overline{\lambda}_{m+1} = \alpha_{m+1} - i\beta_{m+1}, \ldots, \overline{\lambda}_{m+p} = \alpha_{m+p} - i\beta_{m+p}$, algebarske kratnosti λ_i (kratnosti nultočke) sa k_i.

$\tilde{\mathcal{U}}$ sadrži linearne kombinacije sljedećih funkcija (ukupno n funkcija):

$$x^l e^{\lambda_i x},\ l = 0, 1, \ldots, k_i - 1,\ i = 1, \ldots, m,$$
$$x^l e^{\alpha_i x}\cos(\beta_i x),\ x^l e^{\alpha_i x}\sin(\beta_i x),\ l = 0, 1, \ldots, k_i - 1,\ i = m+1, \ldots, m+p.$$

Za funkciju b oblika

$$b(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + Q(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

pri čemu su P i Q polinomi označimo s $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Razlikujemo dva slučaja:

a) Ako $\alpha + i\beta$ nije nultočka karakterističnog polinoma, onda partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$u_p(x) = R(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + S(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x),$$

gdje su R i S polinomi stupnja m s neodređenim koeficijentima koje određujemo uvrštavanjem funkcije u_p u odgovarajuću jednadžbu.

b) Ako je $\alpha + i\beta$ nultočka kratnosti k karakterističnog polinoma, onda partikularno rješenje tražimo u obliku

$$u_p(x) = x^k(R(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x) + S(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)),$$

gdje su R i S polinomi stupnja m s neodređenim koeficijentima koje određujemo uvrštavanjem funkcije u_p u odgovarajuću jednadžbu.

Prije rješavanja konkretnih zadataka, rezimirajmo postupak rješavanja u nastavku.

Promatramo homogenu diferencijalnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima:

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = 0. \tag{8.4}$$

Rješenje jednadžbe dobivamo rješavajući karakterističnu jednadžbu:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{8.5}$$

Linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe formiramo ovisno o karakteru λ, prema sljedećim pravilima:

1) svakoj jednostrukoj realnoj nultočki λ_i pridružujemo rješenje $u_i = e^{\lambda_i x}$

2) svakom jednostrukom paru kompleksno konjugiranih rješenja jednadžbe (8.5) $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ pridružimo linearno nezavisna rješenja $u_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ i $u_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

3) svakom višestrukom realnom rješenju λ kratnosti k pridružimo k linearno nezavisnih rješenja $u_1 = e^{\lambda x}$, $u_2 = xe^{\lambda x}$, $\ldots$, $u_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$

4) svakom višestrukom paru kompleksno konjugiranih rješenja $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ kratnosti k pridružimo $2k$ linearno nezavisnih rješenja

$$\begin{aligned} u_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x), u_2 = xe^{\alpha x}\cos(\beta x), \ldots, u_k = x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \\ u_{k+1} = e^{\alpha x}\sin(\beta x), u_{k+2} = xe^{\alpha x}\sin(\beta x), \ldots, u_{2k} = x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,. \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i,\ C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}.$$

Promatrajmo sada nehomogenu linearnu jednadžbu s konstantnim koeficijentima:

$$u^{(n)} + a_{n-1}u^{(n-1)} + \cdots + a_1u' + a_0u = b(x), \tag{8.6}$$

gdje su $a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{R}$ te $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Opće rješenje jednadžbe (8.6) je suma općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe i jednog partikularnog rješenja jednadžbe (8.6).

Budući da znamo odrediti opće rješenje homogene linearne jednadžbe (8.4) s konstantnim koeficijentima, preostaje odrediti partikularno rješenje u_p od (8.6).

Partikularno rješenje često je moguće odrediti iz oblika funkcije b, što nas navodi na metodu neodređenih koeficijenata. Ako je $b(x)$ u nehomogenoj linearnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima oblika:

$$b(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)], \tag{8.7}$$

gdje su $\alpha, \beta = const.$, P_n i Q_m polinomi stupnja n, odnosno m, tada opće rješenje jednadžbe (8.6) nalazimo metodom neodređenih koeficijenata.

Partikularno rješenje u_p tražimo u obliku:

$$u_p(x) = x^k e^{\alpha x}[R_l(x)\cos(\beta x) + S_l(x)\sin(\beta x)],$$

pri čemu je k kratnost korijena $\lambda = \alpha \pm \beta i$ u pripadnoj karakterističnoj jednadžbi homogene jednadžbe (ako λ nije korijen, imamo da je $k = 0$) te R_l i S_l polinomi s neodređenih koeficijentima stupnja $l = \max\{n, m\}$.

Koeficijente polinoma $R_l(x)$ i $S_l(x)$ određujemo iz uvjeta da funkcija x_p identički zadovoljava jednadžbu (8.6).

Funkcijama tipa (8.7) obuhvaćeni su i specijalni slučajevi. Napravimo tablični pregled svih slučajeva i odgovarajućih partikularnih rješenja:

koeficijenti	$b(x)$	$u_p(x)$
$\alpha = \beta = 0$	$P_n(x)$	$x^k R_n(x)$
$\beta = n = 0$	$Ae^{\alpha x}$	$x^k Be^{\alpha x}$
$\beta = 0$	$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^k e^{\alpha x} R_n(x)$
$\alpha = n = m = 0$	$A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$	$x^k(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))$
$n = m = 0$	$e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$	$x^k e^{\alpha x}(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))$
$\alpha = 0$	$P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)$	$x^k(R_l(x)\cos(\beta x) + S_l(x)\sin(\beta x))$
općenito	$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x))$	$x^k e^{\alpha x}(R_l(x)\cos(\beta x) + S_l(x)\sin(\beta x))$

Važno je napomenuti da ako je $b(x)$ u nehomogenoj jednadžbi (8.6) zbroj raznih funkcija oblika (8.7), to jest:

$$b(x) = b_1(x) + b_2(x) + \cdots + b_n(x),$$

tada je partikularno rješenje:

$$u_p(x) = u_{p_1(x)} + \cdots + u_{p_n}(x),$$

gdje je u_{p_i}, $i = 1, \ldots, n$ partikularno rješenje jednadžbe:

$$u_{p_i}^{(n)} + a_{n-1}u_{p_i}^{(n-1)} + \cdots + a_1 u_{p_i}(x) + a_0 u_{p_i}(x) = b_i(x).$$

Primjer 8.3. Izračunajte rješenje Cauchyjeve zadaće:

$$y'' - 5y' + 6y = (4x + 3)e^{3x},$$
$$y(0) = y'(0) = 0.$$

Zadaci

Zadatak 8.1. Nađite opće rješenje jednadžbe

$$x'' - 2x' + x = 6te^t.$$

Rješenje: Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$x'' - 2x' + x = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0,$$

odnosno:

$$(\lambda - 1)^2 = 0.$$

Dakle, karakteristični polinom ima jednu nultočku: $\lambda = 1$, te je ona kratnosti 2. Stoga su bazne funkcije:

$$x_1 = e^t, \qquad x_2 = te^t,$$

pa je rješenje pripadne homogene jednadžbe dano s:

$$x_h = C_1 e^t + C_2 te^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada metodom neodređenih koeficijenata tražimo jedno partikularno rješenje jednadžbe. U ovom slučaju je:

$$f(t) = 6te^t,$$

odakle prvo očitavamo:

$$\alpha = 1,\ \beta = 0,\ P_1(t) = t,$$

te konačno, jer je $\lambda = 1$ nultočka karakterističnog polinoma kratnosti 2, partikularno rješenje tada tražimo u obliku:

$$x_p(t) = t^2 e^t R_1(t),$$

gdje je $R_1(t) = at + b$ polinom prvog stupnja čije ćemo koeficijente odrediti uvrštavanjem u početnu jednadžbu. Računamo:

$$x_p(t) = e^t(at^3 + bt^2),$$

$$\begin{aligned} x_p'(t) &= e^t(at^3 + bt^2) + e^t(3at^2 + 2bt) \\ &= e^t(at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt), \end{aligned}$$

te:

$$\begin{aligned} x_p''(t) &= e^t(at^3 + (3a + b)t^2 + 2bt) + e^t(3at^2 + (6a + 2b)t + 2b) \\ &= e^t(at^3 + (6a + b)t^2 + (6a + 4b)t + 2b). \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$e^t(6at + 2b) = 6te^t,$$

odakle slijedi:

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Dakle, partikularno rješenje je dano s:

$$x_p(t) = t^3 e^t,$$

a opće rješenje jednadžbe je tada oblika:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + t^3 e^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 8.2. Nađite opće rješenje jednadžbe

$$x'' + 2x' + 2x = e^{-t}(t + \cos t).$$

Rješenje: Najprije rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$x'' + 2x' + 2x = 0.$$

Karakteristična jednadžba glasi:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0.$$

Rješenja karakteristične jednadžbe su:

$$\lambda_1 = -1 + i, \quad \lambda_2 = -1 - i,$$

pa je opće rješenje odgovarajuće homogene jednadžbe dano s:

$$x_h(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada ponovno metodom neodređenih koeficijenata tražimo partikularno rješenje. Desna strana nije željenog oblika, međutim primijetimo kako ju možemo napisati na sljedeći način:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t),$$

pri čemu su:

$$f_1(t) = e^{-t} t, \quad f_2(t) = e^{-t} \cos t.$$

Ukoliko nađemo partikularna rješenja jednadžbi:

$$x''_{p_1} + 2x'_{p_1} + 2x_{p_1} = f_1(t) \quad \text{i} \quad x''_{p_2} + 2x'_{p_2} + 2x_{p_2} = f_2(t),$$

tada je zbog linearnosti jednadžbe zbroj ta dva partikularna rješenja $x_{p_1} + x_{p_2}$ upravo jedno partikularno rješenje početne jednadžbe. Promatramo sada prvo jednadžbu s $f_1(t) = e^{-t} t$. Iz oblika f_1 čitamo:

$$\alpha = -1, \ \beta = 0, \ P_1(t) = t.$$

Kako $\lambda = -1$ nije nultočka karakterističnog polinoma, to je u ovom slučaju $k = 0$, pa partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$x_{p_1}(t) = e^{-t}(At + B).$$

Za jednadžbu s $f_2(t) = e^{-t}\cos t$ očitavamo

$$\alpha = -1,\ \beta = 1,\ m = n = 0.$$

Kako je $\lambda = -1 \pm i$ jednostruka nultočka karakterističnog polinoma, to je $k = 1$, pa je partikularno rješenje oblika:

$$x_{p_2}(t) = te^{-t}(C\cos t + D\sin t).$$

Dakle, partikularno rješenje originalne jednadžbe je oblika:

$$\begin{aligned} x_p(t) &= x_{p_1}(t) + x_{p_2}(t) \\ &= e^{-t}(At + B + Ct\cos t + Dt\sin t). \end{aligned}$$

Računamo:

$$x_p'(t) = e^{-t}\Big((-At - B + A) + (-Ct + C + Dt)\cos t + (-Dt + D - Ct)\sin t\Big),$$

te:

$$x_p''(t) = e^{-t}\Big((At + B - 2A) + (-2C - 2Dt + 2D)\cos t + (-2D + 2Ct - 2C)\sin t\Big).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo:

$$At + B + 2D\cos t - 2C\sin t = t + \cos t,$$

odakle vidimo da nam je dovoljno staviti:

$$A = 1, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Dakle, partikularno rješenje jednadžbe je dano s:

$$x_p(t) = te^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}\sin t.$$

Konačno, opće rješenje jednadžbe je tada oblika:

$$x(t) = e^{-t}\Big(C_1\cos t + t + \big(C_2 + \frac{1}{2}t\big)\sin t\Big), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 8.3. Odredite opće rješenje jednadžbe:

$$x''' + x'' - x' + 15x = \sin 2t.$$

Rješenje: Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$x''' + x'' - x' + 15x = 0.$$

Pripadni karateristični polinom je:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 15 = 0,$$

koji možemo zapisati kao:

$$(\lambda + 3)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0.$$

Dakle, nultočke karakterističnog polinoma su:

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i.$$

Stoga su bazne funkcije za prostor rješenja homogene jednadžbe dane sa:

$$x_1(t) = e^{-3t}, \quad x_2(t) = e^t \cos 2t, \quad x_3(t) = e^t \sin 2t,$$

te je opće rješenje homogene jednadžbe dano s:

$$x_h(t) = C_1 e^{-3t} + e^t(C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t), \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Kako je $f(t) = \sin 2t$, te $\lambda = \pm 2i$ nisu nultočke karakterističnog polinoma, partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$x_p(t) = A \cos 2t + B \sin 2t.$$

Uvrštavanjem x_p u jednadžbu dobivamo:

$$(11A - 10B) \cos 2t + (10A + 11B) \sin 2t = \sin 2t,$$

odakle slijedi:

$$A = \frac{10}{221}, \qquad B = \frac{11}{221}.$$

Dakle, opće rješenje jednadžbe je:

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + e^t(C_2 \cos 2t + C_3 \sin 2t) + \frac{10}{221} \cos 2t + \frac{11}{221} \sin 2t \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 8.4. (Zadaci za vježbu) Nađite opće rješenje sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $x'' - 3x' + 2x = \sin t$,

b) $x'' - 5x' + 4x = 4t^2 e^{2t}$,

c) $x'' - 2x' - 3x = t^2 e^t$,

d) $x'' - 9x = e^{3t} \cos t$,

e) $x'' - 3x' + 2x = t \cos t$,

f) $x'' + 4x' + 4x = te^{2t}$,

g) $x^{(4)} + 2x''' + 5x'' + 8x' + 4x = \cos t + 40e^t$.

Rješenje: a) $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{10} \sin t + \frac{3}{10} \cos t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ b) $x = C_1 e^t + C_2 e^{4t} + e^{2t}(-2t^2 + 2t - 3),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ c) $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{e^t}{8},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ d) $x = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + \frac{6}{37} e^{3t} \sin t - \frac{1}{37} e^{3t} \cos t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ e) $x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - \frac{3}{10} t \sin t - \frac{17}{50} \sin t + \frac{1}{10} t \cos t - \frac{3}{25} \cos t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ f) $x = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t} + \frac{1}{16} t e^{2t} - \frac{1}{32} e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ g) $x = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t) + C_3 e^{-t} + C_4 t e^{-t} + 2e^t + \frac{\sin t}{6},\ C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

8.2. Jednadžbe koje dopuštaju snižavanje reda

Najjednostavniji tipovi običnih diferencijalnih jednadžbi su oni koji određenom supstitucijom jednadžbu višeg reda prevode u jednadžbu prvog reda.

a) Prvo promatramo jednadžbe oblika:

$$F(t, x^{(k)}, x^{(k+1)}, \ldots, x^{(n)}) = 0, \ 1 \leq k < n.$$

Ove jednadžbe ne sadrže nepoznatu funkciju x i prvih $k-1$ njenih derivacija. Takvim jednadžbama snižavamo red za k uvodeći supstituciju:

$$u = x^{(k)}.$$

Tada je $u' = x^{(k+1)}$, $u'' = x^{(k+2)}, \ldots, u^{(n-k)} = x^{(n)}$, pa jednadžba prelazi u:

$$F(t, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0.$$

Odredimo u, a onda je $x^{(k)} = u$, pa x dobivamo integrirajući k puta.

Zadatak 8.5. Odredite opće rješenje jednadžbe:

$$t^2 x'' = (x')^2.$$

Rješenje: Uvodimo supstituciju:

$$u = x'.$$

Gornja jednadžba tada prelazi u:

$$t^2 u' = u^2.$$

Ukoliko je $u = 0$, tada je i $x' = 0$, odnosno imamo $x = C$, za neku konstantu $C \in \mathbb{R}$, te je to očito jedno rješenje gornje jednadžbe. Ukoliko je $u \neq 0$, gornju jednadžbu dijelimo s t^2u^2, te tražimo rješenje na otvorenom intervalu koji ne sadrži 0 separiranjem varijabli:

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dt}{t^2},$$

odakle integriranjem slijedi

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{t} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vratimo natrag supstituciju, te izrazimo $x = x(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} &= \frac{1}{t} + C \\ \Rightarrow u &= \frac{t}{Ct+1} \\ \Rightarrow x' &= \frac{t}{Ct+1} \\ \Rightarrow x &= \int \frac{t}{Ct+1} dt, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1) $C = 0$. Tada imamo:

$$x = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

2) $C \neq 0$. Tada je:

$$x = \int \frac{t}{Ct+1} dt = \frac{1}{C} \int \frac{(Ct+1)-1}{Ct+1} dt = \frac{1}{C} t - \frac{1}{C^2} \ln |Ct+1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$

□

b) Promotrimo sada jednadžbe oblika:

$$F(x, x', \ldots, x^{(n)}) = 0.$$

Ove jednadžbe ne sadrže nezavisnu varijablu t. Takvom jednadžbom možemo sniziti red za jedan uvodeći supstituciju:

$$x' = p(x),$$

pri čemu x smatramo nezavisnom varijablom. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{dx'}{dt} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dp}{dx} p = p'p\,, \\ x''' &= \frac{dx''}{dt} = \frac{dx''}{dx}\frac{dx}{dt} = \Big(\frac{d}{dx}(p'p)\Big)p \\ &= (p''p + (p')^2)p = p''p^2 + p(p')^2\,. \end{aligned}$$

Nakon određivanja funkcije p, rješenje x odredimo separacijom varijabli iz jednadžbe $x' = p(x)$. Pri tome se posebno mora razmatrati slučaj $p(x) = 0$.

Zadatak 8.6. Odredite opće rješenje jednadžbe:

$$xx'' + 1 = (x')^2.$$

Rješenje: Kako jednadžba ne sadrži nezavisnu varijablu t, uvodimo supstituciju:

$$x' = p(x).$$

Posebno je $x'' = p \cdot p'$, pa uvrštavanjem u jednadžbu imamo:

$$xpp' + 1 = p^2,$$

odnosno:

$$xpp' = p^2 - 1. \tag{8.8}$$

Ukoliko je $p^2 - 1 = 0$, odnosno $p = \pm 1$, tada je $x' = \pm 1$, odnosno

$$x = \pm t + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

što su očito rješenja jednadžbe. Za $p^2 - 1 \neq 0$ rješavamo (8.8) separacijom varijabli (primijetimo kako $x = 0$ nije rješenje početne jednadžbe):

$$\frac{p}{p^2 - 1} dp = \frac{dx}{x},$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\frac{1}{2} \ln |p^2 - 1| = \ln |x| + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

pa konačno i:

$$p^2 - 1 = Cx^2, \quad C \neq 0.$$

Vraćanjem supstitucije imamo:

$$(x')^2 = Cx^2 + 1, \quad C \neq 0,$$

odnosno:

$$x' = \pm\sqrt{Cx^2 + 1}, \quad C \neq 0.$$

Kada bi bilo $Cx^2 + 1 = 0$, odnosno $x^2 = -\frac{1}{C}$, imali bi da je x konstantna funkcija, što nije rješenje jednadžbe. Za $Cx^2 + 1 \neq 0$, separiranjem varijabli dobivamo:

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{Cx^2 + 1}} = dt,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{Cx^2 + 1}} = t + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}. \tag{8.9}$$

Razlikujemo dva slučaja, ovisno o predznaku konstante C:

1) $C < 0$. Ako stavimo $C_2 = \sqrt{|C|} > 0$, odnosno $C = -C_2^2$, izraz (8.9) prelazi u:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (C_2 x)^2}} = t + C_1,$$

pa integriranjem dobivamo

$$\frac{1}{C_2} \arcsin(C_2 x) = \pm t + C_1, \quad C_2 > 0.$$

Dakle, u ovom slučaju rješenje je dano u sljedećem obliku:

$$x = \pm \frac{1}{C_2} \sin(C_2 t + C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 > 0.$$

2) $C > 0$. Ako stavimo $C_2 = \sqrt{C} > 0$, odnosno $C = C_2^2$, izraz (8.9) prelazi u:

$$\pm \int \frac{dx}{\sqrt{(C_2 x)^2 + 1}} = t + C_1,$$

pa integriranjem dobivamo:

$$\frac{1}{C_2}\operatorname{Arsh}(C_2x) = \pm t + C_1, \quad C_2 > 0.$$

Dakle, u ovom slučaju je rješenje oblika:

$$x = \pm\frac{1}{C_2}\operatorname{sh}(C_2t + C_1), \quad C_1 \in \mathbb{R}, C_2 > 0.$$

□

Zadatak 8.7. Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} 2x''' - 3(x')^2 = 0, \\ x(0) = -3, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = -1. \end{cases}$$

Rješenje: Prvo uvodimo supstituciju $u = x'$. Jednadžba tada prelazi u:

$$2u'' - 3u^2 = 0,$$

uz uvjete:

$$u(0) = x'(0) = 1, \quad u'(0) = x''(0) = -1.$$

Kako je ovo sad jednadžba u kojoj se ne pojavljuje nezavisna varijabla t, uvodimo još jednu supstituciju; ovaj put $u' = p(u)$. Jednadžba tada postaje:

$$2pp' - 3u^2 = 0,$$

dok uvjeti prelaze u:

$$p(1) = p(u(0)) = u'(0) = -1,$$

Jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli. Imamo:

$$pdp = \frac{3}{2}u^2du,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$p^2 = u^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Iz uvjeta $p(1) = -1$ slijedi $C = 0$, te zbog predznaka konačno i:

$$p(u) = -u^{\frac{3}{2}}.$$

Sada se vraćamo natrag u supstituciju;

$$u' = -u^{\frac{3}{2}}.$$

Za $u = 0$ imamo $x' = 0$, što ne može biti rješenje problema zbog uvjeta u $t = 0$ (iako je $x = \text{const.}$ rješenje jednadžbe). Dalje nastavljamo separacijom varijabli:

$$-u^{-\frac{3}{2}}du = dt,$$

odakle integriranjem slijedi:

$$u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem uvjeta $u(0) = 1$, slijedi da treba biti $C = 1$, odnosno:

$$u(t) = \frac{4}{(2+t)^2}.$$

Vraćanjem posljednje supstitucije imamo:

$$x' = \frac{4}{(2+t)^2}.$$

Integriranjem slijedi:

$$x(t) = -\frac{4}{(2+t)} + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem uvjeta $x(0) = -3$, slijedi da treba biti $C = -1$, odnosno rješenja Cauchyjeve zadaće je dano u sljedećem obliku:

$$x(t) = -\frac{4}{2+t} - 1.$$

□

Zadatak 8.8 (Zadaci za vježbu)**.** Odredite opća rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $x''(e^t + 1) + x' = 0$,

b) $x''' = (x'')^2$,

c) $x''' = 2(x'' - 1)\operatorname{ctg} t$,

d) $tx''' = x'' - tx''$,

e) $tx'' = x' + t \sin \frac{x'}{t}$.

Zadatak 8.9 (Zadaci za vježbu)**.** Odredite opća rješenja sljedećih diferencijalnih jednadžbi:

a) $(x'')^2 - 2x'x'' + 1 = 0$,

b) $x'''(x')^2 = (x'')^3$,

c) $x^3x'' = 1$,

d) $(x')^2 + 2xx'' = 0$,

e) $x'' = 2xx'$,

f) $xx'' = (x')^2 - (x')^3$,

g) $2xx'' = x^2 + (x')^2$,

h) $x'' + (x')^2 = 2e^{-x}$,

i) $x^4 - x^3x'' = 1$,

j) $2xx'' = (x')^2 + 1$.

Zadatak 8.10 (Zadaci za vježbu)**.** Riješite Cauchyjeve zadaće:

a)

$$\begin{cases} x''' - x' = 0 \\ x(0) = 3 \\ x'(0) = -1 \\ x''(0) = 1. \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} xx'' = 2(x')^2 + x^2 \\ x(0) = 1 \\ x'(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Poglavlje 2

Osnovne numeričke metode

1. Rješavanje nelinearnih jednadžbi

1.1. Općenito o iterativnim metodama

Računanje nultočaka nelinearnih funkcija jedan je od najčešćih zadataka primijenjene matematike. Općenito, neka je zadana funkcija:

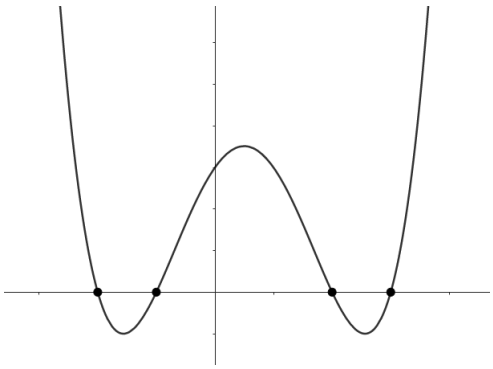
$$f\colon I \to \mathbb{R}\,,$$

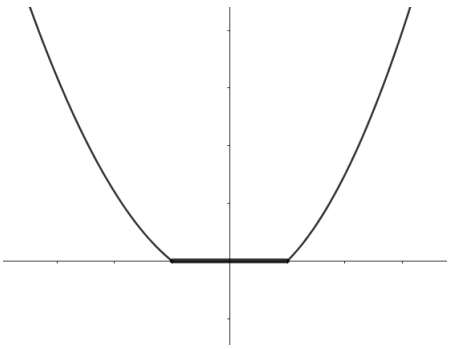
gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ dani interval. Tražimo sve točke $\alpha \in I$ za koje je:

$$f(\alpha) = 0\,.$$

Takve točke se zovu rješenja, korijeni pripadne jednadžbe ili nultočke funkcije f. Egzaktno odrediti nultočke je često gotovo nemoguće ili vrlo složeno, pa se zadovoljavamo njihovim *približnim* određivanjem, tj. umjesto nultočke α određujemo $\tilde{\alpha}$ tako da je $|\alpha - \tilde{\alpha}|$ *malo* (koliko malo ovisi o prirodi problema i traženoj preciznosti podataka). Ovdje možemo uočiti još jedan problem: Kako znati da je $|\alpha - \tilde{\alpha}|$ malo ako nultočka α nije eksplicitno određena? Cijeli ovaj postupak spada pod metode za *numeričko rješavanje nelinearnih jednadžbi*, a u ovom odjeljku ćemo vidjeti dvije takve metode.

Vratimo se na danu funkciju f i nužne pretpostavke koje ona mora zadovoljavati da bi primjena numeričkih metoda bila uspješna. U pravilu, pretpostavljamo da je f neprekidna na I i da su joj sve nultočke izolirane (nultočka $\alpha \in I$ funkcije f je izolirana ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je α jedina nultočka na $\langle \alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon \rangle$). U protivnom bi postojao problem konvergencije.





Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je neprekidna, ali 0 nije izolirana nultočka!

Traženje nultočki na zadanu točnost sastoji se od dvije faze:

1) Izolacije jedne ili više nultočki, tj. nalaženje intervala I unutar kojeg se nalazi bar jedna nultočka. Ovo je teži dio posla i obavlja se na temelju analize toka funkcije.

2) Iterativno nalaženje nultočke na traženu točnost (primjena odgovarajućeg algoritma).

Postoji mnogo metoda za nalaženje nultočaka nelinearnih funkcija na zadanu točnost. One se bitno razlikuju po tome hoće li uvijek konvergirati, tj. imamo li sigurnu konvergenciju ili ne i po brzini konvergencije.

Uobičajen je slučaj da brze metode nemaju sigurnu konvergenciju, dok je sporije metode imaju.

Definirajmo brzinu konvergencije metode.

Definicija 1.1. Niz iteracija $(x_n,\ n \in \mathbb{N}_0)$ konvergira prema točki α s redom konvergencije p, $p \geq 1$, ako za neku konstantu $c > 0$ vrijedi:

$$|\alpha - x_n| \leq c|\alpha - x_{n-1}|^p,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Ako je $p = 1$, kažemo da niz konvergira linearno prema α. U tom je slučaju nužno da je $c < 1$ i obično se c naziva faktor linearne konvergencije.

Relacija (1.1) kadkad nije zgodna za linearne iterativne algoritme. Ako u (1.1) upotrijebimo indukciju za $p = 1$, $c < 1$, onda dobivamo da je:

$$|\alpha - x_n| \leq c^n|\alpha - x_0|,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Kadkad će biti mnogo lakše pokazati (1.2) nego (1.1). I u slučaju (1.2), reći ćemo da niz iteracija konvergira linearno s faktorom c.

1.2. Metoda raspolavljanja (bisekcije)

Najjednostavnija metoda nalaženja nultočaka funkcije je metoda raspolavljanja. Ona funkcionira za neprekidne funkcije, ali zbog toga ima i najlošiju ocjenu pogreške.

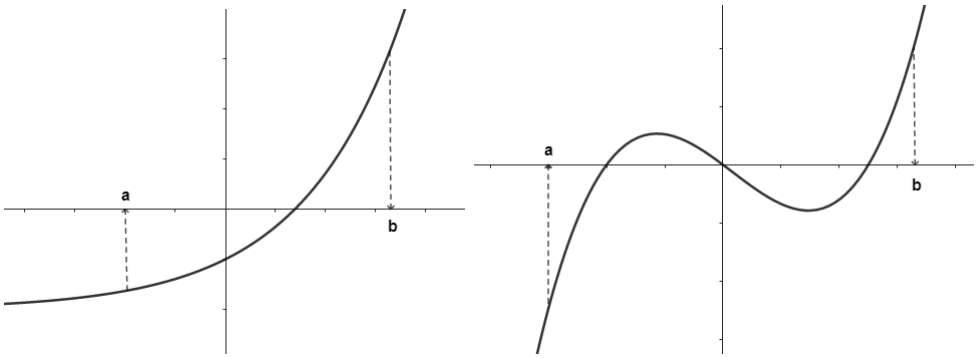
Osnovna pretpostavka za početak algoritma raspolavljanja je neprekidnost funkcije f na intervalu $[a, b]$, uz pretpostavku da vrijedi:

$$f(a) \cdot f(b) < 0.$$

Ako je $f \in C([a, b])$ i $f(a)f(b) < 0$, tada po Bolzanovom teoremu slijedi da postoji $\alpha \in \langle a, b\rangle$ tako da vrijedi $f(\alpha) = 0$.

Napomena 1.2. Neka je $f \in C([a, b])$.

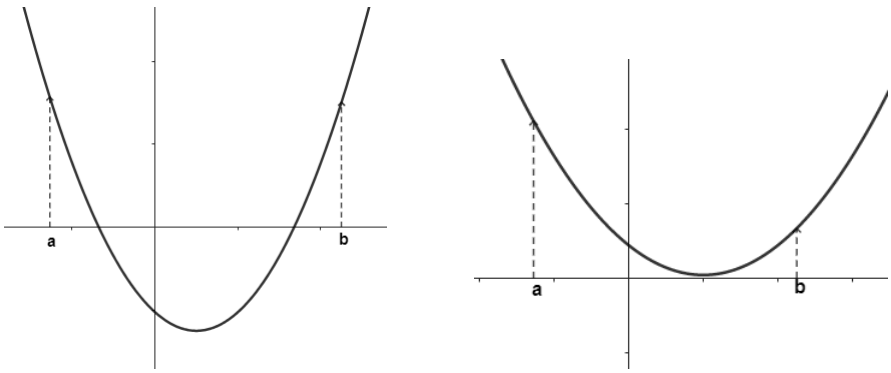
1) Ako vrijedi $f(a)f(b) < 0$, tada postoji nultočka, ali može ih biti više. Preciznije, ima ih neparan broj (brojeći kratnosti).



Slika 13: $f(a)f(b) < 0$.

2) Ako vrijedi $f(a)f(b) = 0$, slijedi da je $f(a) = 0$ ili $f(b) = 0$ (trivijalan slučaj).

3) Ako vrijedi $f(a)f(b) > 0$, tada ne znamo postoji li nultočka na $\langle a, b\rangle$, ali ako postoji ima ih paran broj (brojeći kratnosti).



Slika 14: $f(a)f(b) > 0$.

Dok je za prvi primjer na slici 14 lako boljom separacijom postići $f(a)f(b) < 0$, za drugi primjer na slici 14 je to nemoguće. Dakle, nultočke parnog reda nemoguće je naći metodom bisekcije.

Ako vrijede startne pretpostavke metode, metoda raspolavljanja konvergirat će prema nekoj nultočki iz intervala $[a, b]$.

Algoritam raspolavljanja je vrlo jednostavan. Označimo s α pravu nultočku funkcije, a zatim s $a_0 := a$, $b_0 := b$ i x_0 polovište $[a_0, b_0]$, tj.

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

U n-tom koraku algoritma konstruiramo interval $[a_n, b_n]$ kojemu je duljina polovina duljine prethodnog intervala, ali tako da je nultočka ostala unutar intervala $[a_n, b_n]$.

Konstrukcija intervala $[a_n, b_n]$ sastoji se u raspolavljanju intervala $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ točkom x_{n-1} i to tako da je:

1) $a_n = x_{n-1}$, $b_n = b_{n-1}$ ako je $f(a_{n-1})f(x_{n-1}) > 0$,

2) $a_n = a_{n-1}$, $b_n = x_{n-1}$ ako je $f(a_{n-1})f(x_{n-1}) < 0$.

Postupak zaustavljamo kada je:

$$|\alpha - x_n| \leq \varepsilon.$$

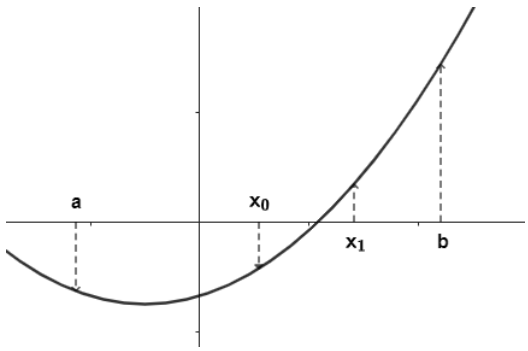
Pitanje je kako ćemo znati da je prethodna relacija ispunjena ako ne znamo α? Jednostavno! Budući da je x_n polovište intervala $[a_n, b_n]$, a $\alpha \in [a_n, b_n]$, onda je:

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n),$$

pa je dovoljno staviti zahtjev:

$$b_n - x_n \leq \varepsilon.$$

Grafički, metoda raspolavljanja izgleda ovako:



Slika 15: Metoda raspolavljanja

Algoritam za metodu raspolavljanja je sljedeći:

```
x ← (a+b)/2;
while b − x > ε do
    if f(x)f(b) = 0 then
        if f(x) = 0 then
            STOP
        end
        if f(b) = 0 then
            STOP
        end
    end
    if f(x)f(b) < 0 then
        a ← x
    else
        b ← x
    end
    x ← (a+b)/2
end
```

U nastavku pokazujemo da je algoritam dobro definiran (rezultat konvergencije).

Iz konstrukcije metode lako se izvodi pogreška n-te aproksimacije nultočke α. Vrijedi:

$$|\alpha - x_n| \leq b_n - x_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) = \frac{1}{2^2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots = \frac{1}{2^{n+1}}(b-a). \tag{1.3}$$

Primijetite da je:

$$\frac{b-a}{2} = b - x_0,$$

pa bismo korištenjem te relacije, (1.3) mogli pisati kao:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{2^n}(b - x_0).$$

Ova relacija podsjeća na (1.2), ali zdesna se nigdje ne pojavljuje $|\alpha - x_0|$. Ipak, desna strana daje nam naslutiti da će konvergencija biti dosta spora (linearna).

U nastavku izvodimo broj iteracija u najgorem slučaju.

Relacija (1.3) omogućava nam da unaprijed odredimo koliko je koraka raspolavljanja potrebno da bismo postigli točnost ε. Da bismo postigli da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je:

$$\frac{1}{2^{n+1}}(b-a) \leq \varepsilon.$$

Množenjem prethodne jednadžbe s 2^{n+1} i dijeljenjem s ε, dobivamo:

$$\frac{b-a}{\varepsilon} \leq 2^{n+1},$$

a zatim logaritmiranjem dobivamo:

$$\log(b-a) - \log\varepsilon \leq (n+1)\log 2,$$

odnosno:

$$n \geq \frac{\log(b-a) - \log\varepsilon}{\log 2} - 1, \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Ako je funkcija f još i klase $C^1[a,b]$, tj. ako f ima i neprekidnu prvu derivaciju, može se dobiti dinamička ocjena za udaljenost aproksimacije nultočke od prave nultočke.

Po Teoremu srednje vrijednosti za funkciju f imamo:

$$f(x_n) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_n - \alpha),$$

pri čemu je ξ između x_n i α. Prvo iskoristimo da je α nultočka, tj. $f(\alpha) = 0$, a zatim uzmemo apsolutne vrijednosti obje strane. Dobivamo:

$$|f(x_n)| = |f'(\xi)||\alpha - x_n|. \tag{1.4}$$

Primijetite da je:

$$|f'(\xi)| \geq m_1, \ m_1 = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|.$$

Ako je $m_1 > 0$, uvrštavanjem prethodne ocjene u (1.4), izlazi:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}.$$

Drugim riječima, ako želimo da je $|\alpha - x_n| \leq \varepsilon$, dovoljno je zahtijevati da je:

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

odnosno da vrijedi:

$$|f(x_n)| \leq m_1 \varepsilon.$$

Primjer 1.3. Neka je dana funkcija $f(x) = x^2 - 3$. Nađimo nultočku metodom bisekcije uz $\varepsilon = 10^{-1}$.

Neka je $a = \frac{1}{2}$ i $b = 2$. Tada je $f(a) = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4} < 0$ te $f(b) = 4 - 3 = 1 > 0$.

Imamo da je $\log(b-a) \approx 0.1761$ te $\log 2 \approx 0.301$, iz čega slijedi $n \geq \frac{\log(b-a) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1 \approx 2.907$, što znači da je potrebno najviše 3 koraka. Nadalje, $f'(x) = 2x$, pa $\min_{[a,b]} |f'(x)| = 1$, te je dinamička ocjena $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.

Prvo uzimamo $a_0 = a = \frac{1}{2}$ te $b_0 = b = 2$, iz čega slijedi $x_0 = \frac{5}{4}$, te imamo $f(x_0) = -\frac{23}{16} < 0$.

Dalje imamo $a_1 = x_0 = \frac{5}{4}$, $b_1 = 2$, iz čega slijedi $x_1 = \frac{13}{8}$, te imamo $f(x_1) = -\frac{23}{64} < 0$.

Nadalje, $a_2 = \frac{13}{8} = 1.625$, $b_2 = 2$, iz čega slijedi $x_2 = 1.8125$ te $f(x_2) \approx 0.285 > 0$. Primijetimo da vrijedi $|f(x_2)| > \varepsilon$, što znači da dinamička ocjena nije zadovoljena.

Napokon, $a_3 = 1.625$, $b_3 = x_2 = 1.8125$, pa imamo $x_3 = 1.71875$, što je naše rješenje.

Primijetimo da je već x_2 dovoljno dobar jer vrijedi $|\sqrt{3} - x_2| \approx 0.0805$ ($\sqrt{3} \approx 1.732$).

Nađimo sada aproksimaciju nultočke Newtonovom metodom (koju ćemo kasnije detaljno obraditi).

Iterativna formula za nalaženje nultočke jest: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = x_n - \frac{1}{2}|x_n| + \frac{3}{2x_n} = \frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2x_n}$, gdje zadnja jednakost vrijedi jer je $x_n \geq 0$.

Računamo: $x_0 = 2$, $x_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2 \cdot 2} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} + \frac{3}{2 \cdot \frac{7}{4}} = \frac{7}{8} + \frac{6}{7} = \frac{97}{56}$. Vrijedi: $|\sqrt{3} - x_2| < 10^{-4}$.

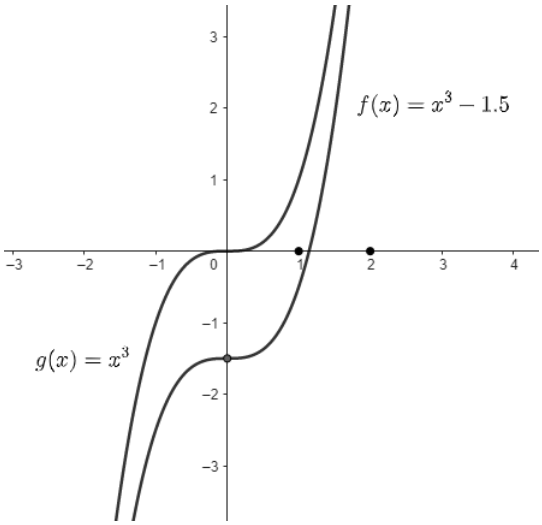
Zadaci

Zadatak 1.1. Metodom bisekcije riješite jednadžbu:

$$x^3 - 1.5 = 0$$

s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rješenje:



Kako je $f(x) = x^3 - 1.5$ polinom, ona je posebno funkcija klase C^1. Također, vrijedi:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty,$$

pa s obzirom da je funkcija strogo rastuća, ona ima jedinstvenu nultočku. Za početni interval odaberimo:

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 2.$$

Naime, imamo da je $f(1) = -0.5 < 0$ te $f(2) = 6.5 > 0$, pa se tražena nultočka nalazi u intervalu $[a_0, b_0]$. Jer je funkcija f klase C^1, možemo koristiti dinamički kriterij zaustavljanja. Računamo:

$$m_1 = \min_{x\in[1,2]} |f'(x)| = \min_{x\in[1,2]} 3x^2 = 3.$$

Dakle, uvjet zaustavljanja nam je:

$$|f(x_n)| \leq 3\varepsilon = 0.003.$$

Algoritam koji provodimo je sljedeći:

a) Stavimo $a_0 = a, b_0 = b$.

b) U n-tom koraku (n=0,1,2,...) radimo sljedeće. Prvo stavimo $x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
Ako je $f(a_n) \cdot f(x_n) < 0$, stavimo

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n, \\ b_{n+1} = x_n \end{cases}.$$

Ako je $f(a_n) \cdot f(x_n) > 0$, stavimo

$$\begin{cases} a_{n+1} = x_n, \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}.$$

Ako je $f(a_n) \cdot f(x_n) = 0$, onda je posebno $f(x_n) = 0$, te je x_n zapravo rješenje.

Provedimo sada algoritam; pritom vrijednosti zaokružujemo na četiri decimale, za jednu više od tražene točnosti:

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$\mathrm{sgn}(f(a_n)f(x_n))$
0	$\underline{1.0000}$	2.0000	1.5000	1.8750	-1
1	$\underline{1.0000}$	1.5000	1.2500	0.4531	-1
2	1.0000	1.2500	$\underline{1.1250}$	-0.7617	+1
3	$\underline{1.1250}$	1.2500	1.1875	0.1746	-1
4	$\underline{1.1250}$	1.1875	1.1563	0.0460	-1
5	1.1250	1.1563	$\underline{1.1407}$	-0.0157	+1
6	$\underline{1.1407}$	1.1563	1.1485	0.0149	-1
7	1.1407	1.1485	1.1446	$\boxed{-0.0004}$	dinamički kriterij

Dakle, aproksimativno rješenje je

$$x_7 = 1.145.$$

□

Zadatak 1.2. (Domaća zadaća) Metodom bisekcije riješite jednadžbe:

a) $e^{-x} - 2 + x = 0$, s točnošću $\varepsilon = 10^{-2}$,

b) $1000(x-4) - e^x = 0$, s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rješenje: a) $x_1 \approx 1.841$, $x_2 \approx -1.146$ b) $x_1 \approx 4.0579$, $x_2 \approx 8.3862$

Zadatak 1.3. (Domaća zadaća) Metodom bisekcije odredite nultočku funkcije:

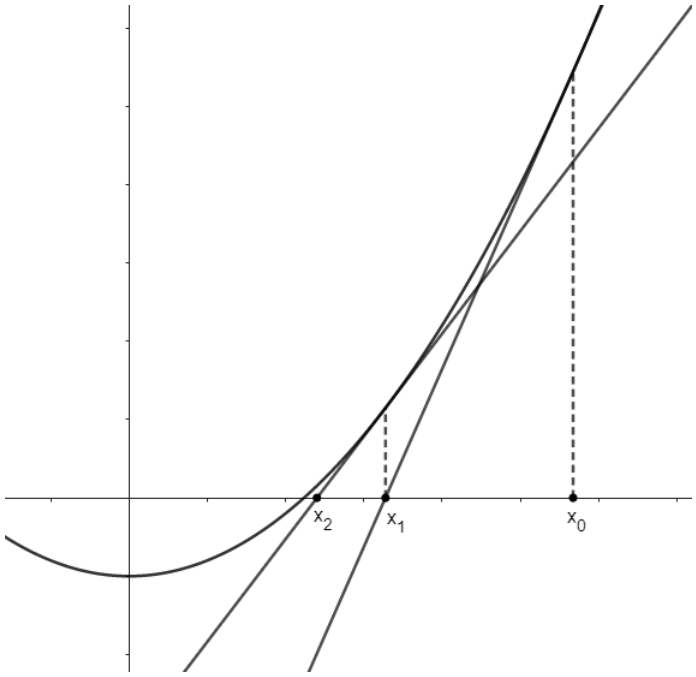
$$f(x) = x^3 - 6x + 2$$

na intervalu $[0, 1.5]$ s točnošću $\varepsilon = 0.05$.

Rješenje: $x \approx 0.34$

1.3. Metoda tangente (Newtonova metoda)

Brza metoda, ali nemamo sigurnu konvergenciju.



Slika 16: Metoda tangente

Početna točka je x_0. Iduća točka je nultočka tangente funkcije f kroz $(x_0, f(x_0))$ (očito nam nije dobro da je tangenta paralelna s x-osi, tj. $f'(x_0) = 0$ stvara problem u metodi).

Izvedimo rekurzivnu formulu:

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n),$$

iz čega slijedi:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.5}$$

Formula (1.5) ima smisla ukoliko $f'(x_n) \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Problem kod ove definicije je u tome što a priori ne znamo gdje se nalazi točka x_n. Može se dogoditi da niz izađe iz intervala na kojemu smo locirali nultočku.

Primjer 1.4. Neka je $f(x) = \log x$. Stavimo $x_0 = 10$. Sada je $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 10 - 10\ln(10) \cdot 1 < 0$, te imamo $x_1 \notin \mathcal{D}(f)$.

U nastavku izvodimo ocjenu pogreške (brzinu konvergencije).

Pretpostavimo da je $f \in C^2$ i razvijemo je u Taylorov red oko x_n:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x - x_n)^2,$$

gdje je ξ_n između x i x_n. Za $x = \alpha$, imamo:

$$0 = f(\alpha) = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(\alpha - x_n)^2.$$

Ako je $f'(x_n) \neq 0$, imamo:

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n + \alpha + (\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}.$$

Za $-x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x_n$, dobivamo:

$$\alpha - x_{n+1} = -(\alpha - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(x_n)}. \tag{1.6}$$

Ukoliko je $f'(x_n) > c > 0$, tada Newtonova metoda konvergira kvadratično.

Na primjer, za $f(x) = x^2$ i $\alpha = 0$ iteracije će konvergirati k 0, ali linearno.

Teorem 1.5. *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(I)$, $\alpha \in I$, $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$. Ako je početna aproksimacija izabrana dovoljno blizu α, niz iteracija (x_n) konvergirati će prema α s redom konvergencije $p = 2$.*

Dokaz: Neka je $\varepsilon > 0$ takav da: $I_\varepsilon := [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon] \subseteq I$ te $\min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)| > 0$.

Neka je $M_\varepsilon := \frac{\max_{x \in I_\varepsilon} |f''(x)|}{2 \min_{x \in I_\varepsilon} |f'(x)|}$, te $x_0 \in I_\varepsilon$.

Sada iz (1.6) slijedi:

$$|\alpha - x_1| \leq M_\varepsilon |\alpha - x_0|^2.$$

Ukoliko je $M_\varepsilon = 0$, tada je $x_1 = \alpha$, što ima smisla jer vrijedi:

$$M_\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \max_{I_\varepsilon} |f''(x)| = 0 \Leftrightarrow f'' = 0 \text{ na } I_\varepsilon \Leftrightarrow f(x) = ax + b \text{ na } I_\varepsilon.$$

Želimo da je i $x_1 \in I_\varepsilon$, pa dodatno pretpostavljamo :

$$M_\varepsilon |\alpha - x_0| < 1. \tag{1.7}$$

Uvjet (1.7) je dodatna pretpostavka na izbor x_0.

Tada vrijedi:

$$|\alpha - x_1| \leq M_\varepsilon |\alpha - x_0||\alpha - x_0| < \varepsilon,$$

jer vrijedi $M_\varepsilon |\alpha - x_0| < 1$ te $|\alpha - x_0| < \varepsilon$.

Analogno bismo zaključili i da je $x_2 \in I_\varepsilon$, ukoliko vrijedi $M_\varepsilon |\alpha - x_1| < 1$:

$$M_\varepsilon |\alpha - x_1| \leq M_\varepsilon^2 |\alpha - x_0|^2 = (M_\varepsilon |\alpha - x_0|)^2 < 1^2 = 1,$$

jer vrijedi $M_\varepsilon |\alpha - x_0| < 1$.

Dakle, induktivno dobivamo da za niz dan s (1.5) uz $x_0 \in I_\varepsilon$ i $M_\varepsilon |\alpha - x_0| < 1$ imamo (za $n \in \mathbb{N}$):

- $x_n \in I_\varepsilon$
- $M_\varepsilon |\alpha - x_n| < 1$

Sada ponovno po (1.6) imamo:

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq M_\varepsilon |\alpha - x_n|^2 = \frac{1}{M_\varepsilon}(M_\varepsilon|\alpha - x_n|)^2 \Rightarrow M_\varepsilon|\alpha - x_{n+1}| \leq (M_\varepsilon|\alpha - x_n|)^2$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow M_\varepsilon|\alpha - x_{n+1}| \leq (M_\varepsilon|\alpha - x_0|)^{2^{n+1}},$$

iz čega slijedi:

$$|\alpha - x_n| \leq \frac{1}{M_\varepsilon}(M_\varepsilon|\alpha - x_0|)^{2^n}.$$

Kako je $M_\varepsilon|\alpha - x_0| < 1$, slijedi da $|\alpha - x_n| \to 0$, za $n \to \infty$. □

Iz dokaza je vidljivo da općenito nije jednostavno reći što znači da je x_0 dovoljno blizu α. Naime, treba vrijediti:

$$|\alpha - x_0| < \frac{1}{M_\varepsilon},$$

a ne možemo uzeti samo $\varepsilon \leq \frac{1}{M_\varepsilon}$ jer M_ε ovisi o ε.

Ipak, u nekim slučajevima možemo reći nešto više.

Na primjer, ukoliko je:

$$\max_{x\in I} |f''(x)| < \infty, \ \min_{x\in I} |f'(x)| > 0,$$

tada je za svaki $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{M_\varepsilon} = \frac{2\min_{x\in I_\varepsilon}|f'(x)|}{\max_{x\in I_\varepsilon}|f''(x)|} \geq \frac{2\min_{x\in I}|f'(x)|}{\max_{x\in I}|f''(x)|},$$

pa je dovoljno tražiti da je $\varepsilon < \frac{2\min_{x\in I}|f'(x)|}{\max_{x\in I}|f''(x)|}$.

Sljedeći teorem daje poseban slučaj u kojemu imamo globalnu konvergenciju metode (svaki izbor početne iteracije x_0 će biti dobar).

Teorem 1.6. *Neka je $f \in C^2([a,b])$ i $f(a)f(b) < 0$. Ako f' i f'' nemaju nultočke na $[a,b]$, onda Newtonova metoda konvergira prema (jedinstvenoj jednostrukoj) nultočki α funkcije f, za svaku startnu početnu aproksimaciju $x_0 \in [a,b]$ za koju vrijedi $f(x_0)f''(x_0) > 0$.*

Napomena 1.7. Funkcija f ima na $\langle a,b\rangle$ jedinstvenu nultočku koja je jednostruka, jer bi u suprotnom f' imala nultočku u $\langle a,b\rangle$.

Dokaz: Dokažimo samo slučaj $f' > 0$ i $f'' > 0$ na cijelom $[a,b]$ (preostala tri slučaja idu analogno). Dovoljno je promatrati ovaj slučaj ($f' < 0$, $f'' > 0$ riješimo tako da promatramo $\tilde{f}(x) = f(-x)$, dok se preostala dva slučaja svode na ovaj s $\tilde{f} = -f$).

Vrijedi $f' > 0$, iz čega slijedi da f raste, pa je $f(a) < 0$ i $f(b) > 0$. Neka je $x_0 \in [a,b]$ takav da vrijedi $f(x_0) > 0$ (tada je i $f(x_0)f''(x_0) > 0$) (u praksi možemo uzeti upravo $x_0 = b$).

Neka je (x_n) niz dobiven Newtonovom iteracijom (1.5):

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Sljedećom tvrdnjom pokazujemo da je (x_n) dobro definiran i da je konvergentan.

Tvrdnja 1.8. $(\forall n \in \mathbb{N}_0)\ \alpha < x_{n+1} < x_n$.

Dokaz: Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom.

Baza. $n = 0$. Vrijedi:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} < x_0,$$

jer vrijedi $\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} > 0$.

Sada iz $f \in C^2([a,b])$ slijedi da je $f \in C^2([\alpha, x_0])$, pa razvijamo f u Taylorov red oko x_0 i uvrštavamo:

$$0 = f(\alpha) = f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) + \frac{f''(\xi_0)}{2}(\alpha - x_0)^2,\ \xi_0 \in \langle \alpha, x_0 \rangle \subseteq [a,b] \Rightarrow f''(\xi_0) > 0,$$

iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} &f(x_0) + f'(x_0)(\alpha - x_0) < 0\ /: f'(x_0) > 0 \\ &\Rightarrow -x_1 + \alpha < 0 \Rightarrow x_1 > \alpha. \end{aligned}$$

Pretpostavka. Pretpostavljamo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}_0$ i pokažimo da vrijedi za $n+1$.

Korak. Sve u potpunosti analogno kao u bazi, samo x_0 i x_1 zamijenimo s x_n i x_{n+1}. □

Sada slijedi da je (x_n) konvergentan niz te $\alpha' := \lim_n x_n$.

$\frac{f}{f'}$ je neprekidna funkcija na $[a,b]$, pa imamo:

$$\alpha' = \lim_n x_{n+1} = \lim_n \left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = \lim_n x_n - \lim_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \alpha' - \frac{f(\alpha')}{f'(\alpha')} \Rightarrow f(\alpha') = 0.$$

Kako f ima jedinstvenu nultočku u $[a,b]$, slijedi da je $\alpha = \alpha'$. □

U nastavku izvodimo dinamičku pogrešku.

Taylor oko x_n i uvrstimo x_{n+1}:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2,$$

gdje je ξ_n između x_n i x_{n+1}. Dalje, vrijedi:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} &\Rightarrow f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = 0 \\ &\Rightarrow f(x_{n+1}) = \frac{f''(\xi_n)}{2}(x_{n+1} - x_n)^2 \\ &\Rightarrow |f(x_{n+1})| \leq \frac{M_2}{2}|x_{n+1} - x_n|^2 \end{aligned}$$

Kao i kod metode bisekcije, imamo $f(x_{n+1}) = f(\alpha) + f'(\xi)(x_{n+1} - \alpha)$ te:

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_{n+1} - x_n)^2 \leq \varepsilon,$$

odnosno:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \sqrt{\frac{2m_1\varepsilon}{M_2}},$$

ili:

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} \leq \varepsilon,$$

odnosno:

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon.$$

Primjer 1.9. Neka je $f(x) = x^3 - x + 1$. Tražimo nultočku. Jedina realna nultočka je $\alpha \approx -1.3247$.

Prvo koristimo Newtonovu metodu, tj. formulu $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - x_n + 1}{3x_n^2 - 1}$.

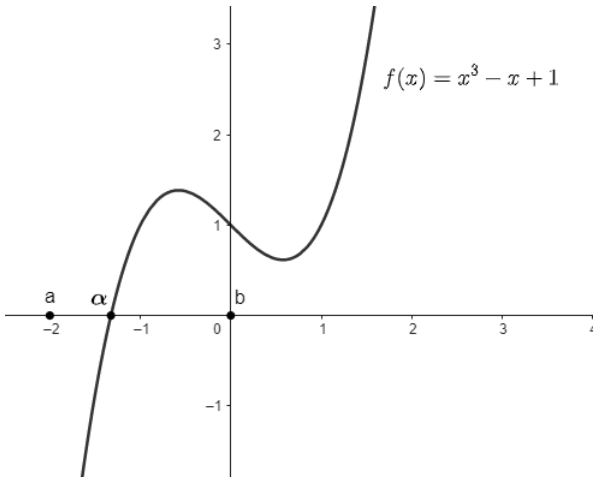
1) Uzimo za početnu točku $x_0 = 0$. Tada imamo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 - \frac{1}{-1} = 1,\\
x_2 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
x_3 &= \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{3}{4} - 1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3,\\
x_4 &= 3 - \frac{27 - 3 + 1}{27 - 1} = 3 - \frac{25}{26} = \frac{53}{26}.
\end{aligned}$$

Imamo problem u konvergenciji jer f' ima nultočku u $\langle \alpha, 0 \rangle$.

2) Uzmimo sada početnu točku $x_0 = -2$. Imamo:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -2 - \frac{-8 + 2 + 1}{12 - 1} = -2 + \frac{5}{11} = -\frac{17}{11},\\
x_2 &\approx -1.3596,\\
x_3 &\approx -1.3258.
\end{aligned}$$



Slika 17: Funkcija $f(x) = x^3 - x + 1$.

Sada koristimo metodu bisekcije. Neka je $a = -2$ i $b = 0$.
Imamo:

$$\begin{aligned}
&a_0 = -2,\ b_0 = 0 \Rightarrow x_0 = -1,\ f(x_0) = 1 > 0,\\
&a_1 = a_0 = -2,\ b_1 = x_0 = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2},\ f(x_1) = -\frac{7}{8} < 0,\\
&a_2 = x_1 = -\frac{3}{2},\ b_2 = b_1 = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{5}{4},\ f(x_2) = \frac{19}{64} > 0,\\
&a_3 = a_2 = -\frac{3}{2},\ b_3 = x_2 = -\frac{5}{4} \Rightarrow x_3 = -\frac{11}{8} = -1.375.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.4. Newtonovom metodom nađite realne korijene jednadžbe $x^5+x+1 = 0$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$.

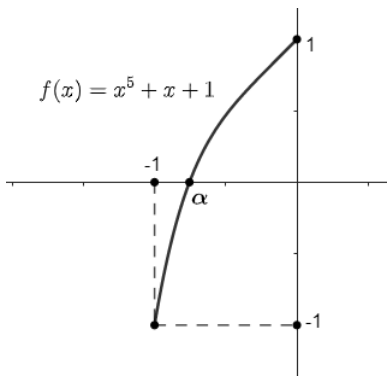
Rješenje: Izolacija nultočke. Definirajmo funkciju sa $f(x) = x^5 + x + 1$.

Za $x \to \infty$ imamo $f(x) \to \infty$, dok za $x \to -\infty$ imamo $f(x) \to -\infty$. Dakle, postoji nultočka (funkcija siječe x-os u barem jednoj točki).

Iz činjenice da vrijedi $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1$, slijedi da je f strogo monotona, što znači da je f injekcija, te da je nultočka jedinstvena.

Nadalje, iz $f''(x) = 20x^3$ slijedi da je $f''(x) < 0$, za svaki $x \in \langle -\infty, 0\rangle$, to jest da je funkcija f konkavna na negativnom dijelu x-osi.

Uočimo da je $f(0) = 1$ i $f(-1) = -1$. Imamo sljedeću skicu:



Sada uzimamo interval $[a, b] = [-1, -0.5]$ te znamo da vrijedi $f(-0.5) > 0$.

Provjerimo uvjete teorema. Zadovoljene su sljedeće pretpostavke:

- $f \in C^2([a, b])$
- $f(a)f(b) < 0$
- f' i f'' ne mijenja predznak na $[-1, -0.5]$.

Trebamo odabrati početnu iteraciju x_0. Uzimamo $x_0 = -1$ jer je $f(x_0)f''(x_0) > 0$.

Sada računamo:

$$m_1 = \min_{y\in[-1,-0.5]} |5y^4 + 1| = 5 \cdot 0.5^4 + 1 = 1.3125 \Longrightarrow |f(x_n)| \leq m_1 \cdot \varepsilon = 0.00013125,$$

te:

$$M_2 = \max_{y\in[-1,-0.5]} |20y^3| = 20 \Longrightarrow |x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}} = 0.0036.$$

Uzimamo početnu točku (najbolje je koristiti maksimalni broj decimala koji kalkulator dopušta): $x_0 = -1.0000000$.

Newtonova metoda je specifična (što više znamenki to bolje jer brzo konvergira). Dobivamo sljedeću tablicu:

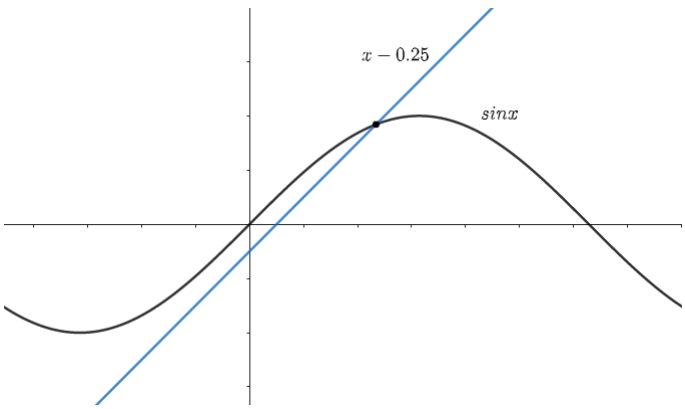
x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
$x_1 = -0.8333333$	-0.2352108	0.1666667
$x_2 = -0.7643821$	-0.0253292	0.0689512
$x_3 = -0.7550249$	-0.0003864	0.0093572
$x_4 = -0.7548777$	$-8.8554837 \cdot 10^{-8}$	0.0001472

U svakom koraku koristimo formulu $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5+x_n+1}{5x_n^4+1}$ $(f(x_n) = x_n^5 + x_n + 1)$. $\square$

Zadaci

Zadatak 1.5. Metodom tangente nađi pozitivne korijene jednadžbe $x - \sin x - 0.25 = 0$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rješenje: Rješavamo jednadžbu $x - 0.25 = \sin x$.



Za $x \in \langle -\infty, -\pi] \cup [\pi, \infty\rangle$ slijedi da $x - 0.25 = \sin x$ nema rješenja na tom dijelu.

Vrijedi:

- $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ za $x \in [-\pi, \pi]$ (jednaka nuli samo za $x = 0$),
- $f''(x) = \sin x > 0$ za $x \in \langle 0, \pi\rangle$,

- $f'(x) > 0$ za $x \in \langle -2\pi, 0\rangle$ (strogo rastuća) te je $f(0) < 0$ i $f(-2\pi) < 0$, tj. na tom dijelu nema nultočaka,
- f je strogo rastuća na $\langle 0, 2\pi\rangle$

Dakle, imamo:

- f je strogo rastuća i konveksna na $\langle 0, \pi\rangle$ ($f' > 0,\ f'' > 0$), tj. f' i f'' nemaju nultočku na $[1, \pi]$,
- $f(1) = -0.09147 < 0$, $f(\pi) = 2.89159 > 0$ iz čega slijedi da $f(1)f(\pi) < 0$,
- $f \in C^2([1, \pi])$,
- $x_0 = 1.25$, $f(1.25)f''(1.25) > 0$, pri čemu je $f(1.25) = 0.05102 > 0$.

Sada računamo:

$$m_1 = \min_{x\in[1,\pi]} |f'(x)| = f'(1) = 0.4596977,$$

te:

$$M_2 = \max_{x\in[1,\pi]} |f''(x)| = 1.$$

Imamo ocjene:

$$|f(x_n)| \leq m_1\varepsilon = 0.0004597,$$

te:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon m_1}{M_2}} = 0.0303215.$$

Imamo tablicu (koristimo formulu $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$):

x_n	$f(x_n)$	$x_n - x_{n-1}$
$x_1 = 1.1754899$	0.0026113	-0.0745101
$x_2 = 1.1712433$	$8.3384 \cdot 10^{-6}$	$-4.2466 \cdot 10^{-3}$

Dakle, $x_2 = 1.1712433$ je aproksimativno rješenje. □

Zadatak 1.6 (Domaća zadaća)**.** S točnošću $\varepsilon = 10^{-4}$ odredite sjecište grafova krivulje zadanih jednadžbama $y = \frac{1}{x-1}$ i $x^2 - y^2 = 1$.

Rješenje: $x_1 \approx -1.10692$, $x_2 \approx 1.71667$

Zadatak 1.7 (Domaća zadaća)**.** Uz točnost $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-6}$ izračunajte $\sqrt[3]{2}$ rješavajući jednadžbu $x^3 - 2 = 0$.

Rješenje: $x \approx 1.2599210$

Zadatak 1.8 (Domaća zadaća)**.** Newtonovom metodom nađite pozitivne nultočke funkcije $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ s točnošću $\varepsilon = 10^{-5}$.

Rješenje: $x_1 \approx -0.537274$, $x_2 \approx 1.315974$

Zadatak 1.9 (Domaća zadaća)**.** Izračunajte $\sqrt[4]{7}$ na 4 decimale ($x^4 - 7 = 0$, $\varepsilon = 10^{-4}$).

Rješenje: $x_1 \approx -1.62658$, $x_2 \approx 1.62658$

Zadatak 1.10 (Domaća zadaća)**.** Newtonovom metodom (metodom tangente) riješite sljedeće zadatke. U svakom zadatku prije samog korištenja metode odredite sve kriterije zaustavljanja (koji se mogu izračunati) vezano uz ovu metodu.

a) Numerički izračunajte $\sqrt[3]{-3}$ s točnošću 10^{-7}. Duljina intervala na kojemu ste izolirali nultočku neka bude barem 2.

b) Numerički izračunajte $\ln 3$ tako da greška bude manja od 10^{-3}. Duljina intervala na kojemu ste izabrali nultočku neka bude barem 0.1.

c) Numerički izračunajte $\ln 5$ tako da greška bude manja od 10^{-8}. Duljina intervala na kojemu ste izabrali nultočku neka bude barem 1.

Rješenje: a) $x \approx -1.44224957$, b) $x \approx 1.0986$, c) $x \approx 1.609437912$

Zadatak 1.11 (Domaća zadaća)**.** Odredite metodu za rješavanje jednadžbe:

$$e^{\frac{1}{1+x^2}} = x,$$

tako da greška bude manja od 10^{-3}. Prije samog korištenja metode, odredite sve kriterije zaustavljanja (koji se mogu izračunati) vezane uz tu metodu. Duljina intervala na kojemu ste izolirali nultočku neka bude barem 1.

Rješenje: $x \approx 1.4014$

Zadatak 1.12 (Domaća zadaća)**.** Metodom raspolavljanja riješite sljedeće zadatke. U svakom zadatku prije samog korištenja metode odredite sve kriterije zaustavljanja (koji se mogu izračunati) vezane uz ovu metodu. Duljina intervala na kojemu ste izolirali nultočku neka bude barem 1.

a) Numerički izračunajte $\sqrt[3]{-3}$ s točnošću 10^{-3}.

b) Numerički izračunajte $\ln 3$ tako da greška bude manja od 10^{-3}.

c) Numerički izračunajte $\ln 5$ tako da greška bude manja od 10^{-3}.

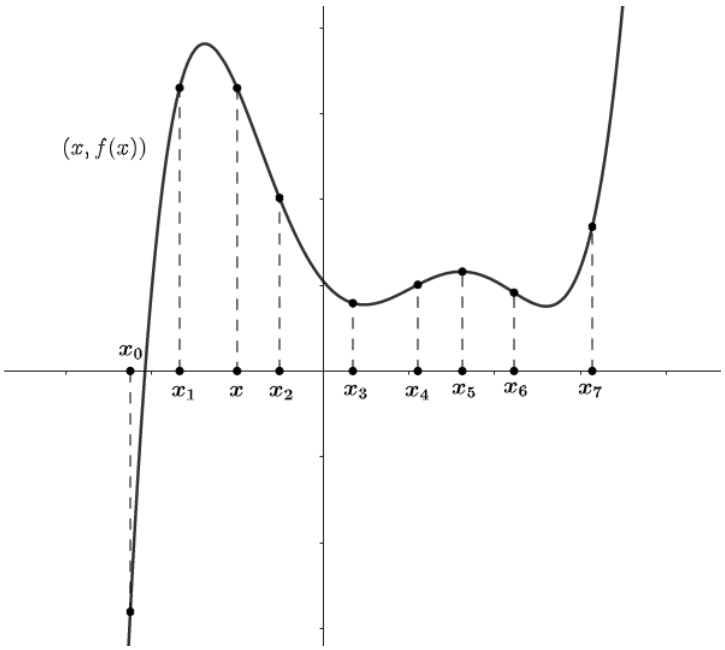
Rješenje: a) $x \approx -1.4423$ b) $x \approx 1.0986$, c) $x \approx 1.6094$

2. Aproksimacija i interpolacija

Za funkciju f znamo samo vrijednosti u $n+1$ različitih točaka $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \neq x_j$ za $i \neq j$), tj. $f_k := f(x_k)$.

Cilj: Aproksimirati na neki način funkciju f nekom poznatom funkcijom φ tako da vrijedi $\varphi(x_k) = f_k = f(x_k)$. Time za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ vrijednost funkcije f u x tj. $f(x)$ aproksimiramo s $\varphi(x)$.

Standardne pretpostavke za čvorove interpolacije: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.



Slika 18: Subdivizija.

Pitanja:

1) U kojoj klasi funkcija tražiti φ?

2) Koliko je aproksimacija dobra - ocjena greške?

Odgovor na 1): Za φ obično uzimamo polinom ili splajn (po dijelovima polinom).

Od ranije znamo da kroz točke (x_0, f_0), (x_1, f_1), $\ldots$, (x_n, f_n) postoji jedinstveni polinom stupnja najviše n. U nastavku definiramo interpolacijski polinom za f u čvorovima $x_0, \ldots, x_n$. Imamo:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,$$

gdje je φ linearna kombinacija kanonske baze $\{1, x, \ldots, x^n\}$. Slijedi:

$$\begin{aligned}
&a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = f_0,\\
&a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = f_1,\\
&\ldots\\
&a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = f_n,
\end{aligned}$$

što zapisujemo kao:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \dots \\ f_n \end{bmatrix},$$

gdje je $\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & & \dots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}$ Vandermondeova matrica koja je regularna ako i samo ako $x_i \neq x_j$, $i \neq j$.

Označimo s p_n gornji interpolacijski polinom (stupnja najviše n), tj.

$$p_n(x_k) = f_k.$$

Izvedimo ocjenu pogreške takvog polinoma.

Teorem 2.1. *Za $n \in \mathbb{N}_0$, neka je $f \in C^{n+1}([a,b])$, neka su $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$, $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$, čvorovi interpolacije, te neka je p_n interpolacijski polinom za f u danim čvorovima. Za proizvoljan $x \in [a,b]$ vrijedi:*

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!} M_{n+1},$$

pri čemu je $\omega(x) = \Pi_{k=0}^n (x - x_k)$ i $M_{n+1} := \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$.

Dokaz: Ukoliko je $x = x_k$ za neki $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, tada je :

$$f(x_k) - p_n(x_k) = f_k - f_k = 0 \text{ i } \omega(x_k) = 0,$$

pa je nejednakost trivijalno zadovoljena.

Dakle, pretpostavimo $x \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.

Definirajmo (za $y \in [a,b]$):

$$e(y) := f(y) - p_n(y),$$
$$\omega(y) := \Pi_{k=0}^n (y - x_k).$$

Vrijedi: $e, \omega \in C^{n+1}([a,b])$, $e(x_0) = \dots = e(x_n) = 0$ te $\omega(x_0) = \dots = \omega(x_n) = 0$, $\omega(x) \neq 0$.

Dalje, definirajmo:

$$g(y) := e(y) - \omega(y)\frac{e(x)}{\omega(x)},$$

gdje je $x \neq x_k$, $k = 0, \dots, n$ pa $\omega(x) \neq 0$.

Iz gornjeg imamo $g \in C^{n+1}([a,b])$ te;

$$g(x_0) = \dots = g(x_n) = 0.$$

Dodatno, $g(x) = e(x) - \omega(x)\frac{e(x)}{\omega(x)} = e(x) - e(x) = 0$.

Dakle, $g \in C^{n+1}([a,b])$ i ima barem $n+2$ nultočke u $[a,b]$.

Iz Rolleovog teorema srednje vrijednosti slijedi da g' ima barem $n+1$ nultočki, pa g'' ima barem n nultočki itd. sve do toga da $g^{(n+1)}$ ima barem jednu nultočku $\xi \in [a,b]$.

Vrijedi:

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(y) &= e^{(n+1)}(y) - \omega^{(n+1)}(y)\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(y) - p_n^{(n+1)}(y) - \omega^{(n+1)}(y)\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ &= f^{(n+1)}(y) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)}, \end{aligned}$$

gdje je $p^{(n+1)}(y) = 0$ te $\omega^{(n+1)}(y) = (n+1)!$.

Dalje, imamo:

$$\begin{aligned} 0 = g^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - (n+1)!\frac{e(x)}{\omega(x)} \\ \Rightarrow e(x) &= \frac{\omega(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi) \\ \Rightarrow |f(x) - p_n(x)| = |e(x)| &\leq \frac{|\omega(x)|}{(n+1)!}M_{n+1}. \end{aligned}$$

□

Dakle, sigurno znamo da takav polinom postoji, ali je gornji postupak njegovog računanja kompliciran. Iz tog razloga navodimo dva načina za njegovo brže računanje.

2.1. Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Za $k \in \mathbb{N}_0$ definiramo:

$$l_k(x) := \frac{(x-x_0)\cdot\cdots\cdot(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdot\cdots\cdot(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdot\cdots\cdot(x_k-x_n)} = \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}.$$

Uočimo da je l_k polinom stupnja n, te:

$$l_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k. \end{cases}$$

Sada imamo:

$$p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}, \ \omega_k(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n}(x-x_j).$$

Imamo linearnu kombinaciju polinoma stupnja n, pa je stupanj manji ili jednak n. Nadalje, vrijedi:

$$p_n(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k l_k(x_j) = \sum_{k=0}^{n} f_k \delta_{kj} = f_j, \ j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Dakle, p_n je traženi interpolacijski polinom stupnja najviše n.

U praksi je ovaj način kompliciran za velike n. Također, ako želimo postupno dodavati točke, gornjom konstrukcijom moramo za svaki n gotovo iz početka krenuti.

2.2. Newtonov oblik interpolacijskog polinoma

Ideja je korak po korak dodavati čvorove interpolacije i time na raspolaganju imati interpolacijski polinom za (x_0, f_0), zatim za (x_0, f_0), (x_1, f_1), pa za (x_0, f_0), (x_1, f_1), (x_2, f_2) itd.

Konkretno, neka je p_{n-1} interpolacijski polinom za $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, a p_n za skup $\{x_0, \ldots, x_n\}$. Cilj je pronaći polinom c najviše n-tog reda tako da vrijedi $p_n(x) = p_{n-1}(x) + c(x)$.

Iz $c(x) = p_n(x) - p_{n-1}(x)$ vidimo da su $x_0, \ldots, x_{n-1}$ nultočke polinoma c, pa je c nužno oblika $a_n(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$.

Sada imamo $p_n(x) = p_{n-1}(x) + a_n(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1})$, gdje je $p_{n-1}(x)$ polinom stupnja manjeg ili jednakog od $n - 1$, dok je $a_n(x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1})$ polinom stupnja n.

Slijedi da je a_n zapravo vodeći koeficijent polinoma p_n, a njega možemo odrediti iz Lagrangeovog oblika $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)}$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\omega_k(x_k)} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{(x_k - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_n)} \\ &:= f[x_0, \ldots, x_n]. \end{aligned}$$

Dodefiniramo $f[x_k] = f_k$. Napokon, imamo:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= f_0, \\ p_2(x) &= p_1(x) + f[x_0, x_1](x - x_0), \\ &\ldots \\ p_n(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Koeficijente $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ ne moramo svaki zasebno računati već vrijedi sljedeća formula:

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Za $n = 1$ imamo $f[x_0, x_1] = \frac{f_0}{x_0 - x_1} + \frac{f_1}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$. Općenito računamo:

$$\begin{aligned} f[x_1, \ldots, x_n] &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f_k}{(x_k - x_1) \cdot \ldots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_n)} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k (x_k - x_0)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \ldots (x_k - x_n)} \\ &+ \frac{f_n (x_n - x_0)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} f[x_0, \ldots, x_{n-1}] &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k (x_k - x_n)}{(x_k - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdot \cdots \cdot (x_k - x_{n-1})(x_k - x_n)} \\ &- \frac{f_0 (x_n - x_0)}{(x_0 - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_{n-1})(x_0 - x_n)}. \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}] &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f_k}{\omega_k(x_k)} (x_k - x_0 - x_k + x_n) \\ &+ \frac{f_n}{\omega_n(x_n)} (x_n - x_0) + \frac{f_0}{\omega_0(x_0)} (x_n - x_0) \\ &= (x_n - x_0) \sum_{k=0}^{n} \frac{f_k}{\omega_k(x_k)} \\ &= (x_n - x_0) f[x_0, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

Da rezimiramo, imamo sljedeću tablicu podijeljenih razlika:

Tablica podijeljenih razlika					
x_k	$f[x_k]$	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$\ldots$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
x_0	$f[x_0]$				
		$f[x_0, x_1]$			
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$		
		$f[x_1, x_2]$		$\ldots$	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$		$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
		$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$		$\ldots$	
x_{n-1}	$f[x_{n-1}]$		$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
		$f[x_{n-1}, x_n]$			
x_n	$f[x_n]$				

te interpolacijski polinom:

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \cdots + f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1}).$$

Napomena 2.2. Za međusobno različite točke $x_0, \ldots, x_n$ podijeljena razlika $f[x_0, \ldots, x_n]$ ne ovisi o permutaciji točaka, tj. za σ permutaciju vrijedi $f[x_0, \ldots, x_n] = f[x_{\sigma(0)}, \ldots, x_{\sigma(n)}]$.

Zadaci

Zadatak 2.1. Nađite interpolacijski polinom koji funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ interpolira u točkama s x-koordinatama $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ i $x_2 = \frac{1}{2}$. Ocijenite grešku tako dobivene interpolacije. Nadalje, izračunajte vrijednost dobivenog interpolacijskog polinoma u točki $x = 0.4$, ocijenite grešku interpolacije u toj točki te nađite pravu grešku.

Rješenje: Za funkciju $f(x) = \sin(\pi x)$ imamo:

x_k	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
f_k	0	$\frac{1}{2}$	1

Dakle, imamo $n = 2$ te $p_2(x) = \sum_{k=0}^{2} f_k l_k(x)$, gdje računamo:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-\frac{1}{6})(x-\frac{1}{2})}{(-\frac{1}{6})(-\frac{1}{2})} = \frac{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}}{\frac{1}{12}} = 12x^2-8x+1,$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x(x-\frac{1}{2})}{\frac{1}{6}(-\frac{1}{3})} = \frac{x^2-\frac{1}{2}x}{-\frac{1}{18}} = -18x^2+9x,$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x(x-\frac{1}{6})}{\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 6x^2-x.$$

Dakle, interpolacijski polinom je dan u obliku: $p_2(x) = 0 \cdot l_0(x) + \frac{1}{2} l_1(x) + 1 \cdot l_2(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$. Njega smo mogli dobili i Newtonovom metodom:

Tablica podijeljenih razlika			
x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_0, x_1, x_2]$
0	0		
		3	
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{\frac{3}{2}-\frac{6}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$
		$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$	
$\frac{1}{2}$	1		

Dakle, dobivamo $p_2(x) = 0 + 3(x-0) - 3(x-0)(x-\frac{1}{6}) = 3x - 3x(x-\frac{1}{6}) = -3x^2 + \frac{7}{2}x$.

Ocjena pogreške je dana sa:

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{|\omega(x)|}{3!} M_3,$$

gdje je $M_3 = \max\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f'''(x)| = \max\limits_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |-\pi^3 \cos(\pi x)| = \pi^3$ (za $x = 0$).

Sada računamo:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = x\Big(x-\frac{1}{6}\Big)\Big(x-\frac{1}{2}\Big)\\ &= x\Big(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{12}\Big) = x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{x}{12}.\end{aligned}$$

Dakle, imamo ocjenu:

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{|x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{12}x|}{6}\pi^3.$$

Aproksimacijska vrijednost funkcije f u točki $x = 0.4$ jest $p_2(0.4) \approx 0.92$.

Stvarna greška je dana sa:

$$|f(0.4) - p_2(0.4)| = 0.0310565,$$

dok je ocjena greške dana sa:

$$|f(0.4) - p_2(0.4)| \leq \frac{|\omega(0.4)|}{6}\pi^3 = 0.0482320.$$

□

Zadatak 2.2 (Domaća zadaća)**.** Funkcija $\sqrt[3]{x}$ zadana je sljedećom tablicom:

x_k	1.0	1.1	1.3	1.5	1.6
f_k	1.00000000	1.03228012	1.09139288	1.14471424	1.16960710

Nađite vrijednost $\sqrt[3]{1.15}$ i ocijenite grešku. Nađite i pravu grešku.

Rješenje: Napravimo tablicu podijeljenih razlika na sljedeći način:

Tablica podijeljenih razlika					
x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+3}]$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
1	1.00000000				
		0.3228012			
1.1	1.03228012		−0.09079133		
		0.2955638		0.03679766	
1.3	1.09139288		−0.0723925		−0.01644553
		0.2666068		0.02693034	
1.5	1.14471424		−0.05892733		
		0.2489286			
1.6	1.16960710				

Dakle, interpolacijski polinom je dan sa: $p_4(x) = 1+0.3228012(x-1)-0.09079133(x-1)(x-1.1) + 0.03679766(x-1)(x-1.1)(x-1.3) - 0.01644553(x-1)(x-1.1)(x-1.3)(x-1.5)$.

Stoga imamo: $p_4(1.15) = 1.04769137$. Nadalje, imamo:

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x-1)(x-1.1)(x-1.3)(x-1.5)(x-1.6)\\ &= x^5 - 6.5x^4 + 16.77x^3 - 21.463x^2 + 13.625x - 3.432.\end{aligned}$$

Ocjena pogreške je dana sa:

$$|f(1.15) - p_4(1.15)| \leq \frac{|\omega(1.15)|}{5!}M_5 = 0.00000535,$$

gdje je:

$$\omega(1.15) = (1.15-1)(1.15-1.1)(1.15-1.3)(1.15-1.5)(1.15-1.6) = -0.0001772,$$

te:

$$M_5 = \max_{x\in[1,1.6]}|f^{(5)}(x)| = \max_{x\in[1,1.6]}\left|\frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}}\right| = 3.62139918.$$

Prava pogreška je dana sa;

$$|f(1.15) - p_4(1.15)| \leq 1.81682835 \cdot 10^{-6}.$$

□

Zadatak 2.3. (Domaća zadaća) Nađite interpolacijski polinom za $(0, 1)$, $(-1, 2)$, $(1, 3)$.

Rješenje: $p_2(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ □

Zadatak 2.4. (Domaća zadaća) Nađite interpolacijski polinom koji interpolira funkciju $f(x) = \log x$ u točkama s x–koordinatama $1, 10, 100, 1000$. Nađite vrijednost $\log 500$, ocijenite grešku i nađite pravu grešku.

Rješenje: $p_3 = \frac{1}{9}(x-1) - \frac{1}{990}(x-1)(x-10) + \frac{1}{999000}(x-1)(x-10)(x-100)$, $f(500) = 2.69897000$, ocjena greške u $x = 500$: $|f(500) - p_3(500)| \leq 5309467189$, stvarna greška u $x = 500$: $|f(500) - p_3(500)| \leq 96.33242164$. □

Zadatak 2.5. Funkcija $f(x) = \sin(\pi x)$ zadana je tablicom:

x_k	0	0.25	0.5	0.75	1
f_k	0	0.70710678	1	0.70710678	0

Nađite vrijednost u $x = 0.6$ i ocijenite grešku. Nađite pravu grešku.

Rješenje: Koristimo Newtonovu metodu:

Tablica podijeljenih razlika					
x_k	f_k	$f[x_k, x_{k+1}]$	$f[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}]$	$f[x_k, \ldots, x_{k+3}]$	$f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$
0	0				
		2.82842712			
0.25	0.70710678		-3.31370848		
		1.17157288		-1.83011072	
0.5	1		-4.68629152		3.66022144
		-1.17157288		1.83011072	
0.75	0.70710678		-3.31370848		
		-2.82842712			
1	0				

Imamo interpolacijski polinom:

$$p_4(x) = 0 + 2.82842712x - 3.31370848x(x - 0.25) - 1.83011072x(x - 0.25)(x - 0.5) + 3.66022144x(x - 0.25)(x - 0.5)(x - 0.75).$$

Vrijednost interpolacijskog polinoma u točki $x = 0.6$:

$$p_4(0.6) = 0.95121547.$$

Ocjene pogreške je dana sa:

$$|f(0.6) - p_4(0.6)| \leq \frac{|\omega(0.6)|}{5!} M_5 = 0.00321321.$$

gdje je:

$$M_5 = \max_{x\in[0,1]} |f^{(5)}(x)| = \pi^5,$$

te:

$$\omega(0.6) = (0.6-0)(0.6-0.25)(0.6-0.5)(0.6-0.75)(0.6-1) = 0.00126.$$

Stvarna greška je dana sa:

$$|f(0.6) - p_4(0.6)| \leq 0.00015895.$$

□

Zadatak 2.6 (Domaća zadaća)**.** Odredite interpolacijski polinom stupnja 5 koji aproksimira funkciju $f(x) = e^{\cos x}$ na ekvidistantnoj mreži intervala $[\frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{8}]$. Ocijenite grešku tako dobivene interpolacije. Izračunajte vrijednost tako dobivenog interpolacijskog polinoma u točki $x = \frac{3\pi}{64}$, ocijenite grešku interpolacije te nađite pravu grešku.

2.3. Linearni interpolacijski splajn

Neka je dana funkcija $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Neka je dana subdivizija $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ te $f(x_k) = f_k$. Definiramo:

$$\varphi|_{[x_{i-1},x_i]} = \varphi_i,\ \ \varphi_i(x) = f_{i-1} + \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}),\ \ x \in [x_{i-1}, x_i],$$

što je pravac kroz (x_{i-1}, f_{i-1}) te (x_i, f_i).

Za $x \in [x_{i-1}, x_i]$ po Teoremu 2.1 imamo:

$$\begin{aligned} |f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - \varphi_i(x)| &\leq \frac{|(x-x_{i-1})(x-x_i)|}{2!} \max_{y\in[x_{i-1},x_i]} |f''(y)| \\ &\leq \frac{|(x-x_{i-1})(x-x_i)|}{2!} M_2. \end{aligned}$$

Parabola $x \mapsto (x - x_{i-1})(x - x_i)$ poprima lokalni minimum u $x = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, pa imamo:

$$|(x-x_{i-1})(x-x_i)| \leq \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} \leq \frac{h_{max}^2}{4},$$

gdje je $h_{max} = \max_{i=1,\ldots,n}\{x_i - x_{i-1}\}$. Sada dobivamo ocjenu:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{h_{max}^2}{8} M_2.$$

Na primjer, uzmemo li ekvidistantnu mrežu $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, slijedi da je $h_{max} = \frac{b-a}{n}$, pa dobivamo $|f(x) - \varphi(x)| \to 0$, za $n \to \infty$.

Zadaci

Zadatak 2.7. Nađite linearni interpolacijski splajn koji interpolira funkciju $f(x) = \log x$ u točkama s x–koordinatama $0.5, 1, 1.5, 2$. Nađite vrijednost $\log 1.4$ preko linearnog splajna i ocijenite grešku. Nađite i pravu grešku.

Rješenje: Imamo sljedeću tablicu funkcijskih vrijednosti za $f(x) = \log x$:

x_k	0.5	1	1.5	2
f_k	-0.30103000	0	0.17609126	0.30103000

Sada imamo splajn definiran po dijelovima.

φ na $[0.5, 1]$ je dan u sljedećem obliku:

$$\varphi_1(x) = -0.30103000 + 0.60206(x - 0.5).$$

φ na $[1, 1.5]$ je dan u sljedećem obliku:

$$\varphi_2(x) = 0 + 0.35218252(x - 1).$$

φ na $[1.5, 2]$ je dan u sljedećem obliku:

$$\varphi_3(x) = 0.17609126 + 0.24987748(x - 1.5).$$

Vrijednost splajna u $x = 1.4$ je $\varphi(1.4) = \varphi_2(1.4) = 0.15110351$, dok je prava vrijednost $f(1.4) = 0.14612804$. Prava pogreška je dana sa:

$$|f(1.4) - \varphi(1.4)| \leq 0.00497548.$$

Znamo da je $f''(x) = -\frac{1}{\ln(10)x^2}$ pa je $M_2 = \max\limits_{x\in[0.5,2]} |f''(x)| = 1.73717793$, pa je ocjena pogreške dana sa:

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{1.73717793}{8} 0.5^2 = 0.05428681.$$

□

Zadatak 2.8 (Domaća zadaća)**.** Funkciju $f(x) = \sqrt{3x + 5}$ aproksimirajte:

a) Newtonovim oblikom interpolacijskog polinoma stupnja 3 na ekvidistantnoj mreži intervala $[-1.5, 1.5]$.

b) Newtonovim oblikom interpolacijskog polinoma u točkama s apscisama

$$x_k = -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

c) Lagrangeovim oblikom interpolacijskog polinoma stupnja 3 na ekvidistantnoj mreži intervala $[-1.5, 1.5]$.

d) Lagrangeovim oblikom interpolacijskog polinoma u točkama s apscisama

$$x_k = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right), \quad k \in \{0,1,2,3\}.$$

e) Linearnim interpolacijskim splineom s 4 ekvidistantna čvora u intervalu $[-1.5, 1.5]$.

f) Linearnim interpolacijskim splineom u točkama s apscisama

$$x_k = -\frac{3}{2}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right), \quad k \in \{0,1,2,3\}.$$

Nađite vrijednost interpolacijskog polinoma u točki 0.75, ocijenite grešku u toj točki i nađite pravu grešku u toj točki. Nađite vrijednost interpolacijskog splinea u točki 0.75, ocijenite grešku u toj točki i nađite pravu grešku u toj točki.

Rješenje: a) $p_3(x) = 0.7071068 + 1.1637219(x+1.5) - 0.2424704(x+1.5)(x+0.5) + 0.05645948(x+1.5)(x+0.5)(x-0.5)$, $p_3(0.75) = 2.6832311$, ocjena greške: $|f(0.75) - p_3(0.75)| \leq 18.87747803$, prava greška: $|f(0.75) - p_3(0.75)| \leq 0.0093513$

Zadatak 2.9 (Domaća zadaća)**.** Vrijednost udjela investicijskog novčanog fonda mjerene su tijekom 6 radnih dana. Izmjerene vrijednosti se nalaze u tablici.

dan	1	2	3	4	5
vrijednosti udjela	116.95	116.96	116.97	116.98	117.00

a) Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji aproksimira dane podatke.

b) Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji aproksimira dane podatke.

c) Odredite linearni interpolacijski spline koji aproksimira dane podatke.

d) Odredite Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma koji aproksimira prva četiri dana podataka.

e) Odredite Newtonov oblik interpolacijskog polinoma koji aproksimira zadnja četiri dana podataka.

f) Odredite linearni interpolacijski spline koji aproksimira zadnja četiri dana podatka.

Rješenje: b) $p_4(x) = 116.95 + 0.01(x-1) + 0.000425(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ c) $\varphi_1(x) = 116.95+0.01(x-1)$, $\varphi_2(x) = 116.96+0.01(x-2)$, $\varphi_3(x) = 116.97+0.01(x-3)$, $\varphi_3(x) = 116.98+0.02(x-4)$ e) $p_3(x) = 116.96+0.01(x-2)+0.002(x-2)(x-3)(x-4)$ f) $\varphi_1(x) = 116.96+0.1(x-2)$, $\varphi_2(x) = 116.97+0.01(x-3)$, $\varphi_3(x) = 116.98+0.02(x-4)$

3. Numerička integracija

Za $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ želimo izračunati integral :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Općenito je integriranje teže od deriviranja, pa često ne znamo izračunati gornji integral. Tada ima smisla računati približnu vrijednost.

Aproksimaciju tražimo u sljedećem obliku:

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

pri čemu je $m \in \mathbb{N}$ zadan, $x_k^{(m)}$ se zovu čvorovi integracije, a $w_k^{(m)}$ težinski koeficijenti.

Radimo samo metode Newton–Cotesovog tipa gdje je mreža integracije ekvidistantna. Za $m \in \mathbb{N}$, uzimamo $x_0 := a$, $x_k^{(m)} := x_0 + kh_m$, $h_m := \frac{b-a}{m}$, $k = 0, 1, \ldots, m$ (posebno, $x_m = b$).

Za takvu fiksnu mrežu preostalo je samo odrediti $m+1$ koeficijent $w_0^{(m)}, \ldots, w_m^{(m)}$ tako da:

$$I_m(f) = \sum_{k=0}^{m} w_k^{(m)} f(x_k^{(m)}),$$

što bolje aproksimira $I(f)$.

3.1. Trapezna formula

Imamo $m = 1$, pa je $x_0 = a$, $x_1 = b$ te $h = h_1 = b - a$.

Trebamo odrediti w_0, w_1 tako da:

$$I_T(f) = I_1(f) = w_0 f(a) + w_1 f(b),$$

što bolje aproksimira $I(f)$.

Neka je p_1 interpolacijski polinom za f u čvorovima $x_0 = a$ i $x_1 = b$. Vrijedi:

$$p_1(x) = f[a] + f[a,b](x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

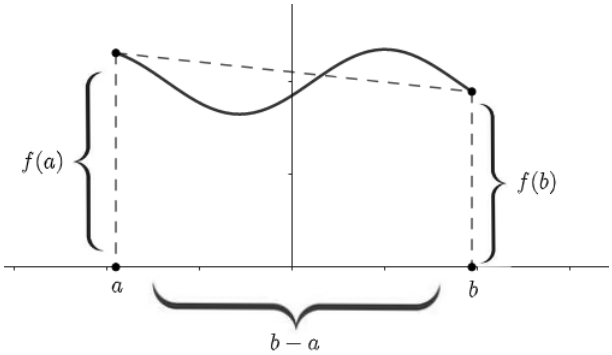
Sada želimo: $I_1(f) = I(p_1)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} I(p_1) &= f(a)\int_a^b dx + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)dx \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{b-a}{2}f(a) + \frac{b-a}{2}f(b) \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Formula (3.1) se zove trapezna formula.

Napomena 3.1. a) Trapezna formula se također može dobiti tako da se zahtijeva da je $I_T(p) = I(p)$, za polinome stupnja manjeg ili jednakog 1.

b) Trapez visine $b-a$ i srednjice $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ ima površinu $\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$.



Slika 19: Trapezna formula.

c) Već za polinome stupnja 2 trapezna formula više neće biti egzaktna:

$$\frac{b^3-a^3}{3} = \int_a^b x^2 dx \neq I_1(x^2) = \frac{a^2+b^2}{2}(b-a).$$

Može se pokazati da imamo jednakost ako i samo ako je $a = b$, što nije moguće jer $b > a$. Npr. za $a = 0$, $b = 1$ vrijedi $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$.

Teorem 3.2. *Neka je $f \in C^2([a,b])$. Tada je:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - I_T(f) \right| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3.$$

Dokaz: Vrijedi (u drugoj jednakosti koristimo rezultat iz Teorema 2.1):

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx - I_1(f) &= \int_a^b (f(x) - p_1(x))dx \\
&= \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (-(x-a)(x-b))(-f''(\xi))dx \\
&\leq \frac{M_2}{2}\int_a^b (a-x)(x-b)dx \\
&= \frac{M_2}{12}(b-a)(a^2+b^2-2ab) = \frac{M_2}{12}(b-a)^3.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

□

Formula (3.2) nije egzaktna za kvadratne polinome, a njihov integral je reda $(b-a)^3$, pa je od tuda i pogreška tog reda.

3.2. Simpsonova formula

Neka je $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$, $h = \frac{b-a}{2}$. Imamo:

$$I_S(f) = I_2(f) = w_0 f(a) + w_1 f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + w_2 f(b).$$

Neka je p_2 interpolacijski polinom za f u čvorovima x_0, x_1, x_2:

$$p_2(x) = f[a] + f\Big[a, \frac{a+b}{2}\Big](x-a) + f[x_0, x_1, x_2](x-x_0)(x-x_1).$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}
f[x_0] &= f(a),\\
f[x_0, x_1] &= \frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{\frac{b-a}{2}} = 2\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a},\\
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = 2\frac{\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})}{b-a} - \frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{b-a}}{b-a}\\
&= 2\frac{f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a)}{(b-a)^2}.
\end{aligned}$$

Nadalje, vrijedi $\int_a^b dx = b-a$, $\int_a^b (x-a)dx = \frac{(b-a)^2}{2}$ te:

$$\begin{aligned}
\int_a^b (x-a)\Big(x - \frac{a+b}{2}\Big)dx &= \int_a^b x^2 dx - \Big(a + \frac{a+b}{2}\Big)\int_a^b x dx + a\frac{a+b}{2}\int_a^b dx\\
&= \frac{b^3-a^3}{3} - \Big(a + \frac{a+b}{2}\Big)\frac{b^2-a^2}{2} + a\frac{a+b}{2}(b-a)\\
&= \frac{1}{12}(b-a)(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3(3a+b)(b+a) + 6a^2 + 6ab)\\
&= \frac{1}{12}(b-a)(4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 9a^2 - 12ab + 6a^2 + 6ab)\\
&= \frac{1}{12}(b-a)(b^2 + a^2 - 2ab)\\
&= \frac{1}{12}(b-a)^3.
\end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned}
I_2(f) &= \int_a^b p_2(x)dx\\
&= f(a)(b-a) + 2\frac{f(\frac{a+b}{2}) - f(a)}{b-a}\frac{(b-a)^2}{2} + 2\frac{f(b) - 2f(\frac{a+b}{2}) + f(a)}{(b-a)^2}\frac{1}{12}(b-a)^3\\
&= (b-a)\Big(f(a) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - f(a) + \frac{f(b)}{6} - \frac{f(\frac{a+b}{2})}{3} + \frac{f(a)}{6}\Big)\\
&= \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big)\\
&= \frac{h}{3}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big).
\end{aligned}$$

Teorem 3.3. *Neka je $f \in C^4([a,b])$. Tada je:*

$$\Big| \int_a^b f(x)dx - I_2(f) \Big| \leq \frac{M_4}{180 \cdot 16}(b-a)^5 = \frac{M_4 h^5}{90},$$

gdje je $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$ i $h = \frac{b-a}{2}$.

Napomena 3.4. Vrijedi analogna tvrdnja kao u Napomeni 3.1 a) za polinome drugog stupnja. Međutim, Simpsonova formula je egzaktna i za polinom trećeg stupnja (pokažite!), pa je to razlog zašto je ocjena bolja od očekivane.

Dokaz: Dajemo samo ideju dokaza. Vrijedi (u drugoj jednakosti koristimo parcijalnu integraciju):

$$\begin{aligned}\Big| \int_a^b f(x)dx - I_2(f) \Big| &= \Big| \int_a^b \frac{(x-a)(x-\frac{a+b}{2})(x-b)}{6} f^{(3)}(\xi_x)dx \Big| \\ &= \Big| \int_a^b w(x)(f'''(\xi_x))' dx \Big|.\end{aligned}$$

Koristimo:

a) Definiramo:

$$w(x) := \int_a^x (y-x_0)(y-x_1)(y-x_2)dy, \;\; w(a) = w(b) = 0, \;\; w(x) \geq 0.$$

b) Za $f \in C^4$ slijedi da postoji $(f'''(\xi_x)))'$ tako da vrijedi $|(f'''(\xi_x))'| \leq CM_4$.

□

3.3. Produljene formule

Produljene formule dobivamo tako da segment $[a,b]$ podijelimo na n segmenata jednake duljine i onda na svakom podsegmentu primijenimo odgovarajuću formulu.

Uzmemo $x_0 = a$, $x_k = a + kh$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Produljena trapezna

Vrijedi:

$$\begin{aligned}I_{PT}(f) = \sum_{k=1}^n I_1^k = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} p_1^k(x)dx &= \sum_{k=1}^n \frac{h}{2}(f(x_{k-1}) + f(x_k)) \\ &= \frac{h}{2}\sum_{k=1}^n (f(x_{k-1}) + f(x_k)) \\ &= \frac{h}{2}(f(a) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b)).\end{aligned}$$

U nastavku dajemo ocjenu greške. Za $f \in C^2([a,b])$ imamo:

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx - I_{PT}(f)\Big| &\leq \sum_{k=1}^{n}\Big|\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} p_1^k(x)dx\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{M_2}{12}h^3 = \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}.\end{aligned}$$

Dakle, ako želimo da je greška manja ili jednaka ε, tada za n dobivamo da je dovoljno da vrijedi $\frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2} \leq \varepsilon$, tj. da vrijedi:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2}{12\varepsilon}}.$$

Produljena Simpsonova

U Simpsonovoj formuli svaki od podsegmenata podijelimo na dva segmenta jednake duljine tako da ukupno uvijek imamo paran broj segmenata.

Označimo s n ukupan broj segmenata (dakle, n je paran broj) i $h = \frac{b-a}{n}$. Definiramo $x_k := a + kh$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Imamo:

$$\begin{aligned}I_{PS}(f) =& \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} I_{S,[x_{2k-2},x_{2k}]}(f) \\ =& \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{h}{3}(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})) \\ =& \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)) \\ =& \frac{h}{3}(f(x_0) + 4\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2k}) + f(x_n)\Big).\end{aligned}$$

U nastavku dajemo ocjenu greške. Za $f \in C^4([a,b])$ imamo:

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f(x)dx - I_{PS}(f)\Big| &\leq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\Big|\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - I_{S,[x_{2k-2},x_{2k}]}(f)\Big| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{M_4}{90}h^5 = \frac{M_4}{180}nh^5 = \frac{M_4(b-a)^5}{180n^4}.\end{aligned}$$

Dovoljan uvjet na n da greška bude manja ili jednaka ε jest (n mora biti paran!):

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(b-a)^5}{180\varepsilon}}.$$

Zadaci

Zadatak 3.1. Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

s 10 podintervala, ocijenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje: Za početak, odredimo ocjenu greške. Imamo $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$, $h = \frac{b-a}{10} = 0.1$. Kako je $f \in C^2([0,1])$, za ocjenu greške će nam još biti potrebna i ocjena na drugu derivaciju funkcije f; preciznije, treba nam:

$$M_2(f) = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

Kako je $f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$, zaključujemo da se maksimum postiže u lijevom rubu te je:

$$M_2(f) = 2.$$

Ocjena greške R_{PT} će iznositi:

$$|R_{PT}| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f) = \frac{1}{600} \approx 1.7 \cdot 10^{-3}.$$

Računamo vrijednosti funkcije f u čvorovima $x_k = kh$, $k = 0, 1, \ldots, 10$.

x_k	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x_k)$	1.0000	0.9091	0.8333	0.7692	0.7143

x_k	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x_k)$	0.6667	0.6250	0.5882	0.5556	0.5263	0.5000

Aproksimacija tada iznosi:

$$I_{PT} = \frac{h}{2}\big(f(x_0) + 2\sum_{k=1}^{9} f(x_k) + f(x_n)\big) \approx 0.6938.$$

Točna vrijednost integrala iznosi:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 \approx 0.6932.$$

Dakle, prava greška je $6 \cdot 10^{-4} < 1.7 \cdot 10^{-3} = R_{PT}$.

Konačno, odredimo broj podintervala potreban da se postigne točnost $\varepsilon = 10^{-4}$. Iz ocjene greške slijedi da mora biti:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2(f)}{12\varepsilon}} \approx 40.82,$$

pa zaključujemo da je potreban (barem) 41 podinterval. □

Zadatak 3.2. Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_{0.7}^{0.9} \operatorname{sh} x dx,$$

tako da greška bude manja ili jednaka $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje: Kako je $f \in C^2([a,b])$, ponovno koristimo isti postupak. Ocijenimo prvo drugu derivaciju na intervalu $[a,b] = [0.7, 0.9]$. Imamo $f''(x) = \operatorname{sh} x$, pa kako je sh rastuća funkcija na $[0.7, 0.9]$, dobivamo:

$$M_2(f) = \max_{x \in [0.7, 0.9]} |f''(x)| = \operatorname{sh} 0.9 \approx 1.027.$$

Odredimo sada potreban broj podintervala da bi greška bila manja od $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$n \geq \sqrt{\frac{(b-a)^3 M_2(f)}{12\varepsilon}} \approx 2.62,$$

pa zaključujemo da su potrebna tri podintervala (odnosno $n = 3$). Stavimo $h = \frac{0.2}{3} \approx 0.06667$. Čvorovi integracije su tada točke:

$$x_k = 0.7 + kh, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Vrijednosti funkcije u tim čvorovima su:

x_k	0.7000	0.76667	0.83334	0.9000
$f(x_k)$	0.75858	0.84401	0.93320	1.02692

Aproksimirana vrijednost integrala je tada:

$$I_{PT} \approx 0.17799.$$

Prava vrijednost integrala je:

$$\int_{0.7}^{0.9} \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x \Big|_{0.7}^{0.9} \approx 0.17792$$

□

Zadatak 3.3. Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x},$$

s 10 podintervala, ocijenite grešku i nađite pravu grešku. Nađite broj podintervala potreban da se istom formulom postigne točnost $\varepsilon = 10^{-8}$.

Rješenje: Imamo $a = 0$, $b = 1$, $n = 10$, $h = \frac{b-a}{n} = 0.1$. Čvorovi integracije će biti točke:

$$x_k = kh, \quad k = 0, 1, \ldots, 10.$$

Vrijednosti funkcije u tim točkama smo već izračunali u Zadatku 3.1. Aproksimirana vrijednost integrala je tada:

$$I_{PS} = \frac{h}{3}\big(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\cdots+4f(x_{n-1})+f(x_n)\big) \approx 0.69315023.$$

Ocjena greške glasi:

$$|R_{PS}| \leq \frac{(b-a)^5}{180n^4} M_4(f),$$

gdje je

$$M_4(f) = \max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = \max_{x\in[0,1]} \frac{24}{(1+x)^5} = 24,$$

pa slijedi da je ocjena greške

$$|R_{PS}| \leq 1.33 \cdot 10^{-5}.$$

Prava greška je $3.05 \cdot 10^{-6} < R_{PS}$.

Odredimo još broj intervala za točnost $\varepsilon = 10^{-8}$. Ponovno iz ocjene slijedi da treba biti:

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(f)(b-a)^5}{180\varepsilon}} \approx 60.42$$

Kako n mora biti paran broj, vidimo da je potrebno 62 podintervala za traženu točnost.

□

Zadatak 3.4. Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost integrala

$$\int_0^1 \sin(e^x)dx,$$

tako da greška bude manje ili jednaka $\varepsilon = 10^{-3}$.

Rješenje: Odredimo prvo $M_4(f)$. Imamo:

$$f^{(4)}(x) = e^{2x}\sin(e^x)(e^{2x}-7) + e^x\cos(e^x)(1-6e^{2x}),$$

pa ocjenjujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} |f^{(4)}(x)| &\leq |e^{2x}||\sin(e^x)||e^{2x}-7| + |e^x||\cos(e^x)||1-6e^{2x}| \\ &\leq 6e^2 + e(6e^2-1) \\ &\approx 162.12928. \end{aligned}$$

Za potreban broj podintervala tada imamo ocjenu

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4(f)(b-a)^5}{180\varepsilon}} \approx 5.5,$$

pa slijedi da trebamo uzeti 6 podintervala. Vrijednost funkcije f u čvorovima $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ je:

x_k	0	0.1667	0.3334	0.5	0.6667	0.8334	1
$f(x_k)$	0.8415	0.9251	0.9847	0.9970	0.9298	0.7451	0.4108

Aproksimirana vrijednost integrala je tada

$$I_{PS} \approx 0.87499.$$

□

Zadatak 3.5 (Domaća zadaća)**.** Produljenom trapeznom formulom izračunajte vrijednost navedenog integrala tako da greška bude manja ili jednaka zadanoj točnosti ε. Ocijenite grešku. Kada je to moguće, odredite i pravu grešku.

a) $\int_0^1 \sin(e^x)dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$,

b) $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$,

c) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$, $\varepsilon = 10^{-5}$,

d) $\int_{0.2}^1 (\sin x - \ln x + e^x)dx$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Zadatak 3.6 (Domaća zadaća)**.** Produljenom Simpsonovom formulom izračunajte vrijednost navedenog integrala tako da greška bude manja ili jednaka zadanoj točnosti ε. Ocijenite grešku. Kada je to moguće, odredite i pravu grešku.

a) $\int_{0.7}^{0.9} \operatorname{sh} x dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$,

b) $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$,

c) $\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx$, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$,

d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

Rješenje: c) $I_{PS}(f) = 1.3987$, ocjena greške: $|R_{PS}| \leq 2.03 \cdot 10^{-5}$, prava pogreška: $|\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx - I_{PS}(f)| \leq 1.74 \cdot 10^{-5}$ d) $I_{PS}(f) = 0.642738$, ocjena greške: $|R_{PS}| \leq 5.18832 \cdot 10^{-5}$, prava pogreška: $|\int_0^1 \sqrt{1+2x}dx - I_{PS}(f)| \leq 3.89183 \cdot 10^{-5}$

4. Eulerova metoda

4.1. Algoritam

Promatramo inicijalni problem prvog reda zadan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \tag{4.1}$$

te inicijalnim uvjetom

$$y(t_0) = y_0. \tag{4.2}$$

Pretpostavljamo da su funkcije f i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne na nekom pravokutniku u ty–ravnini koji sadrži točku (t_0, y_0). Tada znamo da iz Picardovog teorema 2.4 slijedi da postoji jedinstveno rješenje $y = \phi(t)$ danog problema na nekom intervalu u okolini t_0.

U nastavku proučavamo Eulerovu metodu. Prvo zapišimo diferencijalnu jednadžbu (4.1) u točki $t = t_n$ u sljedećem obliku:

$$\frac{d\phi}{dt}(t_n) = f(t_n, \phi(t_n)). \tag{4.3}$$

Sada aproksimiramo derivaciju u jednadžbi (4.3) odgovarajućim diferencijalnim kvocijentom, te dobivamo:

$$\frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{t_{n+1} - t_n} \approx f(t_n, \phi(t_n)). \tag{4.4}$$

Napokon, ako zamijenimo $\phi(t_{n+1})$ i $\phi(t_n)$ s aproksimativnim vrijednostima y_{n+1} i y_n, respektivno, te rješavamo za y_{n+1}, dobivamo Eulerovu formulu:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n)(t_{n+1} - t_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.5}$$

Ako veličina koraka $t_{n+1} - t_n$ ima konstantnu vrijednost h za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ te ako označimo $f(t_n, y_n)$ sa f_n, tada jednadžba (4.5) postaje:

$$y_{n+1} = y_n + hf_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.6}$$

Ideja Eulerove metode je evaluirati jednadžbe (4.5) i (4.6), koristeći rezultat svakog koraka kako bi izvršili idući korak. Na ovaj način dobivamo niz vrijednost $(y_n)_{n\geq 0}$ koje aproksimiraju vrijednosti rješenja $\phi(t)$ u točkama $(t_n)_{n\geq 0}$.

Primjer 4.1. Promatramo inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= 1 - t + 4y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Jednadžba $(4.7)_1$ je linearna jednadžba prvog reda, te možemo lako provjeriti da je rješenje koje zadovoljava početni uvjet $(4.7)_2$ dano u sljedećem obliku:

$$y = \phi(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t}. \tag{4.8}$$

Koristeći Eulerovu formulu (4.6) i veličine koraka $h = 0.05, 0.025, 0.01$ te 0.001, određujemo aproksimativne vrijednost rješenja $y = \phi(t)$ problema (4.7) na intervalu $0 \leq t \leq 2$.

Dobivamo sljedeću tablicu:

t	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.01$	$h = 0.001$	egzaktno
0.0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000	1.0000000
0.1	1.5475000	1.5761188	1.5952901	1.6076289	1.6090418
0.2	2.3249000	2.4080117	2.4644587	2.5011159	2.5053299
0.3	3.433560	3.6143837	3.7390345	3.8207130	3.8301388
0.4	5.0185326	5.3690304	5.6137120	5.7754845	5.7942260
0.5	7.2901870	7.9264062	8.3766865	8.6770692	8.7120041
1.0	45.588400	53.807866	60.037126	64.382558	64.897803
1.5	282.07187	361.75945	426.40818	473.55979	479.25919
2.0	1745.6662	2432.7878	3029.3279	3484.1608	3540.2001

Primjećujemo da preciznost nije značajna. Za $h = 0.01$ postotna greška je 3.85% u $t = 0.5$, 7.49% u $t = 1.0$ te 14.4% u $t = 2.0$. Odgovarajuće postotne greške za $h = 0.001$ su 0.40%, 0.79% te 1.58%, respektivno. Primjećujemo da ako je $h = 0.001$, tada je potrebno 2000 koraka kako bi prošli interval od $t = 0$ do $t = 2$. Stoga je potrebno puno računa ako želimo dobiti barem razumno dobru preciznost za ovaj problem koristeći Eulerovu metodu.

4.2. Ocjena greške

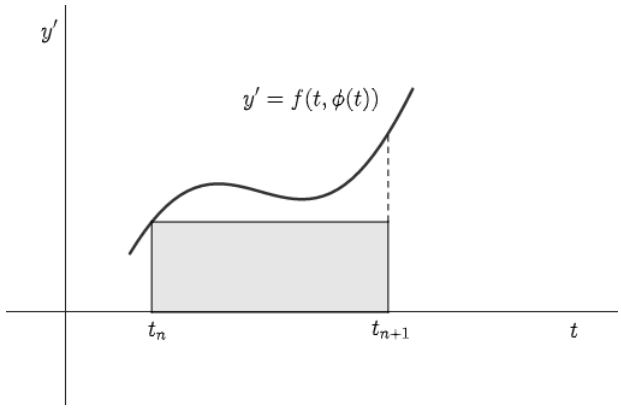
Promatrajmo sada naš problem u obliku integralne jednadžbe. Neka je $y = \phi(t)$ rješenje našeg inicijalnog problema (4.1)–(4.2). Integrirajući od t_n do t_{n+1}, dobivamo:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \phi'(t)dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t))dt, \tag{4.9}$$

ili

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, \phi(t))dt. \tag{4.10}$$

Integral u (4.10) možemo geometrijski interpretirati kao površinu ispod krivulje na Slici 20 između $t = t_n$ i $t = t_{n+1}$. Ako aproksimiramo integral tako da umjesto funkcije $f(t, \phi(t))$ koristimo njenu aproksimaciju u trenutku t_n, tj. $f(t_n, \phi(t_n))$, tada stvarnu površinu aproksimiramo površinom zatamnjenog pravokutnika.



Slika 20: Geometrijska interpretacija Eulerove metode

Uz pretpostavku da je korak metode iste duljine $h = t_{n+1} - t_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, dobivamo:

$$\begin{aligned} \phi(t_{n+1}) &\approx \phi(t_n) + f(t_n, \phi(t_n))(t_{n+1} - t_n) \\ &= \phi(t_n) + hf(t_n, \phi(t_n)) \end{aligned} \tag{4.11}$$

Konačno, da bismo dobili aproksimaciju y_{n+1} za $\phi(t_{n+1})$, još dodatno aproksimiramo $\phi(t_n)$ s približnom vrijednosti y_n u jednadžbi (4.11). Ovo daje Eulerove formulu $y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$. Boljim aproksimacijama integrala mogu se dobiti puno točnije, ali kompliciranije metode.

Još jedan pristup je taj da pretpostavimo da rješenje $y = \phi(t)$ možemo razviti u Taylorov red oko točke t_n. Tada imamo:

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \dots$$

odnosno:

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + f(t_n, \phi(t_n))h + \phi''(t_n)\frac{h^2}{2!} + \dots \tag{4.12}$$

Ako red odrežemo nakon prva dva člana, te ako $\phi(t_{n+1})$ i $\phi(t_n)$ zamijenimo s približnim vrijednostima y_{n+1} i y_n, opet dobivamo Eulerovu formulu (4.6). Ako bismo zadržali više članova Taylorovog razvoja, dobili bismo točniju formulu. Dodatno, koristeći Taylorov razvoj s ostatkom, možemo dobiti ocjenu greške u formuli.

Izvedimo sada ocjenu za lokalnu pogrešku diskretizacije Eulerove metode. U tu svrhu, pretpostavimo da rješenje $y = \phi(t)$ inicijalnog problema (4.1), (4.2) ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu na kojem provodimo metodu. Da bismo ovo osigurali, pretpostavimo da su f, $\frac{\partial f}{\partial t}$ i $\frac{\partial f}{\partial y}$ neprekidne funkcije. Naime, ako f ima ova svojstva, i ako je ϕ rješenje tog inicijalnog problema, tada vrijedi:

$$\phi'(t) = f(t, \phi(t)),$$

i, koristeći lančano pravilo,

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t))\phi'(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, \phi(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, \phi(t))f(t, \phi(t)). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Kako je desna strana ovog izraza neprekidna, to je i ϕ''. Sada, razvojem funkcije ϕ u Taylorov red s ostatkom oko t_n dobivamo:

$$\phi(t_n + h) = \phi(t_n) + \phi'(t_n)h + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2, \tag{4.14}$$

pri čemu je $\bar{t}_n$ neka točka takva da je $t_n < \bar{t}_n < t_n+h$. Uočimo da je $\phi(t_n+h) = \phi(t_{n+1})$ i da je $\phi'(t_n) = f(t_n, \phi(t_n))$ iz čega slijedi da (4.14) možemo zapisati kao:

$$\phi(t_{n+1}) = \phi(t_n) + hf(t_n, \phi(t_n)) + \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{4.15}$$

Sada, iskoristimo Eulerovu formulu da bismo izračunali aproksimaciju za $\phi(t_{n+1})$ pod pretpostavkom da znamo točnu vrijednost za y_n u trenutku t_n, odnosno $y_n = \phi(t_n)$. Dobivamo:

$$y^*_{n+1} = \phi(t_n) + hf(t_n, \phi(t_n, \phi(t_n))). \tag{4.16}$$

Razlika između $\phi(t_{n+1})$ i y^*_{n+1} je lokalna greška diskretizacije u $(n+1)$-vom koraku Eulerove metode, koju ćemo označiti s e_{n+1}. Tada, oduzimanjem jednadžbe (4.16) od jednadžbe (4.15), dobivamo:

$$e_{n+1} = \phi(t_{n+1}) - y^*_{n+1} = \frac{1}{2}\phi''(\bar{t}_n)h^2. \tag{4.17}$$

Dakle, lokalna greška diskretizacije Eulerove metode proporcionalna je kvadratu duljine koraka h, a faktor proporcionalnosti ovisi o drugoj derivaciji rješenje ϕ. Izraz dan s (4.17) ovisi o n, i u pravilu, različit je za svaki korak. Uniformna ocjena greške diskretizacije na segmentu $[a, b]$ dana je s:

$$|e_n| \leq \frac{1}{2}Mh^2, \tag{4.18}$$

gdje je M maksimum funkcije $|\Phi''(t)|$ na segmentu $[a, b]$. Kako je ocjena (4.18) dobivena uzimanjem najgoreg mogućeg slučaja, tj. u ocjeni uzimamo najveću vrijednost od $|\phi''(t)|$, često je slučaj da je ta ocjena pregruba na nekim dijelovima segmenta $[a, b]$.

Velika korist ocjene (4.18) je ta što pomoću nje možemo dobiti veličinu koraka h za koju lokalna greška diskretizacije neće biti veća od neke zadane razine tolerancije. Na primjer, ako želimo da lokalna greška diskretizacije ne bude veća od ε, tada iz (4.18) imamo

$$\frac{1}{2}Mh^2 \leq \varepsilon, \text{ odnosno } h \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{M}}. \tag{4.19}$$

Glavni problem kod korištenja izraza (4.17), (4.18) i (4.19) leži u estimaciji $|\phi''(t)|$ ili M. No, njihova glavna pouka je ta da je lokalna greška diskretizacije proporcionalna s h^2. Na primjer, ako je nova vrijednost h jednaka pola originalne, tada će nastala greška biti četiri puta manja od početne!

Primjer 4.2. Opet promotrimo inicijalni problem

$$\begin{aligned} y' &= 1 - t + 4y, \\ y(0) &= 1. \end{aligned} \tag{4.20}$$

na segmentu $[0, 2]$. Neka je $y = \phi(t)$ rješenje od (4.20). Kao što smo već vidjeli,

$$\phi(t) = \frac{1}{4}t - \frac{3}{16} + \frac{19}{16}e^{4t},$$

i stoga je

$$\phi''(t) = 19e^{4t}.$$

Iz (4.17) dobivamo:

$$e_{n+1} = \frac{19}{2}e^{4\bar{t}_n}h^2, \quad t_n < \bar{t}_n < t_n + h. \tag{4.21}$$

Faktor 19 i brz rast funkcije e^{4t} objašnjavaju zašto dobivene vrijednosti u tablici u Primjeru 4.1 nisu najtočnije. Na primjer, za $h = 0.05$ greška u prvom koraku iznosi

$$e_1 = \phi(t_1) - y_1 = \frac{19}{2}e^{4\bar{t}_0} \cdot 0.05^2, \quad 0 < \bar{t}_0 < 0.05.$$

Očito je $e_1 > 0$, a kako je $e^{4\bar{t}_0} < e^{0.2}$ slijedi

$$e_1 \leq \frac{19}{2}e^{0.2} \cdot 0.05^2 \approx 0.02901. \tag{4.22}$$

Uočimo također da vrijedi $e^{4\bar{t}_0} > 1$ i stoga je $e_1 > \frac{19}{2} \cdot 0.05^2 = 0.02375$. Stvarna greška je 0.02542. Iz (4.21) slijedi da greška postaje sve gora i gora kako se t povećava, što se jasno i iz tablice. Sličnim računamo dobivamo ocjene:

$$1.0617 \approx \frac{19}{2}e^{3.8} \cdot 0.05^2 \leq e_{20} \leq \frac{19}{2}e^{4} \cdot 0.05^2 \approx 1.2967 \tag{4.23}$$

za lokalnu grešku diskretizacije za iskorak od 0.95 i 1 te

$$57.96 \approx \frac{19}{2}e^{7.8} \cdot 0.05^2 \leq e_{40} \leq \frac{19}{2}e^{8} \cdot 0.05^2 \approx 70.80 \tag{4.24}$$

za iskorak od 1.95 do 2.

Ovi rezultati pokazuju da za ovaj problem, lokalna greška diskretizacije je oko 2500 puta veća u blizini $t = 2$ nego kod $t = 0$. Stoga, da bismo smanjili lokalnu grešku diskretizacije na zadovoljavajuće malu razinu na segmentu $0 \leq t \leq 2$, moramo odabrati veličinu koraka h baziranu na analizi problema u blizini $t = 2$. Naravno, taj korak h će biti puno manji nego potrebno u blizini $t = 0$. Na primjer, da bismo ostvarili lokalnu grešku diskretizacije od 0.01 za ovaj problem, trebamo korak koji je otprilike 0.00059 oko $t = 2$ i korak od 0.032 u blizini $t = 0$. Korištenje konstantne veličine koraka koja je manja od potrebne na cijelom segmentu rezultira puno većim brojem računanja nego što je potrebno, potrošimo više vremena, a i otvaramo vrata mogućoj akumulaciji grešaka zaokruživanja.

Jedan pristup kako bismo to mogli izbjeći je taj da držimo lokalnu grešku zaokruživanja stalnom tako da postupno smanjujemo veličinu koraka h kako t raste. U ovom primjeru, morali bismo smanjiti h za faktor 50 na putu od $t = 0$ do $t = 2$. Za metodu koja omogućuje varijacije u veličini koraka kažemo da je **adaptivna**. Sva moderni kodovi za rješavanje diferencijalnih jednadžbi imaju mogućnost varijacije veličine koraka po potrebi.

Zadaci

Zadatak 4.1. Koristeći Eulerovu metodu sa $h = 0.1$ nađite aproksimativne vrijednosti u $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ te ih usporedite s egzaktnim vrijednostima u tim točkama za Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' + 2y = 2 - e^{-4t} \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{4.25}$$

Rješenje: Lako se provjeri da je egzaktno rješenje danog problema dano s:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-4t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$$

Neka je $f(t, y) = 2 - e^{-4t} - 2y$, $t_0 = 0$ i $y_0 = 1$. Imamo:

$$f_0 = f(0, 1) = -1, \quad y_1 = y_0 + hf_0 = 1 + 0.1 \cdot (-1) = 0.9.$$

Dalje imamo:

$$f_1 = f(0.1, 0.9) = -0.470320046, \quad y_2 = y_1 + hf_1 = 0.852967995.$$

Ponavljanjem ovog računa dobivamo sljedeću tablicu (stupac greška računamo kao $\frac{|\text{egzaktna vrijednost} - \text{aproksimativna vrijednost}|}{\text{egzaktna vrijednost}} \cdot 100$):

t_n	aproksimativna vrijednost	egzaktna vrijednost	greška
$t_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(0) = 1$	0%
$t_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9$	$y(0.1) = 0.925794646$	2.79%
$t_2 = 0.2$	$y_2 = 0.852967995$	$y(0.2) = 0.889504459$	4.11%
$t_3 = 0.3$	$y_3 = 0.837441500$	$y(0.3) = 0.876191288$	4.42%
$t_4 = 0.4$	$y_4 = 0.839833779$	$y(0.4) = 0.876283777$	4.16%
$t_5 = 0.5$	$y_5 = 0.851677371$	$y(0.5) = 0.883727911$	3.63%

□

Zadatak 4.2. Promatramo Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y' - y = -\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\sin(5t) + 5e^{\frac{t}{2}}\cos(5t), \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{4.26}$$

Koristeći Eulerovu metodu nađite aproksimativno rješenje u $t = 1, 2, 3, 4, 5$. Koristite $h = 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, 0.001$ za aproksimacije.

Rješenje: Egzaktno rješenje ovog problema je u sljedećem obliku:

$$y(t) = e^{\frac{t}{2}}\sin(5t).$$

Tablica aproksimacija:

vrijeme	egzaktna	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
$t = 1$	-1.58100	-0.97167	-1.26512	-1.51580	-1.54826	-1.57443
$t = 2$	-1.47880	0.65270	-0.34327	-1.23907	-1.35810	-1.45453
$t = 3$	2.91439	7.30209	5.34682	3.44488	3.18251	2.96851
$t = 4$	6.74580	15.56128	11.84839	7.89808	7.33093	6.86421
$t = 5$	-1.61237	21.95465	12.24018	1.96056	0.0018864	-1.28498

Tablica grešaka:

vrijeme	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
$t = 1$	38.54%	19.58%	4.12%	2.07%	0.42%
$t = 2$	144.14%	76.79%	16.21%	8.16%	1.64%
$t = 3$	150.55%	83.46%	18.20%	9.20%	1.86%
$t = 4$	130.68%	75.64%	17.08%	8.67%	1.76%
$t = 5$	1461.63%	859.14%	196.79%	100.12%	20.30%

Greška se povećava s vremenom, dok smanjenjem veličine koraka h smanjujemo grešku! $\square$

Bibliografija

[1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Matematički odjel PMF, Zagreb, 1994.

[2] D. Bakić, *Linearna algebra*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2008.
dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/linearna_algebra_sk_7.pdf
(pristupljeno 27. ožujka 2020.)

[3] M. Benšić, G. Benšić, *Kamatni račun*, Osječki matematički list **11**(2011) 113–126.

[4] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, D. B. Meade, *Elementary differential equations and boundary value problems*, 11th edition, Wiley, New York, 2017.

[5] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička analiza*, Matematički odsjek PMF-a, Zagreb, 2003.
dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/num_anal.pdf
(pristupljeno 14. siječnja 2022.).

[6] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019.
dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/dif/Diferencijalni_racun.pdf
(pristupljeno 17. ožujka 2020.).

[7] I. Gogić, P. Pandžić, J. Tambača, *Integrali funkcija više varijabli*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019.
dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/difraf/int/pred/predavanjaint_2019.pdf
(pristupljeno 17. ožujka 2020.).

[8] B. Guljaš, *Matematička analiza I & II*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2018.
dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/MATANALuR.pdf
(pristupljeno 20. svibnja 2020.).

[9] Z. Tutek, M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednadžbe*, skripta Matematičkog odsjeka PMF-a, Zagreb, 2019.

dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/odif/predavanja/odj_pred.pdf
(pristupljeno 17. ožujka 2020.).