SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Petar Kunštek, Marko Radulović

Obične diferencijalne jednadžbe

Zagreb, 25. siječnja 2024.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Diferencijalna jednadžba je jednadžba koja uključuje neku funkciju od interesa zajedno s njenim derivacijama. Obično je funkcija nepoznata, a problem je odrediti nepoznatu funkciju. Diferencijalne jednadžbe mogu se klasificirati kao "obične" ili "parcijalne". Obična diferencijalna jednadžba je diferencijalna jednadžba u kojoj je nepoznata funkcija, funkcija samo jedne varijable.

Motivacija za proučavanjem diferencijalnih jednadžbi dolazi iz matematičkih opisa "stvarnih" procesa koji varijaju s vremenom ili položajem. Najčešći primjeri diferencijalnih jednadžbi dolaze iz fizike, ekonomije, biologije. Na sljedećim primjerima ćemo uvesti tri primjera procesa za koje ćemo ponuditi diferencijalnu jednadžbu ili jednadžbe.

Drugi Newtonov aksiom

Opišite drugi Newtonov zakon diferencijalnim jednadžbama. Vrijeme označavamo sa t, masu čestice sa m, dok je položaj čestice dan sa $x(t)$.

Silu koja djeluje na česticu označavamo sa $F(t, x(t), \dot{x}(t))$, gdje je t varijabla, $x(t)$ nepoznata funkcija te $\dot{x}(t)$ derivacija nepoznate funkcije.

Ponekad radi jednostavnosti notacije pišemo: $\dot{x}(t) \equiv x'(t) \equiv \frac{d}{dt}x(t)$.

Drugi Newtonov zakon (u 1D) glasi: $mx''(t) = F(t, x(t), x'(t))$.

Neki poznati primjeri:

$mx'' = -mg$	...	1D model mase m u polju sile teže,
$mx'' = -mg\frac{R^2}{(R+x)^2} - kx'$	...	1D model mase m uz realniji model sila gravitacije i otpora zraka,
$mx'' = -kx$	...	harmonijski oscilator (titranje opruge),
$mx'' = -kx - lx'$	...	prigušeni harmonijski oscilator.

Poluraspad

Brzina radioaktivnog raspada elementa proporcionalna je trenutnoj količini tog elementa. Odredite trenutak poluraspada.

Rješenje: $N(t)\ldots$ količina elementa u trenutku t

$\frac{dN}{dt} = -kN(t)$, $k > 0$, k ovisi o materijalu, uočimo kako promjena (derivacija) mora biti negativna!

Početni uvjet $N(0) = N_0$. Tražimo trenutak T kada je $N(T) = \frac{N_0}{2}$.

Problem smo zapisali u obliku početne (Cauchyjeve) zadaće:

$$\begin{cases} N' = -kN & \dots \text{ diferencijalna jednadžba} \\ N(0) = N_0 & \dots \text{ početni uvjet} \end{cases}$$

Imamo:

$$N' = -kN \ / : N \text{ (to smijemo jer je } N > 0)$$
$$\Leftrightarrow \frac{N'}{N} = -k \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\ln N) = -k.$$

Integracijom od 0 to t dobivamo:

$$\ln N(t) - \ln N(0) = -k(t-0)$$
$$\Leftrightarrow \ln \frac{N(t)}{N_0} = -kt \ /e^{(\ )}$$
$$\Leftrightarrow \frac{N(t)}{N_0} = e^{-kt} \Leftrightarrow N(t) = N_0 e^{-kt}.$$

Tražimo T takav da

$$N(T) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow N_0 e^{-kT} = \frac{N_0}{2} \quad \Big/ \ln$$
$$\Leftrightarrow -kT = -\ln 2 \Leftrightarrow T = \frac{\ln 2}{k}.$$

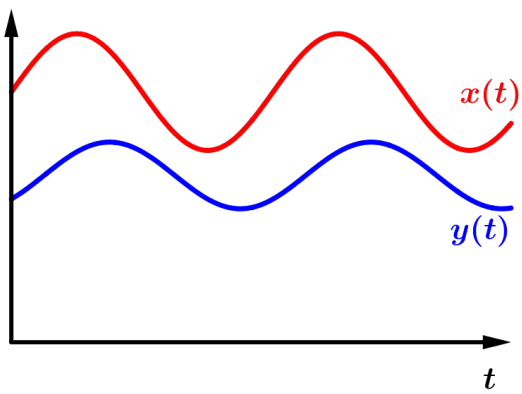
Vrijeme poluraspada je $T = \frac{\ln 2}{k}$. Ako znamo vrijeme poluraspada, možemo odrediti koeficijent k, a time i količinu promatranog radioaktivnog elementa u svakom trenutku. □

Sustav plijena i lovca
Sustav diferencijalnih jednadžbi koji opisuje odnos populacije plijena x i lovca y.

Rješenje: Modeliramo sustav Lotka-Volterinim jednadžbama:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y), & x(0) = x_0, \\ y' = -y(\gamma - \delta x), & y(0) = y_0. \end{cases} \tag{LV}$$

Pri tome su $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ te $x_0, y_0 > 0$ (uočimo da ako je $x_0 = 0$ ili $y_0 = 0$, dobivamo jednostavan problem - eksponencijalan rast ili pad predatora ili plijena). Proučavamo kvalitativno ponašanje rješenja diferencijalne jednadžbe (LV) kao što je



Slika 1: Rješenje Lotka-Volterinog sustava

- Asimptotička analiza - ponašanje rješenja kada $t \to +\infty$. Izumire li populacija? Je li rješenje periodično?
- Stacionarne (kritične) točke - točka (x, y) sustava kada je desna strana od (LV) jednaka nuli (nul-vektoru).
  Ako je $x_0 = \gamma/\delta, y_0 = \alpha/\beta$ tada je rješenje sustava stacionarno, tj. $x(t) = x_0, y(t) = y_0, t > 0$.

$\square$

Teorija običnih diferencijalnih jednadžbi:

a) Postojanje i jedinstvenost rješenja

b) Numeričke metode običnih diferencijalnih jednadžbi

c) Kvalitativna analiza (asimptotika).

Ako je $y = y(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tada pričamo o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

Poglavlje 2

Diferencijalne jednadžbe prvog reda

1. Postojanje rješenja početne zadaće

Definicija 1.1. *Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda je jednadžba oblika $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, gdje je y funkcija u varijabli x. Ako je moguće, običnu diferencijalnu jednadžbu izražavamo u ekvivalentnom obliku u kojem je n-ta derivacija izražena eksplicitno*

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

Implicitni ili opći oblik diferencijalne jednadžbe prvog reda je $F(x, y, y') = 0$. Mnogi rezultati će biti iskazani za standardni (eksplicitni) oblik diferencijalne jednadžbe prvog reda:

$$y' = f(x, y). \tag{1.1}$$

Prije nego iskažemo poznate rezultate potrebno je definirati rješenje eksplicitne diferencijalne jednadžbe:

Definicija 1.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$. Kažemo da je $y : I \to \mathbb{R}$ rješenje (1.1) ako je:*

a) I *otvoreni interval u* $\mathbb{R}$

b) $y \in C^1(I; \mathbb{R})$

c) $\Gamma(y) = \{(x, y(x)) \colon x \in I\} \subseteq \Omega$

d) $y' = f(x, y(x)),\ x \in I$

Ako je $y \colon I \to \mathbb{R}$ rješenje od (1.1), tada je i $\tilde{y} \colon \tilde{I} \to \mathbb{R}$ rješenje od (1.1), gdje je $\tilde{I} \subseteq I$, $\tilde{y} = y|_{\tilde{I}}$ (restrikcije na intervalu su opet rješenja). U slučaju da je poznata vrijednost rješenja u nekoj točki intervala, tj. početni uvjet diferencijalne jednadžbe, prethodna neodređenost do na konstantu nestaje. Standardno teoreme i rezultate iskazujemo za početne (Cauchyeve, inicijalne) zadaće:

Definicija 1.3. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $(x_0, y_0) \in \Omega$. Kažemo da je $y \colon I \to \mathbb{R}$ rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

ako je y rješenje obične diferencijalne jednadžbe i $x_0 \in I$ te $y(x_0) = y_0$.

Peanov teorem govori o dovoljnim uvjetima uz koje imamo egzistenciju rješenja početne zadaće.

Teorem 1.4 (Peano)**.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup, $(x_0, y_0) \in \Omega$ i $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$. Tada početna zadaća*

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

ima rješenja na otvorenom intervalu koji sadrži x_0.

Rješenje početne zadaće koja zadovoljava pretpostavke Peanovog teorema ne mora biti jedinstveno kao što možemo zaključiti na sljedećem primjeru:

Primjer 1.5. *Dana je početna zadaća:*

$$\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Desna strana $f(x, y) = \sqrt[3]{y}$ je neprekidna na $\mathbb{R}^2$ čime su uvjeti Teorema 1.4 zadovoljeni, dakle postoji rješenje zadaće. Vidimo da je $y(x) = 0$ (stacionarno) rješenje od (1.3). Koristeći postupak kao u primjeru poluraspada za $y \neq 0$:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad y' = y^{1/3} \\
&\Rightarrow \quad y^{-1/3} y' = 1 \\
&\Rightarrow \quad \left(\frac{3}{2} y^{2/3}\right)' = 1 \quad \Big/ \int_0^x \\
&\Rightarrow \quad \frac{3}{2} y^{2/3} = x, \quad x \geq 0 \quad \textit{(jer je lijeva strana nenegativna)} \\
&\Rightarrow \quad y = \pm \left(\frac{2}{3} x\right)^{3/2}, \quad x \geq 0
\end{aligned}$$

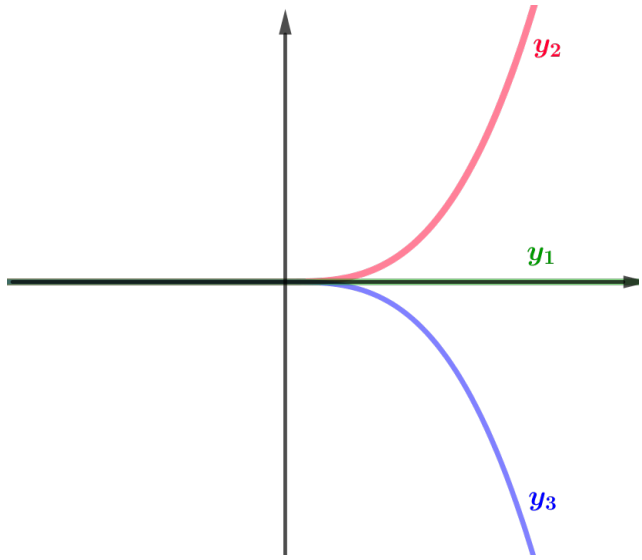
Time možemo zapisati barem tri različita rješenja početne zadaće

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= 0, \quad x \in \mathbb{R} \\
y_2(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \left(\frac{2}{3} x\right)^{3/2}, & x \geq 0, \end{cases} \\
y_3(x) &= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -\left(\frac{2}{3} x\right)^{3/2}, & x \geq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Jesu li to sva rješenja zadaće (1.3)? Pokažite, ako je $t \mapsto y(t)$ rješenje početne zadaće (1.3), tada je nužno $y(t) = 0$ za $t < 0$.

1.1. Picardov teorem

Sada ćemo iskazati poznati teorem o dovoljnim uvjetima uz koje početna zadaća ima jedinstveno rješenje. U literaturi je još poznat kao i Picard–Lindelöfov teorem.



Slika 2: Prikaz rješenja zadaće (1.3).

Teorem 1.6 (Picardov teorem)**.** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ te f Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli, tj.*

$$(\exists M > 0)\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2|,\ \forall x, y_1, y_2. \tag{1.4}$$

Tada inicijalna zadaća

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.5}$$

ima jedinstveno rješenje na otvorenom intervalu koji sadrži x_0.

Prethodni teorem je izuzetno koristan kada želimo pokazati da je rješenje početne zadaće jedinstveno. Pritom vrijede sve pretpostavke Peanovog teorema uz to da je desna strana Lipschitzova (ili Lipschitz neprekidna) funkcija po drugoj varijabli. Istaknimo neka osnovna svojstva Lipschitzovih funkcija.

Zadatak 1.1 (Primjeri i svojstva Lipschitzovih funkcija)**.**

a) Pokažite da je preslikavanje $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definirano s $f(x) = x^3$ Lipschitz neprekidno.

b) Pokažite da preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirano s $f(x) = x^2$ nije Lipschitz neprekidno.

c) $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$. Ako su $f : D_1 \to D_2$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidne funkcije tada je i $g \circ f : D_1 \to \mathbb{R}$ Lipschitz neprekidna.

d) Ako su $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzove funkcije tada je i suma $f_1 + f_2$ Lipschitzova funkcija.

e) Kažemo da je funkcija $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ograničena ako postoji konstanta $M > 0$ takva da je $\sup_D |f| \leq M$. Pronađite funkciju koja je Lipschitzova, ali nije ograničena.

f) Pokažite da je Lipschitzova funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ograničena.

g) Ako su $f_1, f_2 : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitzove i ograničene funkcije tada je i produkt $f_1 f_2$ Lipschitzova funkcija.

h) Pokažite da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ nije Lipschitzova funkcija.

i) Pokažite da je $x \mapsto |x|$ Lipschitzova funkcija.

Rješenje:

a) Neka je $x, y \in [1,2]$. Tada je $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$. Vrijedi

$$\begin{aligned}|f(x) - f(y)| &= |x^3 - y^3| = |(x-y)(x^2+xy+y^2)| \\ &= |(x^2+xy+y^2)||x-y| \\ &\leq (|x|^2 + |x||y| + |y|^2)|x-y| \\ &\leq (4+4+4)|x-y| = 12|x-y|\end{aligned}$$

f je Lipschitzova s konstantom 12.

b) Neka je $M > 0$. Tada za $x = 2M, y = M$ vrijedi

$$|f(2M) - f(M)| = |4M^2 - M^2| = 3M(2M - M) > M(2M - M),$$

čime f nije Lipschitzova na $\mathbb{R}$.

c) Neka su L_g, L_f Lipschitzove konstante funkcija g, f, respektivno. Za $x, y \in D_1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}|g \circ f(x) - g \circ f(y)| &= |g(f(x)) - g(f(y))| \\ &\leq L_g|f(x) - f(y)| \\ &\leq L_g L_f|x-y|\end{aligned}$$

čime je $g \circ f$ Lipschitzova s konstantom $L_g L_f$.

d) Neka su L_1, L_2 Lipschitzove konstante funkcija f_1, f_2, respektivno. Za $x, y \in D$ vrijedi:

$$\begin{aligned}|(f_1+f_2)(x) - (f_1+f_2)(y)| &= |(f_1(x) - f_1(y)) + (f_2(x) - f_2(y))| \\ &\leq |f_1(x) - f_1(y)| + |f_2(x) - f_2(y)| \\ &\leq L_1|x-y| + L_2|x-y| = (L_1+L_2)|x-y|\end{aligned}$$

čime je $f_1 + f_2$ Lipschitzova s konstantom $L_1 + L_2$.

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ je Lipschitzova na $\mathbb{R}$, ali nije ograničena.

f) Lipschitzova funkcija je neprekidna funkcija. Jer je funkcija neprekidna na kompaktu $[a,b]$ slijedi da $f([a,b])$ kompakt u $\mathbb{R}$ pa time i ograničen skup. Direktno po definiciji, za $x \in [a,b]$ vrijedi $|f(x) - f(a)| \leq L|x-a|$ odnosno

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\leq L|x-a| + |f(a)| \leq L|b-a| + |f(a)|\end{aligned}$$

čime je gornja ograda upravo $L|b-a| + |f(a)|$.

g) Neka su L_1, L_2 Lipschitzove konstante te M_1, M_2 gornje ograde funkcija f_1, f_2, respektivno. Vrijedi

$$\begin{aligned}|f_1f_2(x) - f_1f_2(y)| &= |f_1(x)f_2(x) \pm f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(y)| \\ &\leq |f_1(x)f_2(x) - f_1(x)f_2(y)| + |f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(y)| \\ &\leq M_1|f_2(x) - f_2(y)| + M_2|f_1(y) - f_1(y)| \\ &\leq (M_1L_2 + M_2L_1)|x-y|.\end{aligned}$$

h) Ako je f Lipschitzova onda je izraz $\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ ograničen za $x \neq y$. Stavimo $y_n = 0, x_n = \frac{1}{n^2}$, dakle

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n \overset{n\to\infty}{\to} +\infty.$$

i) Vrijedi za $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \ &\Rightarrow \ |x| - |y| \leq |x - y| \\ |y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x| \ &\Rightarrow \ |y| - |x| \leq |x - y| \end{aligned}$$

čime je $||x| - |y|| \leq |x - y|$, dakle $x \mapsto |x|$ je Lipschitzova na cijelom $\mathbb{R}$ s konstantom 1.

□

U sljedećem zadatku iskazujemo nužan i dovoljan uvjete za Lipschitz neprekidnu funkcije po drugoj varijabli, ako znamo da je derivabilna po drugoj varijabli na otvorenom pravokutniku. Ukratko, parcijalna derivacija po drugoj varijabli mora biti ograničena (vidi Zadatak 1.1 h) gdje to nije slučaj).

Zadatak 1.2. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ derivabilna po drugoj varijabli na otvorenom pravokutniku $P \subseteq \Omega$. Dokažite da je f Lipschitzova po drugoj varijabli na P ako i samo ako je $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ omeđena na P. Tada je najmanja Lipschitzova konstanta $L = \sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$.*

Rješenje: $\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je f Lipschitzova po drugoj varijabli na P, što znači

$$(\forall (x, y_1), (x, y_2) \in P) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|.$$

Sada imamo:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| = \left|\lim_{t\to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}\right| = \lim_{t\to 0} \frac{|f(x, y + t) - f(x, y)|}{|t|} \leq \limsup_{t\to 0} \frac{L|t|}{|t|} = L,$$

iz čega dobivamo da je $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ omeđena na P.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da je $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ omeđena na P. Iz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti i uzimanjem apsolutne vrijednosti slijedi

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\right||y_1 - y_2| \leq \sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||y_1 - y_2|, \quad c \in \langle y_1, y_2\rangle.$$

Vidimo da je f Lipschitzova po drugoj varijabli u P te da je $\sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ Lipschitzova konstanta.

Sada iz $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L$ slijedi $\sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L$ za proizvoljnu Lipschitzovu konstantu, pa vrijedi da je $\sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|$ najmanja Lipschitzova konstanta. □

Zadatak 1.3. *Neka su $a, b > 0$. Ispitajte je li funkcija f Lipschitzova po drugoj varijabli na pravokutniku $P = \langle -a, a\rangle \times \langle -b, b\rangle$ i odredite najmanju Lipschitzovu konstantu (ako takva postoji):*

a) $f(x,y) = 2x^2y^2 + xy + 3$,

b) $f(x,y) = \frac{1+x^2}{1+\sqrt[3]{y}}$, $b < 1$.

Rješenje:

a) $f(x,y)$ je polinom, pa imamo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Specijalno, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x^2y + x$ je neprekidna na $\overline{P}$. Iz toga slijedi da je $|\frac{\partial f}{\partial y}|$ ograničena na $\overline{P}$ (neprekidna funkcija na kompaktu). Iz Zadatka 1.2 slijedi da je f Lipschitz neprekidna u drugoj varijabli na P i da je

$$\sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{\overline{P}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|.$$

Koristimo činjenicu da za $(x,y) \in \overline{P}$ vrijedi $|x| \leq a$ i $|y| \leq b$, čime dobivamo:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |4x^2y + x| \leq 4|x^2||y| + |x| \leq 4a^2b + a,$$

Iz činjenice da vrijedi $|\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)| = 4a^2b + a$, slijedi $\max\limits_{\overline{P}}|\frac{\partial f}{\partial y}| = 4a^2b + a$.

Prema Zadatku 1.2 najmanja Lipschitzova konstanta postoji i jednaka je:

$$L = \sup_P \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = \max_{\overline{P}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = 4a^2b + a.$$

b) Vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{1+x^2}{(1+\sqrt[3]{y})^2}\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1+x^2}{3(y^{\frac{4}{3}} + 2y + y^{\frac{2}{3}})}.$$

Promatramo pravokutnik $\tilde{P} = \langle -a, a\rangle \times \langle 0, b\rangle \subseteq P$.

$|\frac{\partial f}{\partial y}|$ je definiran na $\tilde{P}$, ali nije omeđen s obzirom da za niz $a_n = (0, \frac{1}{n^3}) \in \tilde{P}$ vrijedi

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(a_n)\right| = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{1}{n^4} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^2}} \to \infty,\ n \to \infty,$$

što znači da se ne može omeđiti na $\tilde{P}$.

Po Zadatku 1.2, f nije Lipschitzova po drugoj varijabli na $\tilde{P}$, a time nije niti na nadskupu P.

□

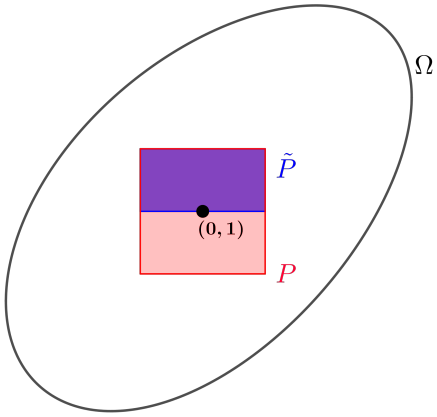
Zadatak 1.4. *Odredite zadovoljava li početna zadaća*

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(0) = 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

uvjete Picardovog teorema za

a) $f(y) = y\ln^2 y$

b) $f(y) = y\sqrt{\ln y}$



Slika 3: Vizualizacija skupova $\tilde{P}, P, \Omega$.

c) $f(y) = y\sqrt{|\ln y|}$

Rješenje:

a) Vidimo da je $(x, y) \mapsto g(x, y) = f(y) = y \ln^2 y$ neprekidno preslikavanje na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$. Odaberimo proizvoljan otvoren pravokutnik P takav da $\overline{P} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $(0, 1) \in P$. Jer je

$$(x, y) \mapsto \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right| = |\ln^2 y + 2 \ln y|$$

neprekidno na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ time je neprekidno i na $\overline{P}$ pa postiže maksimum na $\overline{P}$. Zato je

$$\sup_P \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| = \max_{\overline{P}} \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| < +\infty$$

pa po Zadatku 1.2 znamo da je g Lipschitz neprekidna po 2. varijabli na pravokutniku P. Time su uvjeti Teorema 1.6 zadovoljeni za proizvoljni otvoreni P takav da $\overline{P} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $(0, 1) \in P$ te postoji jedinstveno rješenje početne zadaće.

b) Vidimo da izraz $g(x, y) = f(y) = y\sqrt{\ln y}$ nije uopće definiran za $y < 1$ (ima negativnu vrijednost pod korijenom). Time uvjeti Picardovog teorema nisu ispunjeni jer ne postoji takva okolina točke $(0, 1)$ na kojoj je g definirana.

c) Preslikavanje $(x, y) \mapsto g(x, y) = f(y) = y\sqrt{|\ln y|}$ je neprekidno na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$.
Za proizvoljan otvoren skup Ω takav da $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ i $(0, 1) \in \Omega$, odaberimo otvoreni pravokutnik P takav da je $P \subset \Omega$ i $(0, 1) \in P$. Definiramo $\tilde{P} = \{(x, y) \in P : y > 1\}$ (vidi Sliku 3). Pogledajmo parcijalnu derivaciju od g po drugoj varijabli za $y > 1$:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \sqrt{\ln y} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\ln y}}$$

Odabirom niza $a_n = (0, 1 + \frac{1}{n})$ znamo da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \in \tilde{P}$ za $n > k$. Dodatno, $(x, y) \mapsto \left|\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right|$ nije ograničena na $\tilde{P}$ jer

$$\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{\partial g}{\partial y}(a_n)\right| \to +\infty$$

pa po Zadatku 1.2 znamo da funkcija g nije Lipschitz neprekidna po 2. varijabli na $\tilde{P}$ pa time niti na nadskupu Ω. Jer je Ω bio proizvoljan slijedi da se Teorem 1.6 ne može primjeniti.

□

Pri korištenju Zadatka 1.2 kod provjere uvjeta Picardovog teorema obratite pozornost da ako je funkcija Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli to nužno ne povlači neprekidnost funkcije po obje varijable. Na primjer

$$f(x,y) = \begin{cases} y & , \ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

je Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na $\mathbb{R}^2$, ali očito nije neprekidna funkcija.

Definicija 1.7 (Picardove iteracije)**.** *Neka je dana inicijalna zadaća u diferencijalnom zapisu:*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.7}$$

Definiramo niz Picardovih iteracija $y_0, y_1, \ldots, y_k \colon I \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0, \\ y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt, \\ y_2(x) &= y_1 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt, \\ &\vdots \\ y_k(x) &= y_{k-1} + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Uz pretpostavke Picardovog teorema slijedi da niz funkcija $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ definiran preko (1.8) uniformno konvergira prema y na intervalu $\tilde{I} \subset I$ koji zadovoljava (1.7) te ima sljedeći integralni oblik:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{1.9}$$

Zadatak 1.5. *Riješite pomoću Picardovih iteracija:*

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Vrijedi (dokaz indukcijom):

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 1, \\ y_1(x) &= 1 + \int_0^x y_0(t)dt = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x, \\ y_2(x) &= 1 + \int_0^x y_1(t)dt = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \\ &\vdots \\ y_k(x) &= \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Iz kolegija Matematička analiza 2 znamo da $y_k \to e^x$ konvergira po točkama na cijelom $\mathbb{R}$, tj. da vrijedi $y(x) = e^x$. □

Istaknimo da niz Picardovih iteracija u Zadatku 1.5 ne konvergira uniformno na cijelom $\mathbb{R}$, ali konvergira uniformno na svakom ograničenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$.

1.2. Numeričko rješavanje - Eulerova metoda

Proučimo sljedeću Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

numerički na segmentu $[a, b]$, $a = x_0$.

Pretpostavimo da je y dovoljno glatka, tj. da dopušta aproksimaciju oko točke x_0:

$$y(x) = y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2}y''(x_0) + \dots$$

Tada za x blizu x_0 vrijedi:

$$y(x) \approx y(x_0) + (x - x_0)y'(x_0) = y(x_0) + (x - x_0)f(x_0, y(x_0)). \tag{1.11}$$

Napravimo subdiviziju segmenta $[a, b]$ na n dijelova: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Definiramo niz (y_i) koristeći aproksimaciju (1.11):

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0, \\ y_1 &= y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0), \\ y_2 &= y_1 + (x_2 - x_1)f(x_1, y_1), \\ &\vdots \\ y_{k+1} &= y_k + (x_{k+1} - x_k)f(x_k, y_k), \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + (x_n - x_{n-1})f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.12}$$

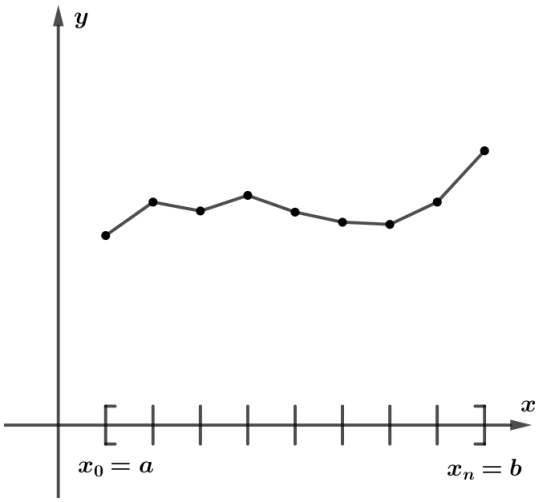
Time smo dobili aproksimaciju rješenja od (1.10) po dijelovima afinom funkcijom na segmentu $[a, b]$ definiran točkama (x_k, y_k), $k = 0, 1, \dots, n$.

Napomena 1.8. *Uočite da za linearni splajn na Slici 4 samo u početnoj točki (x_0, y_0) možemo tvrditi da ima egzaktnu vrijednost. Štoviše, udaljavanjem ta greška raste što vidimo u sljedećem primjeru.*

Primjer 1.9. *Pronađite aproksimaciju danu Eulerovom metodom za zadaću:*

$$\begin{cases} y' = y, \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{1.13}$$

zadanu na ekvidistantnoj mreži za segment $[0, 1]$.



Slika 4: Linearni splajn dobiven Eulerovom metodom

Rješenje: Početna zadaća (1.13) ima rješenje na $[0,1]$. Napravimo aproksimaciju Eulerovom metodom na ekvidistantnoj mreži na segmentu $[0,1]$, tj. $x_k = k/n$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

$$
\begin{aligned}
&y_0 = 1,\\
&y_1 = y_0 + \frac{1}{n} f(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{n},\\
&y_2 = y_1 + \frac{1}{n} f(x_1, y_1) = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n}\Big(1 + \frac{1}{n}\Big) = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^2,\\
&y_3 = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^3,\\
&\vdots\\
&y_n = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.
\end{aligned}
$$

Za $n = 5$ (ekvidistantna mreža na 5 dijelova) imamo $y_5 = (1 + \frac{1}{5})^5 \equiv 2.49$, što je u odnosu na $e^1 \equiv 2.71$ dosta velika greška, neovisno što $y_n \to e^1$ kada $n \to +\infty$. □

1.3. Zadaci za vježbu

Zadatak 1.6. *Zadana je diferencijalna jednadžba:*

$$u' = (x+1)\Big(1 - \frac{1}{u}\Big). \tag{1.14}$$

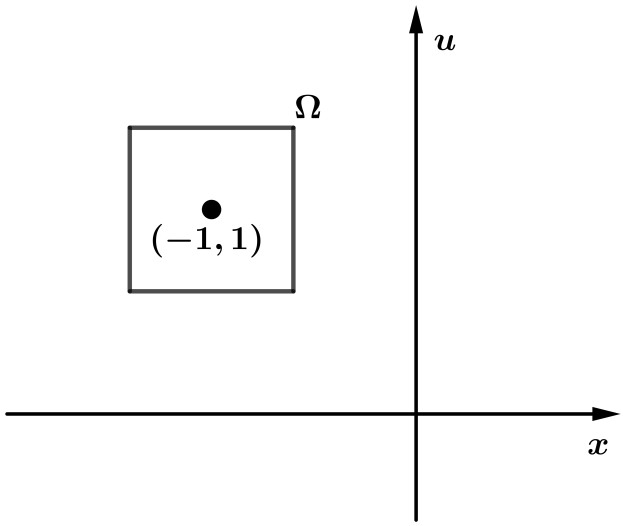
a) Možemo li primijeniti Picardov teorem ako za početni uvjet uzmemo $u(-1) = 1$? Detaljno obrazložite.

b) Napravite prve dvije Picardove iteracije za isti početni uvjet u (1.14).

Rješenje:

a) Vrijedi:

$$f(x,u) = (x+1)\Big(1 - \frac{1}{u}\Big) \in C(\Omega; \mathbb{R}).$$



Slika 5: Pravokutnik Ω (ne dodiruje x-os, $u > 0$)

Odaberimo otvoren pravokutnik Ω koji sadrži $(-1, 1)$ i ne dodiruje x-os (vidi Sliku 5) Preslikavanje $(x, u) \mapsto \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \frac{x+1}{u^2}$ je neprekidna funkcija na zatvorenom pravokutniku $\overline{\Omega}$, pa time poprima maksimum. Posebno, parcijalna derivacija je po apsolutnoj vrijednosti ograničena

$$\sup_{\Omega} \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \leq \max_{\overline{\Omega}} \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| < +\infty,$$

te koristeći Zadatak 1.2 znamo da je f Lipschitz neprekidna po 2. varijabli. Možemo primijeniti Picardov teorem.

b) $u_0(x) = u_0 = 1$.

$$u_1(x) = 1 + \int_{-1}^{x} f(t, u_0(t))dt = 1 + \int_{-1}^{x} (t+1)\Big(1 - \frac{1}{1}\Big)dt = 1.$$
$$u_2(x) = 1 + \int_{-1}^{x} f(t, u_1(t))dt = 1 + \int_{-1}^{x} (t+1)\Big(1 - \frac{1}{1}\Big)dt = 1.$$

□

Zadatak 1.7. *Neka je dana početna zadaća*

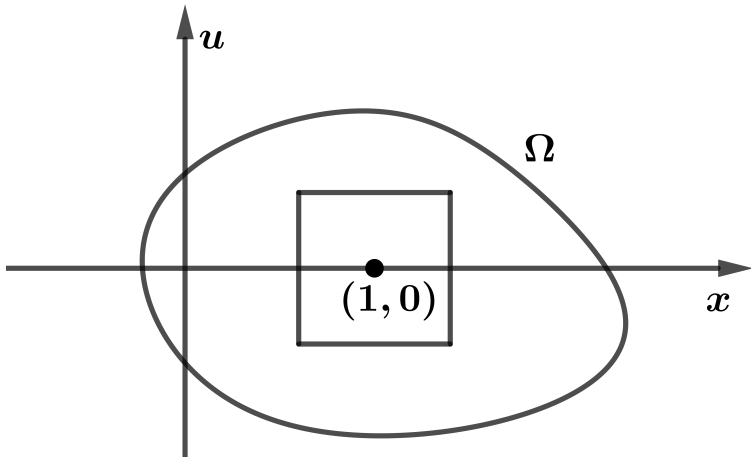
$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

gdje je $f(u) = \begin{cases} 0, \ u \leq 0, \\ u \ln u, \ u > 0. \end{cases}$

Vrijede li pretpostavke Picardovog teorema za ovu početnu zadaću? Detaljno obrazložite.

Rješenje: Definiramo

$$g(x, u) := f(u) = \begin{cases} 0, \ u \leq 0, \\ u \ln u, \ u > 0. \end{cases}$$



Slika 6: Otvoreni pravokutnik unutar skupa Ω.

Neka je Ω proizvoljan otvoreni skup takav da $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ i $(1,0) \in \Omega$, te odaberimo otvoreni pravokutnik sadržan u Ω koji sadrži $(1,0)$. (vidi Sliku 6). Vrijedi:

$$\begin{aligned} \lim_{u \to 0^+} g(x,u) &= \lim_{u \to 0^+} u \ln u = \lim_{u \to 0^+} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \\ &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u \to 0^+} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \to 0^+} (-u) = 0, \end{aligned} \tag{1.15}$$

čime je g neprekidna u $(x_0, 0), x_0 \in \mathbb{R}$ jer vrijedi

$$\lim_{(x,u) \to (x_0, 0^-)} g(x,u) = g(x_0, 0) = \lim_{(x,u) \to (x_0, 0^+)} g(x,u). \tag{1.16}$$

Posljedično je $g \in C(\Omega; \mathbb{R})$. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = \ln u + u \cdot \frac{1}{u} = \ln u + 1, \ u > 0, \\ &\frac{\partial g}{\partial u}(x,u) = 0, \ u \leq 0. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Promatramo niz $a_n = \left(1, \frac{1}{n}\right)$. Tada $a_n \to (1,0)$, dok $\left|\frac{\partial g}{\partial u}(a_n)\right| \to \infty$, pa slijedi da g nije ograničena na pravokutniku $\tilde{P} = \{(x,y) \in P \ : \ y > 0\}$. Prema Zadatku 1.2 funkcija nije Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na $\tilde{P}$, pa niti na nadskupu Ω. Zbog proizvoljnosti od Ω zaključujemo da pretpostavke Piardovog teorema nisu ispunjene niti na jednom otvorenom skupu Ω koji sadrži točku $(1,0)$. $\square$

2. Diferencijalne jednadžbe sa separiranim varijablama

Rješenje obične diferencijalne jednadžbe nije uvijek moguće izraziti u eksplicitnom obliku $y = y(x)$, ali postoji mogućnost zapisati ga u implicitnom obliku kao $F(x, y) = C$, gdje je C proizvoljna konstanta. U skladu s time dajemo sljedeću definiciju:

Definicija 2.1. *[Prvi integral diferencijalne jednadžbe] Neka su $\Omega, \tilde{\Omega}$ otvoreni podskupovi u $\mathbb{R}^2$, $f \in C(\Omega; \mathbb{R})$ i $F \in C^1(\tilde{\Omega}; \mathbb{R})$ čiji je gradijent različit od nul-vektora na cijelom $\tilde{\Omega}$. Kažemo da je F prvi integral diferencijalne jednadžbe $y' = f(x, y)$ ako na skupu $\Omega_0 = \Omega \cap \tilde{\Omega}$ vrijedi:*

$$\partial_x F(x, y) + \partial_y F(x, y) \cdot f(x, y) = 0 \tag{2.1}$$

Standardno implicitno rješenje

$$F(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

još nazivamo i *integralnom krivuljom* diferencijalne jednadžbe.

Napomena 2.2. *Istaknimo da implicitna jednadžba $F(x, y) = C$ gdje F zadovoljava Definiciju 2.1 definira (lokalno) eksplicitno rješenje diferencijalne jednadžbe kroz teorem o implicitnoj funkciji.*

Neka je $F(x, y) = C$ za $C \in F(\tilde{\Omega})$ te vrijedi $\nabla F(x, y) \neq 0$, odnosno $\partial_x F(x, y) \neq 0$ ili $\partial_y F(x, y) \neq 0$ na nekom otvorenom podskupu od $\tilde{\Omega}$.

Ako je $\partial_y F(x, y) \neq 0$ na otvorenoj skupu $\tilde{\Omega}$ tada po teoremu o implicitnoj funkciji postoji preslikavanje $x \mapsto y(x) : I \to \mathbb{R}$ klase C^1 takvo da je $F(x, y(x)) = C$ i

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y(x))}{\partial_y F(x, y(x))}.$$

Zbog (2.1) zaključujemo da je $y'(x) = f(x, y(x))$, dakle $F(x, y) = C$ implicitno definira (barem lokalno) krivulju u $\mathbb{R}^2$ koja je rješenje diferencijalne jednadžbe.

Ako je $\partial_x F(x, y) \neq 0$ na otvorenoj skupu $\tilde{\Omega}$ tada po teoremu o implicitnoj funkciji postoji preslikavanje $y \mapsto x(y) : I \to \mathbb{R}$ klase C^1 takvo da je $F(x(y), y) = C$ te zbog (2.1)

$$x'(y) = -\frac{\partial_y F(x(y), y)}{\partial_x F(x(y), y)} = \frac{1}{f(x(y), y)}.$$

Jer je $\partial_x F(x, y) \neq 0$ nužno je $f(x(y), y) \neq 0$ pa možemo dijeliti s $f(x(y), y)$. To osigurava da je $x \mapsto y(x)$ bijekcija te iz izraza za derivaciju inverzne funkcije dobivamo sličan zaključak kao ranije

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = f(x(y), y) = f(x, y(x)).$$

2.1. Metoda separacije varijabli

Promatramo početnu zadaću

$$\begin{cases} y' = f(x, y) = g(x)h(y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2.2}$$

čija desna strana dopušta separaciju varijabli funkcije f.

Teorem 2.3 (Separabilne jednadžbe)**.** *Neka je* $g \in C(\langle x_0 - \alpha_x, x_0 + \beta_x\rangle; \mathbb{R})$ *i* $h \in C(\langle y_0 - \alpha_y, y_0 + \beta_y\rangle; \mathbb{R})$*, gdje je* h *strogo pozitivna (negativna) na* $\langle y_0 - \alpha_y, y_0 + \beta_y\rangle$*. Tada postoji* $\delta \in \langle 0, \min\{\alpha_x, \beta_x\}\rangle$ *takav da početna zadaća (2.2) ima jedinstveno rješenje na intervalu* $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta\rangle$*.*

Napomena 2.4. *Lipschitz neprekidnost funkcije* f *po drugoj varijabli zamijenjena je pretpostavkom* $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ *i* $h > 0$ *ili* $h < 0$*. Drugim riječima, imamo samo dovoljne uvjete kada je rješenje početne zadaće jedinstveno.*

Metoda separacije varijabli kod diferencijalne jednadžbe formalno odvaja varijable x i y te ih zatim integrira čime dolazimo do implicitnog rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$
\begin{aligned}
& y' = \frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad \Big/ \cdot \tfrac{dx}{h(y)} \\
\Rightarrow \quad & \frac{dy}{h(y)} = g(x)dx \quad \Big/ \int \\
\Rightarrow \quad & \int^{y} \frac{ds}{h(s)} = \int^{x} g(s)ds
\end{aligned}
$$

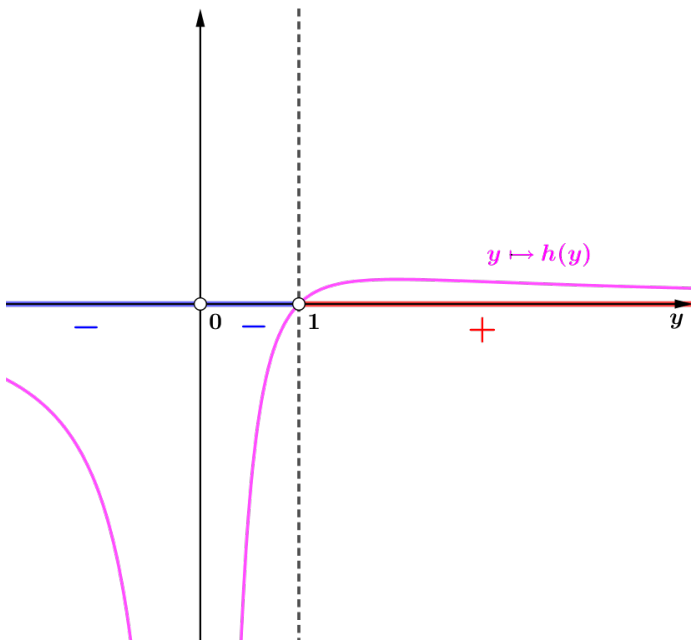
Zadatak 2.1. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$x^2y^2y' + 1 = y.$$

Rješenje: Vrijedi:

$$y' = \frac{1}{x^2}\frac{y-1}{y^2} = g(x)h(y),$$

gdje je $g \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$, $h \in C(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \mathbb{R})$ i h mijenja predznak za $y = 1$ (vidi Sliku 7). To znači da je Teorem o separabilnim jednadžbama primijenjiv ako su početni uvjeti



Slika 7: Predznak funkcije h

$(x_0, y_0) \in I_x \times I_y$, gdje je I_x interval koji ne sadrži 0, dok I_y ne sadrži 0 i 1. Imamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{y^2}\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{y^2}{y-1}dy = \frac{1}{x^2}dx \ / \int \Rightarrow \int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{1}{x^2}dx. \tag{2.3}$$

Vrijedi:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \begin{bmatrix} u = y-1 \\ du = dy \end{bmatrix} = \int \frac{(u+1)^2}{u}du = \int \left(u + 2 + \frac{1}{u}\right)du$$
$$= \frac{u^2}{2} + 2u + \ln|u| = \frac{(y-1)^2}{2} + 2(y-1) + \ln|y-1|,$$

te

$$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C.$$

Sada dobivamo:

$$\frac{(y-1)^2}{2} + 2(y-1) + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C,$$

čime je prvi integral diferencijalne jednadžbe u sljedećem obliku:

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| + \frac{1}{x} = C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

Ako dijelimo s $y-1$ potrebno je dodatno provjeriti je li $y = 1$ stacionarno rješenje diferencijalne jednadžbe (kažemo da je stacionarno ili kritično ako je desna strana u (2.3) jednaka 0). Zaista, $y : x \mapsto 1$ zadovoljava diferencijalnu jednadžbu čime dobivamo još jedan integral diferencijalne jednadžbe. Time su sva rješenja diferencijalne jednadžbe

$$\frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| + \frac{1}{x} = C, \quad C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad y = 1.$$

□

Diferencijalne jednadžbe se često pišu i kao diferencijalne 1-forme. Prednost tog zapisa je u tome što ne pretpostavljamo da je $y = y(x)$ ili $x = y(x)$.

Zadatak 2.2. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$(xy^2 - y^2 + x - 1)dx + (x^2y - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 2)dy = 0.$$

Rješenje: Imamo:

$$(x-1)(y^2+1)dx + (y+1)(x^2 - 2x + 2)dy = 0 \ / \cdot \frac{1}{(x-1)^2+1} \cdot \frac{1}{y^2+1},$$

iz čega slijedi:

$$\frac{x-1}{(x-1)^2+1}dx + \frac{y+1}{y^2+1}dy = 0. \tag{2.4}$$

Sada imamo:

$$\begin{gathered} \int \frac{x-1}{(x-1)^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln|(x-1)^2+1| + C, \\ \int \frac{y+1}{y^2+1}dy = \int \frac{y}{y^2+1}dy + \int \frac{1}{y^2+1}dy = \frac{1}{2}\ln|y^2+1| + \arctan y + C. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Integracijom jednadžbe (2.4) te koristeći (2.5) dobivamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\ln|(x-1)^2+1|+\frac{1}{2}\ln|y^2+1|+\arctan y+C=0\ /\cdot 2,\\ \Leftrightarrow \ln(|(x-1)^2+1||y^2+1|)+2\arctan y+\ln C_0=0,\ C_0>0,\\ \Leftrightarrow C_0((x-1)^2+1)(y^2+1)=e^{-2\arctan y},\ C_0>0.\end{aligned}$$

□

Zadatak 2.3. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$x^2y'-\cos(2y)=1,$$

i nađite rješenje takvo da je $\lim_{x\to\infty} y(x)=\frac{9\pi}{4}$.

Rješenje: Imamo:

$$y'=\frac{1}{x^2}(1+\cos(2y))=g(x)h(y),$$

gdje mora vrijediti:

$$y\mapsto h(y)=1+\cos(2y)=2\cos^2 y\neq 0\Leftrightarrow \cos y\neq 0\Leftrightarrow y\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z},$$

te gledamo da h mora biti strogo pozitivna ili negativna. Istaknimo da su

$$x\mapsto \pi/2+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

ipak stacionarna rješenja jednadžbe, makar nisu tražena rješenja diferencijalne jednadžbe jer niti jedna ne postiže vrijednost od $9\pi/4$ na limesu.

Teorem o separabilnim jednadžbama smijemo koristiti za $(x_0,y_0)\in I_x\times I_y$, gdje je I_x interval koji ne sadrži 0 te I_y interval koji ne sadrži $\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}y'=\frac{1+\cos(2y)}{x^2}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos^2 y}{x^2}\Leftrightarrow\frac{dy}{2\cos^2 y}=\frac{dx}{x^2}\ /\int\\ \Rightarrow\int\frac{dy}{2\cos^2 y}=\int\frac{dx}{x^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\operatorname{tg} y+\frac{1}{x}=C.\end{aligned}$$

Sada imamo:

$$C=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}(y(x))+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{9\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

Dakle, rješenje diferencijalne jednadžbe takav da je $\lim_{x\to\infty} y(x)=\frac{9\pi}{4}$ je dan sa

$$\operatorname{tg} y+\frac{2}{x}=1.$$

Izrazimo y eksplicitno:

$$\operatorname{tg} y+\frac{2}{x}=1\Rightarrow\operatorname{tg} y=-\frac{2}{x}+1\Rightarrow y=\arctan\left(-\frac{2}{x}+1\right)+2\pi,$$

što je traženo rješenje (zadovoljen je uvjet $\lim_{x\to\infty} y(x)=\frac{9\pi}{4}$). □

Je li rješenje u Zadatku 2.3 jedinstveno određeno? Pokušajte primijeniti jedan od prethodnih teorema o egzistenciji i jedinstvenosti.

U većini situacija je jednostavno vidjeti može li se desna strana početne jednadžbe separirati. Uz dodatnu kvalitetu funkcije f sljedeći zadatak daje nužne i dovoljne uvjete kada je moguće napraviti separaciju varijabli.

Zadatak 2.4. *Pretpostavimo da su u $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (otvoren podskup) funkcije f, $\partial_x f$, $\partial_y f$, $\partial_{yx} f$ neprekidne i $f(x,y) \neq 0$ za $(x,y) \in \Omega$. Tada se funkcija f može zapisati kao produkt funkcija g i h klase C^1 tako da $f(x,y) = g(x)h(y)$ ako i samo ako vrijedi:*

$$\forall\ (x,y) \in \Omega \qquad f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) = \partial_x f(x,y)\partial_y f(x,y). \tag{2.6}$$

Rješenje: $\boxed{\Rightarrow}$ Imamo:

$$\begin{aligned} f(x,y) = g(x)h(y) \Rightarrow & \partial_x f(x,y) = g'(x)h(y),\ \partial_y f(x,y) = g(x)h'(y), \\ & \partial_{yx} f(x,y) = g'(x)h'(y). \end{aligned}$$

Dakle, zaista vrijedi:

$$\begin{aligned} f(x,y)\partial_{yx} f(x,y) &= g(x)h(y)g'(x)h'(y) = g(x)h'(y)g'(x)h(y) \\ &= \partial_y f(x,y)\partial_x f(x,y) = \partial_x f(x,y)\partial_y f(x,y). \end{aligned}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je sada $f(x,y) \neq 0$ (smijemo dijeliti s $f(x,y)$). Imamo:

$$\partial_y\Big(\frac{\partial_x f}{f}\Big) = \frac{1}{f^2}(\partial_{yx} f \cdot f - \partial_x f \partial_y f) = 0,$$

iz čega slijedi:

$$\frac{\partial_x f}{f} = \tilde{\alpha}(x).$$

Iz činjenice da su $\partial_x f$ i f neprekidne, slijedi da je $\tilde{\alpha}$ neprekidna. Sada imamo:

$$\partial_x(\ln|f|) = \tilde{\alpha}(x) \Big/^{\int dx} \Rightarrow \ln|f| = \int^x \tilde{\alpha}(s)ds + \beta(y) = \alpha(x) + \beta(y),$$

pa dobivamo:

$$|f| = e^{\alpha(x)+\beta(y)} = e^{\alpha(x)}e^{\beta(y)}.$$

Kako f ima konstantan predznak, slijedi $f(x,y) = g(x)h(y)$. Iz činjenice da su $\partial_x f$, $\partial_y f$, i f neprekidne slijedi da su g i h klase C^1. $\square$

Napomena 2.5. *Uvjet na neprekidnost funkcije $\partial_{yx} f$ je bitan u odabiru izraza koji deriviramo $\partial_y(\partial_x f/f)$. U slučaju da je $\partial_{xy} f$ neprekidna funkcija potrebno je koristiti izraz $\partial_x(\partial_y f/f)$ u dokazu. Ako je f funkcija klase C^2 onda su oba izraza korektna.*

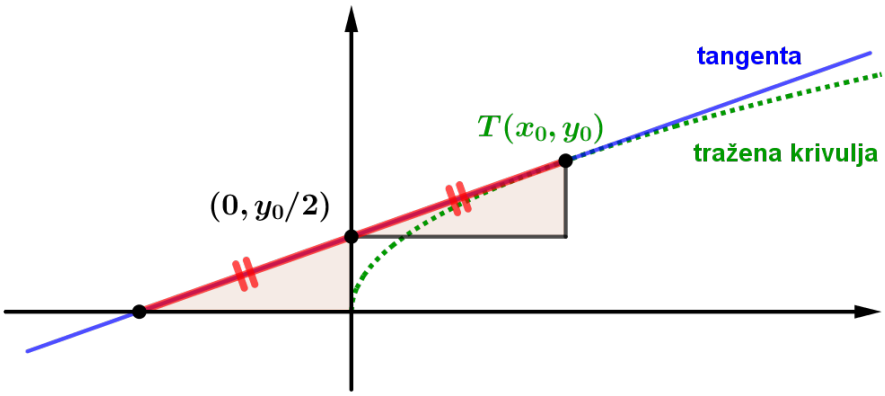
Zadatak 2.5. *Odredite sve krivulje sa svojstvom da u svakoj točki sjecište tangente s y-osi raspolavlja spojnicu dirališta i sjecišta tangente s x-osi.*

Rješenje: Jednadžba tangente u točki (x_0, y_0) na krivulju $x \mapsto y(x)$ je dana s

$$y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0. \tag{2.7}$$

Na Slici 8 vidimo dva sukladna trokuta, tj. tangenta prolazi kroz $(0, y_0/2)$. Uvrštavanjem vrijednosti u jednadžbu tangente (2.7) dobivamo

$$\frac{y_0}{2} = y'(x_0)(-x_0) + y_0 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0)x_0 = \frac{y_0}{2}.$$



Slika 8: Skica zadatka 2.5

iz čega zaključujemo da je $2xy' = y$ diferencijalna jednadžba koja zadovoljava nepoznata krivulja. Metodom separacije varijabli:

$$\begin{aligned} 2xy' = y \Rightarrow 2\frac{dy}{y} &= \frac{dx}{x} \ / \int \\ \Rightarrow \quad 2\ln|y| &= \ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R}, \\ \Rightarrow \quad \ln y^2 &= \ln|x| + \ln C_0, \ C_0 > 0, \\ \Rightarrow \quad y^2 &= C_0|x|, \ C_0 > 0, \end{aligned}$$

dobivamo da je $y^2 = Cx$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tražena krivulja. □

Zadatak 2.6. *Nađite krivulju koja prolazi točkom $T(3, 2)$, a diralište bilo koje njene tangente raspolavlja odsječak tangente među koordinatnim osima.*

Rješenje: Jednadžba tangente na krivulju u točki (x_0, y_0) je dana sa $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ te prolazi kroz točku $(0, 2y_0)$ što je posljedica toga što su dani trokuti sukladni (vidi Sliku 9). Uvrštavanjem točke $(0, 2y_0)$ u jednadžbu tangente slijedi

$$2y_0 = y'(x_0)(-x_0) + y_0,$$

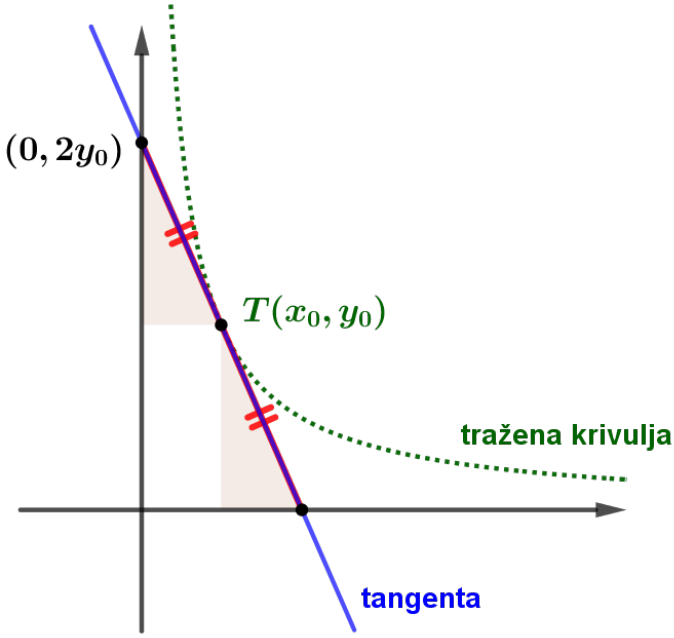
čime je diferencijalna jednadžba koju zadovoljava krivulja

$$xy' = -y.$$

Sada dobivamo:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \ / \int \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + C, \ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \ln|xy| = \ln C_0, \ C_0 > 0 \Rightarrow |xy| = C_0, \ C_0 > 0 \\ &\Rightarrow xy = C, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow y = \frac{C}{x} \end{aligned}$$

Iz početnog uvjeta $x_0 = 3$, $y_0 = 2$ dobivamo da je $C = 6$. Tražena krivulja je $y = \frac{6}{x}$, $x > 0$. □



Slika 9: Skica zadatka 2.6

2.2. Zadaci za vježbu

Zadatak 2.7. *Zadana je diferencijalna jednadžba:*

$$u' = (x+1)\Big(1 - \frac{1}{u}\Big).$$

a) Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe.

b) Možemo li primijeniti teorem o separabilnim jednadžbama ako za početni uvjet uzmemo $u(-1) = 2$? Što ako je $u(-1) = 1$? Postoji li rješenje u tom slučaju?

Rješenje:

a)

$$\frac{du}{dx} = (x+1)\Big(\frac{u-1}{u}\Big).$$

Primijetimo da je za $u = 1$ desna strana jednaka nuli čime je $x \mapsto 1$ jedno rješenje. Pod pretpostavkom da je $u \neq 1$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{u+1-1}{u-1}du = (x+1)dx \\
&\Rightarrow \Big(1 + \frac{1}{u-1}\Big)du = (x+1)dx \ / \int \\
&\Rightarrow u + \ln|u-1| = \frac{x^2}{2} + x + C, \ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Time su sva rješenja diferencijalne jednadžbe:

$$u + \ln|u-1| = \frac{x^2}{2} + x + C, \ C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad u = 1.$$

b) Desnu stranu možemo separirati. Označimo $g(x) := x + 1$, $h(u) := \frac{u-1}{u}$. g je afina funkcija pa je time klase C^1 na $\mathbb{R}$. $h : \mathbb{R} \setminus 0 \to \mathbb{R}$ je klase C^1 na $\mathbb{R} \setminus 0$ te dodatno mijenja predznak u točki $u = 1$. Teorem o separaciji primjenjiv je za početnu zadaću u točki $(-1, 2)$ jer za svake otvorene intervale $I_x \subset \langle -\infty, +\infty \rangle$ i $I_u \subset \langle 1, +\infty \rangle$ za koje vrijedi $(-1, 2) \in I_x \times I_u$ znamo da je g, h na I_x, I_u klase C^1, respektivno, te da h ne mijenja predznak na I_u. Time je

$$u + \ln|u - 1| = \frac{x^2}{2} + x + 5/2$$

jedinstveno rješenje zadaće za početni uvjet $u(-1) = 2$. U slučaju da je početni uvjet $u(-1) = 1$ funkcija h mijenja predznak čime teorem o separaciji ne možemo primijeniti. Picardov teorem daje egzistenciju i jedinstvenost rješenja $x \mapsto 1$ (vidi Zadatak 1.6).

□

Zadatak 2.8. *Odredite rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$3x^2x' + 16t = 2tx^3,$$

koje je ograničeno za $t \to +\infty$.

Rješenje: Imamo:

$$\begin{aligned} &3x^2\frac{dx}{dt} = 2t(x^3 - 8) \\ &\Rightarrow 3x^2dx = 2t(x^3 - 8)dt \ / : (x^3 - 8) \end{aligned}$$

Vidimo da je $x = 2$ stacionarno rješenje i očito ograničeno kada $t \to +\infty$. Neka je $x \neq 2$. Tada iz zadnje jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} &\frac{3x^2}{x^3 - 8}dx = 2tdt \ / \int \\ &\Rightarrow \int \frac{3x^2}{x^3 - 8}dx = \int 2tdt \\ &\Rightarrow \ln|x^3 - 8| = t^2 + \ln C, \ C > 0 \\ &\Rightarrow |x^3 - 8| = Ce^{t^2}, \ C > 0 \\ &\Rightarrow x^3 = Ce^{t^2} + 8, \ C \neq 0 \end{aligned}$$

Time smo pokazali da su sva moguća rješenje diferencijalnje jednadžbe:

$$x^3 = Ce^{t^2} + 8, \ C \neq 0 \qquad \text{i} \qquad x = 2.$$

Vidimo da je rješenja $x \mapsto (Ce^{t^2} + 8)^{1/3}$ ograničena za $t \to \infty$ ako i samo ako je $C = 0$ što je u kontradikciji s konstrukcijom konstante. Time je stacionarno rješenje $x \mapsto 2$ jedino rješenje koje je ograničeno za $t \to +\infty$. □

Zadatak 2.9. *Neka je dana početna zadaća*

$$\begin{cases} u' = f(u), \\ u(1) = 0, \end{cases}$$

gdje je $f(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u \ln u, & u > 0. \end{cases}$

Pronađite prvi integral diferencijalne jednadžbe $u' = u \ln u$.

Možemo li primijeniti teorem o separabilnim jednadžbama na početnu zadaću? Znači li to da nema rješenja?

Rješenje: Dani zapis ima smisla dok je $u > 0$:

$$\frac{du}{dx} = u \ln u \Leftrightarrow \frac{du}{u \ln u} = dx \ / \int$$

čime slijedi

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \begin{bmatrix} t = \ln u \\ dt = \frac{du}{u} \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln(|\ln u|) + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

Možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned} &\ln(|\ln u|) = x + C \ /e^{(\cdot)}, \ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow |\ln u| = e^x \cdot e^C \Rightarrow u = e^{Ce^x}, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Desna strana se da separirati, tj.

$$f(x, u) = g(x)h(u), \ g(x) = 1, \ h(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u \ln u, & u > 0. \end{cases}$$

Funkcija g je neprekidna u okolini 1, a h u okolini 0 (detalji u Zadatku 1.7). Međutim, h nije strogo pozitivna/negativna u okolini 0. Dakle, pretpostavke teorema o separabilnim jednadžbama nisu ispunjene.

Znači li to da nema rješenja gornje diferencijalne jednadžbe? U sklopu Definicije 1.2 stavili smo nekoliko uvjeta koje rješenje mora zadovoljavati. Desna strana je neprekidna na otvorenoj okolini $(1, 0)$ te vidimo da je $x \mapsto 0$ očito stacionarno rješenje po svim ostalim uvjetima, tj. da je $x \mapsto 0$ klase C^1 na otvorenom intervalu (npr. $\mathbb{R}$), da graf $\Gamma(u) = \mathbb{R} \times \{0\}$ pripada domeni desne strane, i da vrijedi diferencijalna jednadžba. Jer je zadovoljen početni uvjet time je po definiciji rješenje početne zadaće.

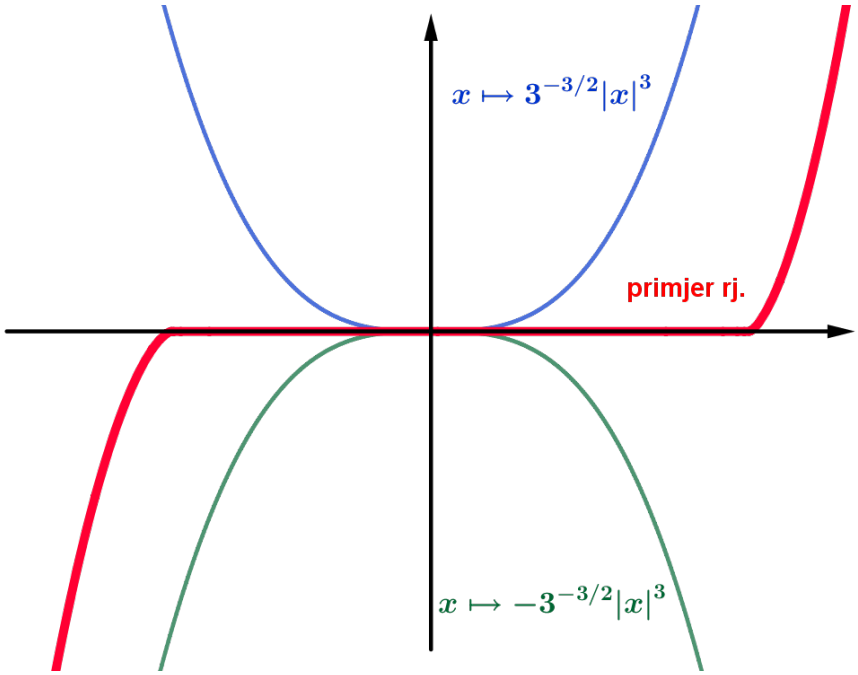
□

Je li stacionarno rješenje jedinstveno rješenje početne zadaće u prethodnom zadatku? Dokažite ili opovrgnite.

Zadatak 2.10. *Ima li zadaća jedinstveno rješenje* $\begin{cases} y' = xy^{1/3}, \\ y(0) = 0 \end{cases}$?

Rješenje: Gornja početna zadaća ima rješenje po Peanovom teoremu, ali niti Picardov teorem niti teorem o separaciji nisu primjenjivi. Naime, $(x, y) \mapsto xy^{1/3}$ nije Lipschitz neprekidna po drugoj varijabli na otvorenom skupu koji sadrži $(x_0, y_0) = (0, 0)$ (pokažite!), dok $h : y \mapsto y^{1/3}$ mijenja predznak za $y_0 = 0$. Za $y \neq 0$ možemo napraviti sljedeće

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{3}} \quad &\Rightarrow \quad y^{-\frac{1}{3}} dy = x dx \quad / \int \\ &\Rightarrow \quad \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} x^2 + C \\ &\Rightarrow \quad y = \pm (x^2/3 + C)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$



Slika 10: Rješenje za konstante $C_1 = 3, C_2 = 2$ gdje je za $x < -2$ funkcija negativna, a za $x > 3$ pozitivna.

Time možemo zapisati opće rješenje za $C_1, C_2 \geq 0$ (vidi Sliku 10 za specifične konstante i predznake funkcije):

$$\begin{cases} \pm(x^2/3 - C_1)^{3/2}, & x > \sqrt{3C_1} \\ 0, & -\sqrt{3C_2} \leq x \leq \sqrt{3C_1} \\ \pm(x^2/3 + C_2)^{3/2}, & x < -\sqrt{3C_2} \end{cases} \tag{2.8}$$

Uvjerite se da je (2.8) zaista rješenje diferencijalne jednadžbe po Definiciji 1.2 □

3. Pojednostavljanje na separabilne jednadžbe

3.1. Afine supstitucije

Jednadžba tipa $y' = f(ax+by+c)$ može se svesti na jednadžbu sa separiranim varijablama uz supstituciju $z = ax + by + c$, $z \equiv z(x)$.

Zadatak 3.1. *Riješite jednadžbu:*

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Rješenje: Uvodimo supstituciju $z = 4x + 2y - 1$. Deriviranjem dobivamo identitet

$$z' = 4 + 2y' = 4 + 2\sqrt{z}.$$

Slijedi

$$\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = dx \ / \int \Rightarrow \int \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \int dx$$

Prvo izračunamo neodređeni integral s lijeve strane

$$\int \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{2+\sqrt{z}} = \begin{bmatrix} u = 2+\sqrt{z} \\ du = \frac{1}{2}\frac{dz}{\sqrt{z}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2(u-2)du}{u} = \int du - \int \frac{2}{u}du =$$
$$= u - 2\ln|u| + C = 2 + \sqrt{z} - 2\ln|2+\sqrt{z}| + C = \sqrt{z} - 2\ln|2+\sqrt{z}| + C.$$

Time dobivamo

$$\sqrt{z} - 2\ln|2+\sqrt{z}| = x + C, \ C \in \mathbb{R}.$$

što nakon zamijene $z = 4x + 2y - 1$ daje traženo rješenje

$$\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln|2+\sqrt{4x+2y-1}| - x + C = 0, \ C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 3.2. *Riješite početni problem:*

$$\begin{cases} (x+2y)y' = 1, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Rješenje: Koristimo supstituciju $z = x + 2y$, $z = z(x)$ iz čega dobivamo

$$z' = 1 + 2y' = 1 + 2 \cdot \frac{1}{z} = \frac{2+z}{z}.$$

Integriramo uz pretpostavku da je $z + 2 \neq 0$

$$\int \frac{z}{2+z}dz = \int dx.$$

Za lijevu stranu

$$\int \frac{z}{z+2}dz = \begin{bmatrix} u = z+2 \\ du = dz \end{bmatrix} = \int \frac{u-2}{u}du = u - 2\ln|u| = z + 2 - 2\ln|z+2| + C$$

Sve zajedno daje

$$z - \ln(z+2)^2 = x + C, \ C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad z = -2.$$

Nakon vraćanja supstitucije moguća rješenja su

$$x + 2y - \ln(x + 2y + 2)^2 = x + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad x + 2y = -2.$$

Ubacivanje $x_0 = 0$, $y_0 = -1$ u prvu jednadžbu nema smisla jer logaritam nije definiran u 0, ali vidimo da krivulja sadrži početnu točku $(0, -1)$. Pogledajmo stacionarno rješenje $z + 2 = 0$. Vraćanjem supstitucije to postaje $x + 2y = -2$ te zaista početna točka $(0, -1)$ pripada toj krivulji. Time je traženo rješenje upravo $x + 2y = -2$. □

3.2. Homogene jednadžbe

Definicija 3.1. *Kažemo da je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ homogena stupnja k ako je*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y).$$

Primjer 3.2. *Primjeri homogenih funkcija:*

a) $f(x, y) = x^3 + y^3$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 x^3 + \lambda^3 y^3 = \lambda^3 f(x, y) \Rightarrow k = 3$

b) $f(x, y) = x^2 y^3$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^5 x^2 y^3 = \lambda^5 f(x, y) \Rightarrow k = 5$

Definicija 3.3. *Običnu diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$ nazivamo homogenom ako je f homogena funkcija (nultog stupnja). Diferencijalnu formu $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ nazivamo homogenom ako su M i N homogene funkcije istog stupnja.*

Pogledajmo homogenu diferencijalnu jednadžbu $y' = f(x, y)$. Ako iskoristimo da je f homogena stupnja 0 ($\lambda^0 = 1$) tada vrijedi sljedeće

$$y' = f(x, y) = f\Big(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\Big) = f\Big(1, \frac{y}{x}\Big) = g\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Kod homogenih jednadžbi koristimo supstituciju $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$:

$$xz = y \ /' \ \Rightarrow \ z + xz' = y' = g(z) \ \Rightarrow \ xz' = g(z) - z$$

čime smo dobili seperabilnu diferencijalnu jednadžbu:

$$\frac{dz}{g(z) - z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{g(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

Zadatak 3.3. *Riješi diferencijalnu jednadžbu:*

$$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Rješenje: Podijelimo diferencijalnu jednadžbu s x:

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

S obzirom da se radi o diferencijalnoj jednadžbi koja je očito homogena, iskoristimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$. Dakle

$$ux = y \ /' \Rightarrow u'x + u = y' = u + \operatorname{tg} u,$$

što daje separabilnu diferencijalnu jednadžbu po u.

$$u'x = \operatorname{tg} u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{\operatorname{tg} u} = \frac{dx}{x} \quad \Big/ \int.$$

Provjerimo prvo što ako je $\operatorname{tg} u = 0$. Vrijedi

$$\operatorname{tg} u = 0 \Leftrightarrow \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Vidimo da su $y = xk\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ stacionarna rješenja diferencijalne jednadžbe. Metodom separacije u slučaju $\operatorname{tg} u \neq 0$ integriranjem lijeve strane dolazimo do

$$\int \frac{du}{\operatorname{tg} u} = \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \ln|\sin u|.$$

Sve zajedno, skupa sa vraćanjem supstitucija daje

$$\begin{aligned}
&\ln|\sin u| = \ln|x| + C,\ C \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\quad &\ln|\sin u| = \ln(C_0|x|),\ C_0 > 0 \ / \exp(\cdot) \\
\Rightarrow\quad &|\sin u| = C_0|x|,\ C_0 > 0 \\
\Rightarrow\quad &\sin u = Cx,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
\Rightarrow\quad &\sin \frac{y}{x} = Cx,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

Time je rješenje diferencijalne jednadžbe dano s

$$\sin \frac{y}{x} = Cx,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{i} \quad y = k\pi x,\ k \in \mathbb{Z}.$$

□

Zadatak 3.4. *Riješite diferencijalne jednadžbu*

$$(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

Rješenje: Uočimo da je diferencijalna forma homogena ($M(x,y) = y^2 - 2xy, N(x,y) = x^2$ su homogene istog stupnja 2). Možemo eksplicitno izraziti y' :

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2} = 2\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

pa ako iskoristimo supstituciju $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$, dobivamo

$$ux = y \ /' \Rightarrow u + xu' = y' = 2u - u^2 \Rightarrow \frac{du}{u(1-u)} = \frac{dx}{x} \ / \int$$

Stacionarna rješenja su $u = 0 \Leftrightarrow y = 0$ te $u = 1 \Leftrightarrow y = x$. Lijeva strana u metodi separacije iznosi:

$$\int \frac{du}{u(1-u)} = \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{1-u}\right) du = \ln|u| - \ln|u-1| = \ln\left|\frac{u}{u-1}\right|.$$

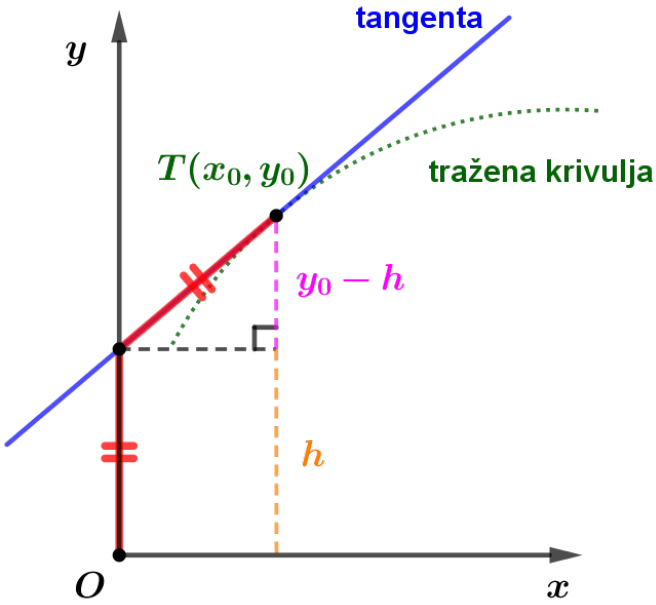
Time smo dobili

$$\begin{aligned}
\ln\left|\frac{u}{u-1}\right| = \ln|x| + C \Rightarrow \left|\frac{u}{u-1}\right| &= C_0|x|,\ C_0 > 0 \\
\Rightarrow \frac{u}{u-1} &= Cx,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\},
\end{aligned}$$

te je konačno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$y = \frac{Cx^2}{1 + Cx},\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{i} \quad y = 0, y = x.$$

□



Slika 11: Skica zadatka 3.5

Zadatak 3.5. *Odredite jednadžbu krivulje tako da svaka tangenta siječe os ordinata u točki koja je jednako udaljena od ishodišta i dirališta.*

Rješenje:

Na Slici 11 možemo prepoznati pravokutni trokut čiji su koordinate vrhova

$$(0, h), (x_0, h), (x_0, y_0).$$

Prema Pitagorinom poučku možemo izraziti vrijednost od h:

$$x_0^2 + (y_0 - h)^2 = h^2 \;\Leftrightarrow\; x_0^2 + y_0^2 - 2y_0h + h^2 = h^2 \;\Leftrightarrow\; h = \frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0}.$$

Tangenta na krivulju koja prolazi točkom (x_0, y_0) je $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ i prolazi kroz točku $(0, h)$, tj.

$$\frac{x_0^2 + y_0^2}{2y_0} = y'(x_0)(-x_0) + y_0 \;/ \cdot 2y_0$$

Time dolazimo do identiteta:

$$x_0^2 + y_0^2 = -2x_0y_0y'(x_0) + 2y_0^2 \Rightarrow 2x_0y_0y'(x_0) = y_0^2 - x_0^2.$$

Naša diferencijalna jednadžba dana je sa:

$$2xyy' = y^2 - x^2 \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{1}{2}\Big(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\Big).$$

Prepoznajemo da se radi o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi. Koristeći supstituciju $u =$

$\frac{y}{x} \Leftrightarrow xu = y \ /' \Rightarrow xu' + u = y'$ metodom separacije:

$$\begin{aligned}
&xu' + u = y' = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\frac{1}{u} \\
&\Rightarrow xu' = -\frac{1}{2}\frac{u^2+1}{u} \Rightarrow \frac{u}{u^2+1}du = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \ / \int \\
&\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = -\frac{1}{2}\ln|x| + C \ / \cdot 2 \\
&\Rightarrow u^2 + 1 = C_0|x|^{-1}, \ C_0 > 0 \Rightarrow u^2 + 1 = \frac{C_0}{|x|}, \ C_0 > 0, \ x \neq 0
\end{aligned}$$

zaključujemo da je

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 - \frac{C_0}{|x|} = 0, \ C_0 > 0$$

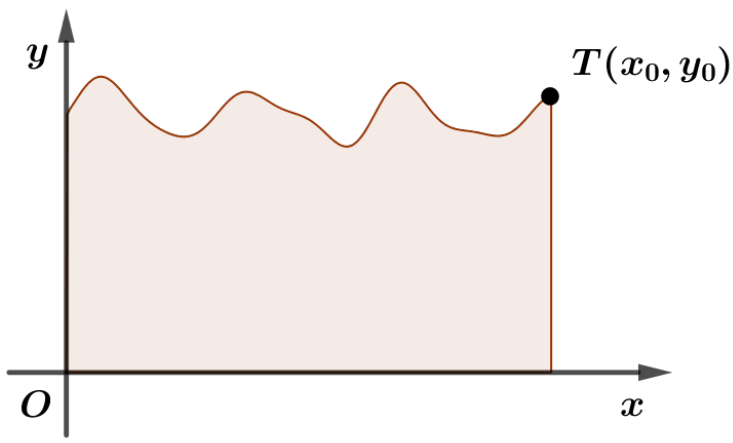
prvi integral diferencijalne jednadžbe. Možemo maknuti apsolutnu vrijednost od $|x|$, tako da radimo s neodređenom konstantom $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{y^2}{x^2} + 1 - \frac{C}{x} = 0 \ / \cdot x^2 \\
&\Rightarrow y^2 + x^2 - Cx = 0 \Rightarrow y^2 + \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{C^2}{4}.
\end{aligned}$$

Rješenje je kružnica sa centrom u $\left(\frac{C}{2}, 0\right)$ radijusa $\frac{C}{2}$ za $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. □

Zadatak 3.6. *Odredite familiju krivulja za koju je površina lika omeđenog osi apscisom, osi ordinatom, krivuljom $y = y(x)$ i pravcem paralelnim s ordinatom točke krivulje $T(x_0, y_0)$ jednak kvocijentu kuba ordinate i apscise točke T.*

Rješenje: U zadatku kaže da je integral ispod nepoznate funkcije $x \mapsto y(x)$ od 0 do x_0



Slika 12: Skica zadatka 3.6

jednak kvocijentu $\frac{y_0^3}{x_0}$, tj. imamo integralnu jednadžbu:

$$\int_0^x y(s)ds = \frac{y^3(x)}{x}. \tag{3.1}$$

Deriviranjem dolazimo do diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&\int_0^x y(s)ds = \frac{y^3(x)}{x} \quad \Big/^{\partial_x} \\
&\Rightarrow y(x) = \frac{3y^2y'x - y^3}{x^2} \\
&\Rightarrow x^2y = 3xy^2y' - y^3
\end{aligned}$$

Očito je $x \mapsto 0$ rješenje problema. Za $y \neq 0$ dobivamo homogenu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{x^2 + y^2}{3xy}.$$

Koristeći supstituciju $u = \frac{y}{x}$, $u = u(x)$ dobivamo:

$$u'x + u = y' = \frac{1}{3}\Big(u + \frac{1}{u}\Big) \Rightarrow xu' = \frac{1 - 2u^2}{3u}.$$

Metodom separacije dolazimo do

$$\frac{3u}{1 - 2u^2}du = \frac{dx}{x} \Big/ \int \Rightarrow -\frac{3}{4}\ln|1 - 2u^2| = \ln|x| + C \ / \cdot \frac{4}{3}$$

Za $1 - 2u^2 \neq 0$ slijedi:

$$|1 - 2u^2|x^{\frac{4}{3}} = C, \ C > 0.$$

Vratimo li supstituciju $u = \frac{y}{x}$ dobivamo izraz:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{C + x^{\frac{4}{3}}}, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \tag{3.2}$$

Time smo pokazali da je rješenje diferencijalne jednadžbe, odnosno integralne jednadžbe dano sa sljedećim krivuljama:

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x^{\frac{1}{3}}\sqrt{C + x^{\frac{4}{3}}}, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{i} \quad y = 0, \ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x.$$

Ako se vratimo na integralnu jednadžbu (3.1) i pustimo limes u 0 dolazimo do varijante početnog uvjeta:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{y^3(x)}{x} = 0. \tag{3.3}$$

Za (3.2) dobivamo da je $C = 0$ što je kontradikcija, odnosno jedina moguća rješenja su stacionarna, dakle $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}x$ i $y = 0$ jer zadovoljavaju početni uvjet (3.3). □

3.3. Svođenje na homogene jednadžbe

Neki tipovi jednadžbi mogu se svesti supstitucijama na homogenu jednadžbu. Jednadžba oblika

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad a, b, c, a_1, b_1, c_1 \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 > 0, \ a_1^2 + b_1^2 > 0,$$

je primjer diferencijalne jednadžbe koja se može svesti na homogenu. Odabir supstitucije ovisi o vrijednosti determinante, tj. razlikujemo dva slučaja:

a) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Uvodimo supstituciju:

$$\begin{aligned} u = x - \alpha \;\Leftrightarrow\; x(u) = u + \alpha \;\Rightarrow\; \frac{dx}{du} = 1 \\ v = y - \beta \;\Leftrightarrow\; v(u) = y(x(u)) - \beta \;\Rightarrow\; \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = y' \end{aligned} \tag{3.4}$$

Time je

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{a(u+\alpha) + b(v+\beta) + c}{a_1(u+\alpha) + b_1(v+\beta) + c_1}\Big) = f\Big(\frac{a\alpha + \beta b + c + au + bv}{a_1\alpha + b_1\beta + c_1 + a_1 u + b_1 v}\Big)$$

Sustav:

$$\begin{aligned} a\alpha + b\beta + c = 0, \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

ima jedinstveno rješenje jer $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$, čime postoje jedinstveni α, β takvi da vrijedi (3.5). Time smo problem sveli na homogenu jednadžbu:

$$\frac{dv}{du} = f\Big(\frac{au + bv}{a_1 u + b_1 v}\Big) = f\Big(\frac{a + b\frac{v}{u}}{a_1 + b_1\frac{v}{u}}\Big) = g\Big(\frac{v}{u}\Big).$$

b) $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$. U ovom slučaju postoji $\lambda \in \mathbb{R} \setminus 0$ takav da $\lambda(a, b) = (a_1, b_1)$. Supstitucijom $z = a_1 x + b_1 y = \lambda(ax + by)$, slijedi:

$$z' = a_1 + b_1 y' = a_1 + b_1 f\Big(\frac{\frac{z}{\lambda} + c}{z + c_1}\Big) = g(z).$$

Naravno, $z = ax + by$ je također prikladna supstitucija.

Zadatak 3.7. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$y' = \frac{2x + y + 1}{4x + 2y + 3}. \tag{3.6}$$

Rješenje: Nalazimo se u drugom slučaju jer je $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

Iz $z = 2x + y$ slijedi $z' = 2 + y'$ čime diferencijalna jednadžba postaje:

$$z' = 2 + y' = 2 + \frac{z+1}{2z+3} = \frac{5z+7}{2z+3}. \tag{3.7}$$

$5z+7 = 0$ je stacionarno rješenje (3.7), odnosno $2x+y = -\frac{7}{5}$ je rješenje polazne diferencijalne jednadžbe (3.6). Uz petpostavku da je $5z + 7 \neq 0$, metodom separacije

$$\frac{2z+3}{5z+7}dz = dx \;\Big/ \int$$

zaključujemo:

$$\int \frac{2z+3}{5z+7}dz = \int \Big(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\frac{1}{5z+7}\Big)dz = \frac{2}{5}z + \frac{1}{25}\ln|5z+7| = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

iz čega dobivamo da je

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{1}{25}\ln|5(2x+y)+7| = x + C,\ C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad 2x + y = -\frac{7}{5}$$

opće rješenje diferencijalne jednadžbe. □

Zadatak 3.8. *Odredite rješenje jednadžbe:*

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Rješenje: Diferencijalnu formu zapisujemo kao diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = -\frac{2x - 4y + 6}{x + y - 3}.$$

Vidimo da je vrijednost determinante različita od nule $\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6 \neq 0$. Prikladna supstitucija je

$$\begin{aligned} u = x - \alpha \Rightarrow x = u + \alpha \Rightarrow \frac{dx}{du} = 1 \\ v = y - \beta \Rightarrow v(u) = y(x(u)) - \beta \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{du} = y' \end{aligned}$$

što daje

$$\begin{aligned} \frac{dv}{du} = y' &= -\frac{2(u+\alpha) - 4(v+\beta) + 6}{(u+\alpha) + (v+\beta) - 3} \\ &= -\frac{2\alpha - 4\beta + 6 + 2u - 4v}{\alpha + \beta - 3 + u + v} \end{aligned}$$

Zaključujemo da su $\alpha = 1,\ \beta = 2$ rješenja sustava:

$$\begin{cases} 2\alpha - 4\beta + 6 = 0 \\ \alpha + \beta - 3 = 0 \end{cases}$$

čime uz supstituciju $v = y - 2$ i $u = x - 1$ diferencijalna jednadžba postaje:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u - 4v}{u + v} = -\frac{2 - 4\frac{v}{u}}{1 + \frac{v}{u}}$$

Pošto se radi o homogenoj diferencijalnoj jednadžbi koristimo supstituciju $z = \frac{v}{u},\ z = z(u)$

$$uz = v \ / \frac{\partial}{\partial u} \quad \Rightarrow \quad uz' + z = v' = -\frac{2 - 4z}{1 + z},$$

pa dobivamo:

$$uz' = -\frac{(z-2)(z-1)}{z+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{z+1}{(z-2)(z-1)}dz = -\frac{du}{u}$$

Prvo ispišimo sva stacionarna rješenja:

$$\begin{aligned} &z = 1 \Leftrightarrow \frac{v}{u} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = y - 2 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = x + 1 \\ &z = 2 \Leftrightarrow v = 2u \Leftrightarrow y - 2 = 2x - 2 \Leftrightarrow y = 2x \end{aligned} \tag{3.8}$$

Lako provjerimo da su (3.8) zaista rješenja polazne diferencijalne jednadžbe. Uz pretpostavku da je $z \neq 1$ i $z \neq 2$, u metodi separacije varijabli, razvojem na parcijalne razlomke izračunamo:

$$\int \frac{(z+1)dz}{(z-1)(z-2)} = 3\ln|z-2| - 2\ln|z-1|.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int \frac{z+1}{(z-1)(z-2)}dz = \int -\frac{du}{u} \\ \Rightarrow \quad & 3\ln|z-2| - 2\ln|z-1| = -\ln|u| + C \Leftrightarrow \frac{|z-2|^3}{|z-1|^2}|u| = C_0,\ C_0 > 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(z-2)^3}{(z-1)^2}u = C,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

Sada treba vratiti $z = \frac{y-2}{x-1}$ i $u = x - 1$. Dobivamo: $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Konačno rješenje, tako da uključimo i stacionarna (3.8) možemo zapisati kao:

$$A(y-2x)^3 + B(y-x-1)^2 = 0, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

□

3.4. Zadaci za vježbu

Zadatak 3.9. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$(t+x)^2 x' = 9.$$

Rješenje: Koristeći supstituciju $z = t + x$ imamo $\frac{dz}{dt} = 1 + \frac{dx}{dt}$, iz čega slijedi $\frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt} - 1$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & z^2\Big(\frac{dz}{dt} - 1\Big) = 9 \\ \Rightarrow \quad & z^2\frac{dz}{dt} = 9 + z^2 \\ \Rightarrow \quad & z^2 dz = (9+z^2)dt \ / : (9+z^2) > 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{z^2}{9+z^2}dz = dt \ / \int \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{z^2+9-9}{z^2+9}dz = \int dt \\ \Rightarrow \quad & z - 3\arctan\frac{z}{3} = t + C,\ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sada iz $z = t + x$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad t + x - 3\arctan\frac{t+x}{3} = t + C \ / : 3 \\
&\Rightarrow \quad \arctan\frac{t+x}{3} = \frac{x}{3} + C \\
&\Rightarrow \quad \frac{t+x}{3} = \tan\left(\frac{x}{3} + C\right) \\
&\Rightarrow \quad t + x = 3\tan\left(\frac{x}{3} + C\right), \ C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 3.10. *Riješite diferencijalne jednadžbu:*

$$(2x + 3y + 1)dx + (3x + 4y + 1)dy = 0$$

Rješenje: Zapisivanjem diferencijalne jednadžbe iz diferencijalne forme:

$$y' = -\frac{2x + 3y + 1}{3x + 4y + 1}.$$

Vidimo da je $\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, pa koristimo standardnu supstituciju (3.4)

$$\begin{aligned}
u &= x - \alpha \\
v &= y - \beta \Rightarrow
\end{aligned}$$

uz koju je

$$\frac{dv}{du} = y' = -\frac{2(u+\alpha) + 3(v+\beta) + 1}{3(u+\alpha) + 4(v+\beta) + 1}. \tag{3.9}$$

Sustav

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 1 = 0 \\ 3\alpha + 4\beta + 1 = 0 \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje $\alpha = 1$, $\beta = -1$, čime (3.9) postaje homogena diferencijalna jednadžba

$$\frac{dv}{du} = -\frac{2u + 3v}{3u + 4v} = -\frac{2 + 3\frac{v}{u}}{3 + 4\frac{v}{u}}$$

Koristeći supstituciju $z = \frac{v}{u}$, $z = z(u)$ imamo $uz = v \Leftrightarrow uz' + z = v' = -\frac{2+3z}{3+4z}$, iz čega

slijedi:

$$
\begin{aligned}
& uz' = \frac{-2-3z-3z-4z^2}{3+4z} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dz(3+4z)}{4z^2+6z+2} = -\frac{du}{u} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dz(3+4z)}{4z^2+6z+2} = -\frac{du}{u} \ / \int \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2}\ln(|2z^2+3z+1|) = -\ln|u| + \ln C,\ C>0 \\
\Leftrightarrow\quad & \sqrt{|2z^2+3z+1|} = \frac{C}{|u|},\ C>0 \\
\Leftrightarrow\quad & 2z^2+3z+1 = \frac{C}{u^2},\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\Big(\frac{y+1}{x-1}\Big)^2 + 3\frac{y+1}{x-1} + 1 = \frac{C}{(x-1)^2},\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\
\Leftrightarrow\quad & 2(y+1)^2 + 3(y+1)(x-1) + (x-1)^2 = C,\ C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}
\end{aligned}
$$

Prepoznajemo stacionarna rješenja:

1) $2z+1=0 \Rightarrow z=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$,

2) $z+1=0 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow \frac{y+1}{x-1} = -1 \Rightarrow y=-x$.

□

Zadatak 3.11. *Neka je M proizvoljna točka neke krivulje. Točka Q je projekcija točke M na ordinantnu os, dok normala u točki M na tu krivulju siječe os apscisa u točki N. Odredite jednadžbe svih krivulja za koje se pravci OM i QN sijeku pod pravim kutom, a krivulja prolazi kroz točku* $(2,0)$.

Rješenje: Označimo sjecište apcise i normale u točki M na tu krivulju s $N=N(n,0)$ (vidi Sliku 13). Vektori $\overrightarrow{QN}=(n,-y_0)$ i $\overrightarrow{OM}=(x_0,y_0)$ su okomiti, tj.

$$(n,-y_0)\cdot(x_0,y_0)=0 \iff n=y_0^2/x_0.$$

Normala u točki $M(x_0,y_0)$ glasi

$$y = -\frac{1}{y'(x_0)}(x-x_0)+y_0$$

i prolazi kroz točku $N(y_0^2/x_0,0)$. To daje

$$0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(y_0^2/x_0 - x_0) + y_0$$

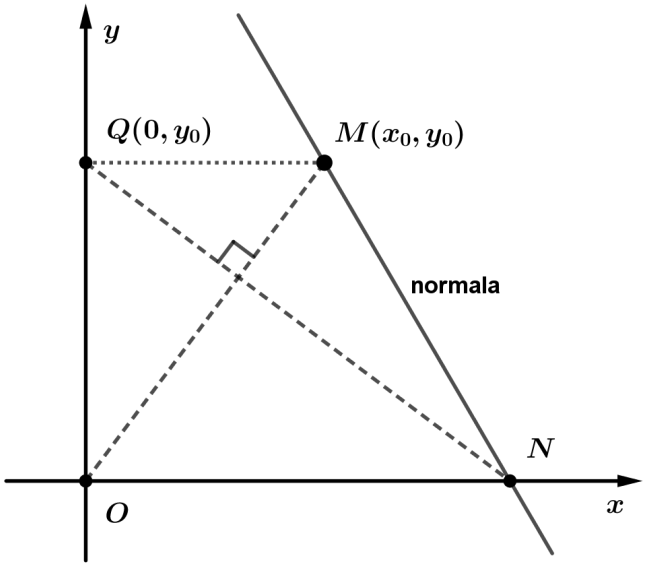
čime diferencijalna jednadžba krivulje glasi:

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$$

Jer je diferencijalna jednadžba homogena koristimo supstituciju $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$.

$$\begin{aligned} xz' + z = y' = z - z^2 &\Rightarrow xz' = -\frac{1}{z} \\ &\Rightarrow \int z dz = \int -\frac{dx}{x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}z^2 = -\ln|x| + C \\ &\Rightarrow y^2 = x^2(C - 2\ln|x|) \end{aligned}$$

Krivulja prolazi kroz točku $(2, 0)$ čime je $C = \ln 4$ i tražena krivulja $x \mapsto x^2(\ln \frac{4}{x^2})$ □



Slika 13: Skica Zadatka 3.11

Zadatak 3.12. *Zadana je diferencijalna jednadžba:*

$$y' = \mathrm{ch}^2(x - y).$$

a) Pronađite prvi integral diferencijalne jednadžbe.

b) Odredite rješenje jednadžbe uz početni uvjet $y(1) = -1$. Je li rješenje jedinstveno? Tvrdnje obrazložite!

Rješenje:

a) Uzimamo afinu supstituciju $z = x - y$, čime je

$$z' = 1 - y' = 1 - \mathrm{ch}^2 z = -\mathrm{sh}^2 z.$$

Za $\mathrm{sh}^2 z = 0$ imamo $z = 0$ tj. $y = x$, što je jedno rješenje diferencijalne jednadžbe. Uz pretpostavku $\mathrm{sh}^2 z \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad -\frac{dz}{\mathrm{sh}^2 z} = dx \ / \int \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{ctg}\, z = x + C, \ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad \mathrm{ctg}(x - y) = x + C, \ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \quad y = x - \mathrm{ctg}^{-1}(x + C), \ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Opća rješenja diferencijalne jednadžbe su:

$$y = x - \operatorname{ctg}^{-1}(x + C),\ C \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad y = x.$$

b) Za početnu zadaću

$$y(1) = -1,\ y' = f(x, y) := \operatorname{ch}^2(x - y)$$

vidimo da je $(x, y) \mapsto \operatorname{ch}^2(x - y)$ klase $C^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$. Nadalje, vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2\operatorname{ch}(x - y)\operatorname{sh}(x - y) \cdot (-1) = -\operatorname{sh}(2(x - y)),$$

čime je $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ klase $C(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ pa time i neprekidno na $\overline{P}$, gdje je P proizvoljan otvoren pravokutnik takav da $(1, -1) \in P$. Time je $\sup_P |\frac{\partial f}{\partial y}| \leq \max_{\overline{P}} |\frac{\partial f}{\partial y}| < \infty$, iz čega slijedi da je f Lipschitzova po drugoj varijabli, pa postoji jedinstveno rješenje. Ubacivanjem početnog uvjeta u 1. integral diferencijalne jednadžbe

$$y(1) = -1 \Rightarrow \operatorname{ctg}(1 + 1) = 1 + C \quad \Rightarrow C = \operatorname{ctg} 2 - 1$$

te dobivamo rješenje:

$$\operatorname{ctg}(x - y) = x + \operatorname{ctg} 2 - 1.$$

$\square$

4. Linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda

Opći zapis linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda je:

$$a_0(x)y'(x) + a_1(x)y(x) = b(x), \tag{4.1}$$

gdje su $a_0, a_1, b \in C(I;\mathbb{R})$, pri čemu je I interval te $a_0(x) \neq 0$, za svaki $x \in I$. Ako je $b = 0$ kažemo da je (4.1) *homogena* linearna diferencijalna jednadžba, odnosno ako je $b \neq 0$ govorimo o nehomogenoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi. Standardni zapis linearne diferencijalne jendadžbe prvog reda je:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \tag{4.2}$$

za $p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$ i $q(x) = \frac{b(x)}{a_0(x)}$. Istaknimo da su (4.1) i (4.2) ekvivalentni zapisi. Iz opće teorije znamo da početna zadaća ima jedinstveno rješenje na cijelom intervalu I.

4.1. Metoda varijacije konstante

Opisat ćemo postupak rješavanja početne zadaće čija je diferencijalna jednadžba (4.2).

1) Rješavanje homogene linearne jednadžbe:

$$\begin{aligned} y' + py = 0 \quad &\Rightarrow \quad y' = -py \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'}{y} = -p \int_{x_0}^{x} \\ &\Rightarrow \quad \ln|y|\Big|_{x_0}^{x} = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt \\ &\Rightarrow \quad \ln\frac{|y(x)|}{|y(x_0)|} = -\int_{x_0}^{x} p(t)dt \\ &\Rightarrow \quad |y(x)| = |y(x_0)|e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \end{aligned}$$

Predznak od $y(x)$ je uvijek isti kao od $y(x_0)$, pa zaključujemo da je rješenje oblika za $C = y(x_0) \neq 0$

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Očito je $y = 0$ stacionarno rješenje ako je $y(x_0) = 0$, tako da je opći zapis rješenja jednadžbe

$$y(x) = Ce^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

2) Varijacija konstante ili Lagrangeova metoda.

Pretpostavljamo da je rješenje oblika $y(x) = C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$.

$$\begin{aligned} y'(x) &= C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + C(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}(-p(x)) \\ &= C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} - p(x)y(x) \end{aligned}$$

Dodavanjem $p(x)y(x)$ dobivamo

$$\begin{aligned} & y'(x) + p(x)y(x) = C'(x)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} = q(x) \\ \Rightarrow \quad & C'(x) = q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad / \int_{x_0}^{x} \\ \Rightarrow \quad & C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} q(s)\Big(e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}\Big)ds \end{aligned}$$

Opće rješenje je

$$y(x) = y(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \int_{x_0}^{x} q(s)\Big(e^{\int_{x_0}^{s} p(t)dt}\Big)ds \tag{4.4}$$

Krajnja formula (4.4) se ne pamti jer je daleko jednostavnije ponoviti proces od početka.

Neka je y_p fiksno (partikularno) rješenje nehomogene jednadžbe $y_p' + py_p = q$. Označimo s y opće rješenje jednadžbe $y' + py = q$. Tada razlika $y_h = y - y_p$ zadovoljava homogenu jednadžbu

$$y_h' + py_h = (y - y_p)' + p(y - y_p) = y' + py - (y_p' + py_p) = q - q = 0$$

te se opće rješenje može zapisati kao suma partikularnog rješenja jednadžbe i općeg rješenja pripadne homogene jednadžbe:

$$y = y_h + y_p.$$

Prethodna struktura je posljedica linearnosti diferencijalne jednadžbe. Ako možemo naslutiti ili je poznato jedno partikularno rješenje tada je dovoljno pronaći opće rješenje homogene jednadžbe.

Zadatak 4.1. *Odredite opće rješenje jednadžbe:*

$$xy' - 2y = 2x^3. \tag{4.5}$$

Rješenje: Zapisujemo u obliku (4.2):

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^2$$

1) Opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe:

$$\begin{aligned} & y' = \frac{2}{x}y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \quad \Big/ \int \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = 2\ln|x| + C \\ \Rightarrow \quad & y = Cx^2,\ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

$x \mapsto 0$ je također rješenje, pa je očito $y = Cx^2$, $C \in \mathbb{R}$ opće rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe.

2) Partikularno rješenje:

$$\begin{aligned} & y(x) = C(x)x^2 \quad \Big/' \\ \Rightarrow \quad & y'(x) = C(x)'x^2 + C(x)2x = 2\frac{C(x)x^2}{x} + 2x^2 \\ \Rightarrow \quad & C'(x)x^2 = 2x^2 \\ \Rightarrow \quad & C'(x) = 2 \\ \Rightarrow \quad & C(x) = 2x + D, \quad D \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & y(x) = (2x + D)x^2 = \underbrace{Dx^2}_{y_h} + \underbrace{2x^3}_{y_p}, \quad D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

je opće rješenje linearne diferencijalne jednadžbe, gdje prepoznajemo partikularno rješenje $y_p = 2x^3$ i opće homogeno rješenje $y_h = Dx^2$, $D \in \mathbb{R}$.

□

Zadatak 4.2. *Odredite opće rješenje jednadžbe:*

$$2x(x^2+y)dx = dy.$$

Rješenje: Prepoznajemo linearnu diferencijalnu jednadžbu:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x^3 + 2xy.$$

1) Opće rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned} & y' = 2xy \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2xdx \quad \Big/ \int \\ \Rightarrow \quad & \ln|y| = x^2 + C \\ \Rightarrow \quad & y = Ce^{x^2},\ C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

2) Varijacija konstante:

$$\begin{aligned} y(x) = C(x)e^{x^2} \Rightarrow \quad & y'(x) = C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x = 2x^3 + 2xC(x)e^{x^2} \\ \Rightarrow \quad & C'(x)e^{x^2} = 2x^3 \\ \Rightarrow \quad & C(x) = \int 2x^3 e^{-x^2}dx = \begin{bmatrix} u = x^2 & v = -e^{-x^2} \\ du = 2x & dv = 2xe^{-x^2} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \quad & C(x) = \cdots = -x^2e^{-x^2} - e^{-x^2} + D,\ D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Traženo rješenje je

$$y(x) = (D - x^2e^{-x^2} - e^{-x^2})e^{x^2} = De^{x^2} - (x^2+1), \quad D \in \mathbb{R}.$$

□

4.2. Metoda integrirajućeg faktora

Općenito do rješenja linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda možemo doći i preko postupka *integrirajućeg faktora*. Jednadžbu (4.2) pomnožimo s funkcijom $\mu = \mu(x)$:

$$\begin{aligned} & \mu y' + p\mu y = \mu q \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dx}[\mu y] \underbrace{-\mu' y + p\mu y}_{=0} = \mu g \\ \Rightarrow \quad & \frac{d}{dx}[\mu y] = \mu g, \qquad \text{ako je } \mu' = p\mu. \end{aligned}$$

Time je postupak rješavanja nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe sveden na uzastopno rješavanje dviju homogenih linearnih jednadžbi.

Zadatak 4.3. *Pronađi rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y' = -\frac{\cos x}{\sin x}y + \frac{x}{\sin x}.$$

Rješenje: Linearnu diferencijalnu jednadžbu riješit ćemo postupkom integrirajućeg faktora $\mu = \mu(x)$. Množenjem s μ dobivamo

$$\begin{aligned} \mu y' &= -\frac{\cos x}{\sin x}\mu y + \frac{x}{\sin x}\mu \\ \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}[\mu y] - \mu' y &= -\frac{\cos x}{\sin x}\mu y + \frac{x}{\sin x}\mu \end{aligned}$$

Proglašavanjem

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

slijedi

$$\frac{d}{dx}[\mu y] = \frac{x}{\sin x}\mu. \tag{4.6}$$

Riješimo jednadžbu $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\cos x}{\sin x}$:

$$\begin{aligned} (\ln|\mu|)' &= \frac{\cos x}{\sin x} \quad \Big/ \int \\ \ln|\mu| &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C \\ \mu &= C\sin x, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

Uočiomo potrebna nam je samo jedna funkcija μ pa možemo staviti da je $C = 1$. Ako vratimo u (4.6) slijedi

$$\begin{aligned} & (\mu(x)y)' = \frac{x}{\sin x}\mu(x) \\ \Rightarrow \quad & (\sin(x)y)' = \frac{x}{\cancel{\sin x}}\cancel{\sin x} = x \\ \Rightarrow \quad & \sin(x)y(x) = \frac{x^2}{2} + D, \quad D \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & y(x) = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{x^2}{2} + D\right), \quad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Napomena 4.1. *Prethodna metoda je poseban dio Eulerove metode multiplikatora (vidi sljedeći Odjeljak 5). U [2] navodi se još jedan pristup koji koristi supstituciju. Ako je dana linearna diferencijalna jednadžba:*

$$y' + py = q, \tag{4.7}$$

nepoznato rješenje zamijenimo supstitucijom $y = uv$ gdje su u, v nepoznate funkcije od x. Ubacivanjem u (4.7) dobivamo

$$(uv)' + p(uv) = (u' + pu)v + uv' = q.$$

Stavimo li da je u ne-nul rješenje od $u' + pu = 0$ potrebno je još riješiti

$$uv' = q.$$

čime dolazimo do konačnog rješenja. Svim pristupima je zajedničko to da prvo pronalaze rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe.

4.3. Bernoullijeva jednadžba

Bernoullijeva jednadžba je diferencijalna jednadžba prvog reda oblika:

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)y^{\alpha}(x), x \in I \tag{4.8}$$

gdje je I otvoreni interval, $p, q : I \to \mathbb{R}$, $q(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$ i $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Slučajevi $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ nisu zanimljivi jer je tada (4.8) linearna diferencijalna jednadžba. Istaknimo da je $x \mapsto 0$ uvijek rješenje Bernoullijeve jednadžbe ako je $\alpha > 0$. Bernoullijeva jednadžba (4.8) može se riješiti supstitucijom, tj. pokazuje se korisnom supstitucija $x \mapsto y^r(x)$, $r \in \mathbb{R}$. Zaista, za $z = y^r, z = z(x)$ imamo

$$z' = ry^{r-1}y' = ry^{r-1}(qy^{\alpha} - py) = rqy^{r+\alpha-1} - rpz.$$

Stavljanjem $r = 1 - \alpha$, odnosno supstitucijom $z = y^{1-\alpha}$ (4.8) se svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda što predstavlja opći postupak traženja rješenja diferencijalne jednadžbe.

Zadatak 4.4. *Pronađite 1. integral diferencijalne jednadžbe:*

$$(3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$$

Rješenje: Prepoznajemo da se radi o Bernoullijevoj jednadžbi s $\alpha = 2$:

$$y' - \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$$

Supstitucija $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}, z = z(x)$ daje

$$z' = -y^{-2}y' = -y^{-2}(\frac{3y}{x} + \frac{y^2}{x^2}) = -\frac{3}{x}y^{-1} - \frac{1}{x^2} = -\frac{3}{x}z - \frac{1}{x^2}$$

linearnu diferencijalnu jednadžbu po z (sve dok je $y \neq 0$)

1) Rješenje homogene jednadžbe:

$$\begin{aligned} & z' = -\frac{3z}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -3\frac{dx}{x} \quad \Big/ \int \\ \Rightarrow \quad & \ln|z| = -3\ln|x| + C \\ \Rightarrow \quad & z = \frac{C}{x^3}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) Partikularno rješenje nehomogene jednadžbe:

$$\begin{aligned} & z(x) = \frac{C(x)}{x^3} \quad \Big/ ' \\ \Rightarrow \quad & z'(x) = \frac{C'(x)}{x^3} - 3\cancel{\frac{C(x)}{x^4}} = -\frac{3}{\cancel{x}}\cancel{z(x)} - \frac{1}{x^2} \\ \Rightarrow \quad & C'(x) = -x \\ \Rightarrow \quad & C(x) = -\frac{x^2}{2} + D, \quad D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Time je rješenje linearne jednadžbe

$$z = \left(-\frac{x^2}{2} + D\right)\frac{1}{x^3}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

Rješenje Bernoullijeve jednadžbe time glasi

$$y = \frac{2x^3}{D - x^2}, \quad D \in \mathbb{R}$$

s time da ne smijemo zanemariti stacionarno rješenje $x \mapsto 0$. □

4.4. Riccatijeva jednadžba

Riccatijeva diferencijalna jednadžba je oblika:

$$y' = q_0 + q_1 y + q_2 y^2, \tag{4.9}$$

gdje su $q_0, q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ zadane funkcije takve da $q_0(x) \neq 0$ i $q_2(x) \neq 0$ za svaki $x \in I$. Riccatijevu diferencijalnu jednadžbu je u pravilu teško riješiti, no pokazuje se da ako znamo jedno rješenje tada možemo konstruirati opće. Potrebno je napraviti supstituciju $y_1 + h$ gdje je y_1 poznato rješenje od (4.9). Imamo:

$$\begin{aligned}
& u' = q_0 + q_1 u + q_2 u^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (h + u_1)' = q_0 + q_1(h + u_1) + q_2(h + u_1)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & h' + \cancel{u_1'} = \cancel{q_0 + q_1 u_1 + q_2 u_1^2} + (q_1 + 2q_2 u_1)h + q_2 h^2,
\end{aligned}$$

s obzirom da je u_1 rješenje od RDJ. Time h zadovoljava Bernoullijevu diferencijalnu jednadžbu:

$$h' = (q_1 + 2q_2 u_1)h + q_2 h^2.$$

Zadatak 4.5. *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe $u' = \frac{1}{x^2} - 2u^2$ ako znamo da je $x \mapsto \frac{1}{x}$ jedno partikularno rješenje.*

Rješenje:

Rješenje Riccatijeve tražimo u obliku $h + u_1$:

$$\begin{aligned}
& (h + u_1)' = \frac{1}{x^2} - 2(h + u_1)^2 \\
& h' - \cancel{\frac{1}{x^2}} = \cancel{\frac{1}{x^2}} - 2h^2 - \frac{4}{x}h - \cancel{\frac{2}{x^2}} \\
& h' = -2h^2 - \frac{4}{x}h, \quad z = \frac{1}{h} \\
& z' = \frac{-h'}{h^2} = 2 + \frac{4}{x}z
\end{aligned}$$

Prvo pronađimo homogeno rješenje

$$\begin{aligned}
& \frac{dz}{z} = \frac{4dx}{x} \quad \Big/ \int \\
\Rightarrow \quad & z(x) = Cx^4
\end{aligned}$$

Opće rješenje tražimo tako da variramo konstantu $z = C(x)x^4$:

$$\begin{aligned}
& z = C(x)x^4 \quad \Big/' \\
& z' = C'(x)x^4 + 4C(x)x^3 = 2 + \frac{4}{x}C(x)x^4 \\
\Rightarrow \quad & C'(x) = \frac{2}{x^4} \Rightarrow C(x) = -\frac{2}{3}\frac{1}{x^3} + D \\
\Rightarrow \quad & z = Dx^4 - \frac{2}{3}x, \quad D \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Time smo dobili $h = \frac{1}{z} = \frac{1}{Dx^4 - \frac{2}{3}x}$ čime je opće rješenje Riccatijeve jednadžbe:

$$u = h + u_1 = \frac{1}{Dx^4 - \frac{2}{3}x} + \frac{1}{x}, \quad D \in \mathbb{R}.$$

□

4.5. Zadaci za vježbu

Zadatak 4.6. *Pronađite opća rješenja diferencijalnih jednadžbi*

a) $y^2dx - (2xy + 2)dy = 0$

b) $y' = \frac{1}{x+y^2}$

Rješenje:

a) Prepoznajemo da se radi o linearno diferencijalnoj jednadžbi (s time da je y varijabla, a $x = x(y)$ nepoznata funkcija):

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{2}{y}x + \frac{2}{y^2}$$

Riješimo metodom integrirajućeg faktora tako da pomnožimo cijelu jednadžbu s $\mu = \mu(y)$

$$\begin{aligned} \mu x' &= \frac{2}{y}\mu x + \frac{2}{y^2}\mu \\ \Rightarrow \quad (\mu x)' - \mu' x &= \frac{2}{y}\mu x + \frac{2}{y^2}\mu \\ \Rightarrow \quad (\mu x)' &= \frac{2}{y^2}\mu \text{ uz } \mu' = -\frac{2}{y}\mu \end{aligned}$$

Pronađimo nestacionarno rješenje od $\mu' = -\frac{2}{y}\mu$ metodom separacije:

$$\begin{aligned} (\ln|\mu|)' &= -\frac{2}{y} \quad \Big/ \int dy \\ \ln|\mu| &= -2\ln|y| + C \\ \mu &= Cy^{-2}, \quad C \neq 0 \end{aligned}$$

Stavimo da je $\mu(y) = y^{-2}$. Time dobivamo

$$\begin{aligned} (y^{-2}x)' &= \frac{2}{y^2}y^{-2} = \frac{2}{y^4} \quad \Big/ \int \\ \Rightarrow \quad y^{-2}x &= -\frac{2}{3y^3} + D, \quad D \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad x &= y^2(-\frac{2}{3y^3} + D), \quad D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) Vrijedi

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = x + y^2.$$

Znači radi se o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi po x. Opće rješenje homogene jednadžbe $x' = x$ je $x(y) = Ce^y$, $C \in \mathbb{R}$. Metodom varijacije konstante

$$\begin{aligned}
& x(y) = C(y)e^y \quad \Big/ \frac{d}{dy} \\
\Rightarrow \quad & x'(y) = C'(y)e^y + C(y)e^y = C'(y)e^y + \cancel{x(y)} = \cancel{x(y)} + y^2 \\
\Rightarrow \quad & C'(y) = y^2 e^{-y} \\
\Rightarrow \quad & C(y) = \ldots = -e^{-y}(y^2 + y + 2) + D, \quad D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Time je konačno rješenje $x = De^y - (y^2 + y + 2)$, $D \in \mathbb{R}$.

□

Zadatak 4.7. *Riješite diferencijalne jednadžbe:*

a) $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

b) $y^2y' - 5y^3 = e^{-2x}$

Rješenje:

a) Dijelimo $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$ s x^2y^3.

$y = 0$ je jedno rješenje Bernoullijeve jednadžbe.

Uz supstituciju $z = \frac{1}{y^2}$ dobivamo $z' = -\frac{2}{y^3}y'$ te imamo:

$$\begin{aligned}
& \frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x}\frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^2} \\
\Rightarrow \quad & -\frac{z'}{2} + \frac{2}{x}z = \frac{1}{x^2} \\
\Rightarrow \quad & z' = \frac{4}{x}z - \frac{2}{x^2}
\end{aligned}$$

1) Homogeno rješenje:

$$\begin{aligned}
& \frac{dz}{dx} = \frac{4z}{x} \\
\Rightarrow \quad & \ln|z| = 4\ln x + \ln C, \ C > 0 \\
\Rightarrow \quad & z = Cx^4, \ C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}
\end{aligned}$$

2) Varijacija konstante:

$$\begin{aligned}
& z(x) = C(x)x^4 \\
\Rightarrow \quad & z'(x) = C(x)'x^4 + \cancel{4C(x)x^3} = \frac{4}{\cancel{x}}\cancel{z(x)} - \frac{2}{x^2} \\
\Rightarrow \quad & C' = -\frac{2}{x^6} \\
\Rightarrow \quad & C = \frac{2}{5x^5} + D, \quad D \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \quad & z = \frac{2}{5x} + Dx^4, \quad D \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{y^2} = \frac{2 + Dx^5}{5x}, \quad D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Traženo rješenje je $y^2 = \frac{5x}{2+Dx^5}$, $D \in \mathbb{R}$ s time da je $y = 0$ stacionarno rješenje.

b) Dijelimo $y^2y' - 5y^3 = e^{-2x}$ s y^2, $y \neq 0$ i dobivamo Bernoullijevu jednadžbu ($\alpha = -2$):

$$y' - 5y = \frac{e^{-2x}}{y^2}.$$

Koristimo supstituciju $z = y^{1-\alpha} = y^3$ i dobivamo: $z' = 3y^2y'$. Slijedi:

$$\frac{z'}{3} - 5z = e^{-2x} \quad \Rightarrow \quad z' - 15z = 3e^{-2x}$$

1) Homogeno rješenje:

$$\begin{aligned} & \frac{dz}{dx} = 15z \\ \Rightarrow \quad & \frac{dz}{z} = 15dx \\ \Rightarrow \quad & \ln|z| = 15x + C, \ C \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & z = Ce^{15x}, \ C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) Varijacijom konstante:

$$\begin{aligned} & z(x) = C(x)e^{15x} \\ \Rightarrow \quad & C'(x)e^{15x} + \cancel{15C(x)e^{15x}} - \cancel{15C(x)e^{15x}} = 3e^{-2x} \\ \Rightarrow \quad & C'(x) = 3e^{-17x} \\ \Rightarrow \quad & C(x) = -\frac{3}{17}e^{-17x} + D, \quad D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} & z = \Big(-\frac{3}{17}e^{-17x} + D\Big)e^{15x}, \quad D \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow z = -\frac{3}{17}e^{-2x} + De^{15x}, \quad D \in \mathbb{R} \\ & \Rightarrow y = \sqrt[3]{-\frac{3}{17}e^{-2x} + De^{15x}}, \quad D \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

□

5. Egzaktne diferencijalne forme

5.1. Egzaktne diferencijalne forme

Definicija 5.1. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje (otvoren i povezan skup) te $f = (f_1, f_2) \in C(\Omega; \mathbb{R}^2)$. Kažemo da je f gradijentno preslikavanje na Ω ako postoji $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ takav da je $\nabla F = f$. Preslikavanje F zovemo potencijal od f.*

Definicija 5.2. *Kažemo da je diferencijalna forma $f_1 dx + f_2 dy$ egzaktna na otvorenom skupu Ω ako je $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$.*

Ako je Ω 1–povezano područje i $f \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^2)$ te ako je $\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$ na Ω, onda je f gradijentno preslikavanje, tj. postoji potencijal $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$ takav da je $\nabla F = f$.

Definicija 5.3. *Kažemo da je diferencijalna forma $f_1 dx + f_2 dy$ egzaktna na području Ω ako je (f_1, f_2) gradijentno preslikavanje.*

Definicija 5.4. *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ područje, $f_1, f_2 \in C(\Omega; \mathbb{R})$, $f_2 \neq 0$ na Ω. Kažemo da je diferencijalna jednadžba $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ egzaktna ako je (f_1, f_2) gradijentno preslikavanje.*

Primjer 5.5. *Dana diferencijalna forma*

$$(3x + 2y)dx + xdy = 0.$$

nije zatvorena jer $\partial_y f_1 = 2 \neq 1 = \partial_x f_2$. No, ako pomnožimo gornju formu s x dobivamo diferencijalna formu

$$(3x^2 + 2xy)dx + x^2 dy = 0.$$

koja je egzaktna na $\mathbb{R}^2$ jer vrijedi $\partial_y f_1 = 2x = 2x = \partial_x f_2$. Pripadni potencijal je

$$F(x, y) = x^3 + x^2 y + C, \; C \in \mathbb{R},$$

što je i prvi integral diferencijalne jednadžbe (vidi Definiciju 2.1):

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0.$$

Zadatak 5.1. *Odredite prvi integral diferencijalne jednadžbe:*

$$(2x + 3x^2 y)dx + (x^3 - y^3)dy = 0.$$

Rješenje: Označimo $f_1 = 2x + 3x^2 y$, $f_2 = x^3 - y^3$.

1) Prvo provjeravamo uvjet zatvorenosti:

$$\partial_y f_1 = 3x^2 = \partial_x f_2.$$

Vidimo da je uvjet zatvorenosti zadovoljen na cijelom $\mathbb{R}^2$. To znači da postoji $F \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ takva da je $\partial_x F = f_1$ i $\partial_y F = f_2$.

2) Krenimo od relacije $\partial_x F = f_1$:

$$\begin{aligned} &\partial_x F(x, y) = f_1(x, y) \quad \Big/ \int dx \\ \Rightarrow \quad &F(x, y) = \int f_1(x, y)\, dx = \int (2x + 3x^2 y)dx = x^2 + x^3 y + \Psi(y) \end{aligned}$$

gdje za svaki čvrsti y imamo integracijsku konstantu $\Psi(y)$. Preostaje iskoristiti $\partial_y F = f_2$

$$\begin{aligned}
& \partial_y F(x,y) = \cancel{x^3} + \Psi'(y) = \cancel{x^3} - y^3 = f_2(x,y) \\
\Rightarrow\quad & \Psi'(y) = -y^3 \\
\Rightarrow\quad & \Psi(y) = -\frac{y^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
& \Rightarrow F(x,y) = x^2 + x^3 y - \frac{y^4}{4} + C, \quad C \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dakle,

$$x^2 + x^3 y - \frac{y^4}{4} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

je traženi prvi integral diferencijalne jednadžbe.

□

Zadatak 5.2. *Odredite prvi integral jednadžbe:*

$$\Big(\frac{x}{\sin y} + 2\Big)dx + \Big(\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos(2y) - 1}\Big)dy = 0.$$

Rješenje: Neka je $f_1 = \frac{x}{\sin y} + 2$ i $f_2 = \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos(2y)-1}$. Vidimo da je uvjet zatvorenosti zadovoljen:

$$\begin{aligned}
\partial_y f_1(x,y) &= -\frac{x}{\sin^2 y}\cos y, \\
\partial_x f_2(x,y) &= \frac{2x\cos y}{\cos(2y)-1} = -\frac{2x\cos y}{2\sin^2 y} = -\frac{x\cos y}{\sin^2 y}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

na cijelom $\mathbb{R}^2$. Time postoji potencijal F takav da je $\partial_x F = f_1$ i $\partial_y F = f_2$.

$$\begin{aligned}
& \partial_x F(x,y) = f_1(x,y) = \frac{x}{\sin y} + 2 \quad \Big/ \int dx \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = \frac{x^2}{2\sin y} + 2x + \Psi(y), \\
\Rightarrow\quad & \partial_y F(x,y) = -\frac{x^2}{2\sin^2 y}\cos y + \Psi'(y) = -\frac{(x^2+1)\cos y}{2\sin^2 y} = f_2(x,y) \\
\Rightarrow\quad & \Psi'(y) = -\frac{\cos y}{2\sin^2 y} \quad \Big/ \int dy \\
\Rightarrow\quad & \Psi(y) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sin y} + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = \frac{x^2+1}{2\sin y} + 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Prvi integral diferencijalne jednadžbe je

$$\frac{x^2+1}{2\sin y} + 2x + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

5.2. Eulerova metoda multiplikatora

Diferencijalna forma

$$f_1(x,y)dx + f_2(x,y)dy = 0 \tag{5.2}$$

ne mora nužno biti egzaktna. Ideja iza *Eulerove metode multiplikatora* ili *općeg integrirajućeg faktora* smo ranije upoznali u prethodnom Odjeljku 4 kao jedan od pristupa rješavanja linearne diferencijalne jednadžbe. Cilj *Eulerove metode multiplikatora* je pronaći nepoznatu funkciju $\mu = \mu(x,y)$ koja pomnožena s (5.2)

$$\mu f_1 dx + \mu f_2 dy = 0. \tag{5.3}$$

daje egzaktnu formu. Ako je (5.3) egzaktna tada uvjet zatvorenosti povlači:

$$\begin{aligned} & \partial_y(\mu f_1) = \partial_x(\mu f_2) \\ \Leftrightarrow\quad & \partial_y \mu f_1 + \mu \partial_y f_1 = \partial_x \mu f_2 + \mu \partial_x f_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \mu(\partial_y f_1 - \partial_x f_2) = f_2 \partial_x \mu - f_1 \partial_y \mu \end{aligned}$$

Time dolazimo do

$$f_2 \partial_x \mu - f_1 \partial_y \mu = \mu(\partial_y f_1 - \partial_x f_2) \tag{5.4}$$

netrivijalne linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Standardno je pretpostaviti da je μ funkcija po varijabli x ili y. Također može biti i funkcija raznih izraza s x i y poput

$$xy,\ \frac{x}{y},\ \frac{y}{x},\ x^2 + y^2.$$

Pretpostavljamo da je $\mu = \mu(v)$, gdje je $v = v(x,y)$ zadano preslikavanje. Time iz (5.4) slijedi:

$$f_2 \frac{d\mu}{dv}\frac{dv}{dx} - f_1 \frac{d\mu}{dv}\frac{dv}{dy} = \mu(\partial_y f_1 - \partial_x f_2)$$

čime dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = \frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{f_2 \partial_x v - f_1 \partial_y v}. \tag{5.5}$$

U slučaju da se desna strana može zapisati kao funkcija o v

$$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{f_2 \partial_x v - f_1 \partial_y v} = g(v)$$

rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = g(v)$$

daje nepoznatu funkciju $\mu = \mu(v)$. Za neke specijalne slučajeve možemo zapisati desnu stranu jednadžbe (vidi Tablicu 2.1).

Zadatak 5.3. *Pronađite rješenje početne zadaće*

$$(y + x(x^2 + y^2)) + (-x)\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(2) = 1.$$

Rješenje: Označimo $f_1(x,y) = y + x(x^2+y^2)$ i $f_2(x,y) = -x$. Provjerimo uvjet zatvorenosti

$$\partial_y f_1(x,y) - \partial_x f_2(x,y) = 1 + 2xy - (-1) = 2(1+xy) \neq 0.$$

Koristimo Eulerov multiplikator $\mu = \mu(v)$ za $v = x^2 + y^2$. Time je

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} &= \frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{f_2 \partial x v - f_1 \partial y v} = \frac{2xy+2}{-x(2x) - (y + x(x^2+y^2))(2y)} \\ &= \frac{\cancel{2xy+2}}{-(x^2+y^2)\cancel{(2xy+2)}} = -\frac{1}{v}\end{aligned}$$

Dana diferencijalna jednadžba $\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = -\frac{1}{v}$ ima opće rješenje oblika $\mu(v) = \frac{C}{v}, C \neq 0$. Traženi Eulerov multiplikator za $C = 1$ je $\mu(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$. Dana diferencijalna forma

$$\underbrace{\left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)}_{:=\tilde{f}_1(x,y)} dx + \underbrace{\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)}_{:=\tilde{f}_2(x,y)} dy = 0.$$

je zatvorena na $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. S obzirom da je poznat početni uvjet, možemo se ograničiti na traženje potencijala na 1-povezanom području $\langle 0,\infty\rangle \times \langle 0,\infty\rangle$. Dakle postoji funkcija $F \in C^1(\langle 0,\infty\rangle \times \langle 0,\infty\rangle\,;\mathbb{R})$ takva da je $\partial_x F = \tilde{f}_1$ i $\partial_y F = \tilde{f}_2$.

$$\begin{aligned}
& \partial_y F(x,y) = \tilde{f}_2(x,y) \quad \Big/ \int dy \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = \int -\frac{x}{x^2+y^2} dy \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \Phi(x) \\
\Rightarrow\quad & \partial_x F(x,y) = \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + \Phi'(x) = \cancel{\frac{y}{x^2+y^2}} + x = \tilde{f}_1(x,y) \\
\Rightarrow\quad & \Phi'(x) = x \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Time je traženi potencijal $F(x,y) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}x^2 + C$. Traženo rješenje početne zadaće je $F(x,y) = F(2,1)$, odnosno

$$-\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}x^2 = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + 2.$$

□

Istaknimo da smo ustvari pronašli potencijal $F \in C^1(\langle 0,\infty\rangle \times \mathbb{R})$, čime znamo opće rješenje diferencijalne jednadžbe za $x > 0$. Pokažite da potencijal možete definirati na skupu $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha t, \beta t) : t > 0,\}$ za fiksne $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takve da je $\alpha^2 + \beta^2 > 0$, ali da ne postoji na cijelom $\mathbb{R}^2$.

Zadatak 5.4. *Riješite:*

$$(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0.$$

$v = v(x,y)$	$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv}$
x	$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{f_2}$
y	$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{-f_1}$
xy	$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{yf_2 - xf_1}$
$\frac{x}{y}$	$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{\frac{f_2}{y} + \frac{x}{y^2} f_1}$
$x^2 + y^2$	$\frac{\partial_y f_1 - \partial_x f_2}{2xf_2 - 2yf_1}$

Tablica 2.1: Specijalni slučajevi desne strane jednadžbe (5.5).

Rješenje: Neka je $f_1 = x^2 + y^2 + x$ te $f_2 = y$. Forma nije zatvorena jer je $\partial_y f_1 - \partial_x f_2 = 2y$. Tražimo Eulerov multiplikator $\mu = \mu(v)$ uz $v = x$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = \frac{2y}{y \cdot \partial_x v - (x^2 + y^2 + x)\partial_y v} \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dv} = \frac{2y}{y} = 2 \\ \Rightarrow \quad & \mu = Ce^{2v} \quad \Rightarrow \quad \mu(x) = Ce^{2x}, \quad C \neq 0. \end{aligned}$$

Eulerov multiplikator je $\mu(x,y) = e^{2x}$. Sada imamo:

$$e^{2x}(x^2 + y^2 + x)dx + e^{2x}ydy = 0,$$

je egzaktna diferencijalna jednadžba ($\tilde{f}_1 = e^{2x}(x^2 + y^2 + x)$, $\tilde{f}_2 = e^{2x}y$) na $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & \partial_y F = \tilde{f}_2 \quad \Big/ \int dy \\ \Rightarrow \quad & F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \varphi(x), \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} & \partial_x F(x,y) = \cancel{e^{2x}y^2} + \varphi'(x) = e^{2x}x^2 + \cancel{e^{2x}y^2} + e^{2x}x = \tilde{f}_1 \\ \Rightarrow \quad & \varphi'(x) = e^{2x}x^2 + e^{2x}x \\ \Rightarrow \quad & \varphi(x) = \frac{x^2}{2}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

Napokon, dobivamo potencijal (prvi integral diferencijalne jednadžbe)

$$F(x,y) = \frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \frac{x^2}{2}e^{2x} + C, \tag{5.6}$$

čime je opće rješenje dano s

$$\frac{1}{2}e^{2x}y^2 + \frac{x^2}{2}e^{2x} + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Napomena 5.6. *Ako nije eksplicitno navedeno da se može riješiti metodom Eulerovih multiplikatora obično je brže prepoznati tip diferencijalne jednadžbe i preko metoda iz prethodnih odjeljaka pronaći rješenje. Uočimo da diferencijalnu jednadžbu iz Zadatka 5.4 možemo zapisati kao Bernoullijevu jednadžbu ($\alpha = -1$)*

$$y' = -y - (x^2 + x)\frac{1}{y}$$

što znači da se supstitucijom $z = y^{1-\alpha} = y^2$ svede na linearnu diferencijalnu jednadžbu.

Dodatno, Eulerov multiplikator može biti poznat do na nepoznate parametre kao na primjer $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ te od Tablice 2.1 nemamo koristi u pronalasku specifičnih α i β za koje je forma egzaktna (vidi Zadatak 5.5).

5.3. Zadaci za vježbu

Zadatak 5.5. *Pronađi 1. integral diferencijalne jednadžbe ako je Eulerov multiplikator oblika $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$*

a) $(3y + 3y^3)dx + (xy^2 - x)dy = 0,$

b) $(6 + 12x^2y^2)dx + (7x^3y + \frac{x}{y})dy = 0,$

c) $(2y^3)dx + (4x^3y^3 - 3xy^2)dy = 0.$

Rješenje:

a) Množenjem s $x^\alpha y^\beta$ dobivamo zatvorenu formu

$$\underbrace{x^\alpha y^\beta(3y + 3y^3)}_{f_1(x,y)}\,dx + \underbrace{x^\alpha y^\beta(xy^2 - x)}_{f_2(x,y)}\,dy = 0,$$

te je cilj pronaći α, β takve da je

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_y f_1(x, y) - \partial_x f_2(x, y) \\
&= \partial_y(x^\alpha y^\beta(3y + 3y^3)) - \partial_x(x^\alpha y^\beta(xy^2 - x)) \\
&= 3(\beta + 1)x^\alpha y^\beta + 3(\beta + 3)x^\alpha y^{\beta+2} - (\alpha + 1)x^\alpha y^\beta(y^2 - 1) \\
&= [3\beta + \alpha + 4]x^\alpha y^\beta + [3\beta - \alpha + 8]x^\alpha y^{\beta+2}
\end{aligned}$$

Polinom je jednak nuli ako su svi koeficijenti jednaki nuli. Time dobivamo sustav

$$\begin{aligned}
\alpha + 3\beta &= -4 \\
-\alpha + 3\beta &= -8
\end{aligned}$$

čime je $\alpha = 2, \beta = -2$. Time smo dobili zatvorenu diferencijalnu formu na $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$.

$$x^2\left(\frac{3}{y} + 3y\right)dx + \left(x^3 - \frac{x^3}{y^2}\right)dy = 0.$$

Potencijal ima smisla tražiti za $y > 0$ ili $y < 0$:

$$\begin{aligned}
& \partial_x F(x,y) = x^2\left(\frac{3}{y}+3y\right) \quad \Big/ \int dx \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = \int x^2\left(\frac{3}{y}+3y\right)dx = x^3\left(\frac{1}{y}+y\right)+\Psi(y) \\
\Rightarrow\quad & \partial_y F(x,y) = \cancel{x^3(-\frac{1}{y^2}+1)} + \Psi'(y) = \cancel{\left(x^3-\frac{x^3}{y^2}\right)} = f_2(x,y) \\
\Rightarrow\quad & \Psi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(y) = C, \quad C\in\mathbb{R} \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = x^3\left(\frac{1}{y}+y\right)+C.
\end{aligned}$$

Traženo opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$x^3\left(\frac{1}{y}+y\right)+C=0, \quad C\in\mathbb{R}.$$

b)

$$x^\alpha y^\beta(6+12x^2y^2)dx + x^\alpha y^\beta(7x^3y+\frac{x}{y})dy = 0$$

je zatvorena ako

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_y(x^\alpha y^\beta(6+12x^2y^2)) - \partial_x(x^\alpha y^\beta(7x^3y+\frac{x}{y})) \\
&= 6\beta x^\alpha y^{\beta-1} + 12(\beta+2)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - 7(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+1} - (\alpha+1)x^\alpha y^{\beta-1} \\
&= [6\beta-\alpha-1]x^\alpha y^{\beta-1} + [12\beta-7\alpha+3]x^{\alpha+2}y^{\beta+1}
\end{aligned}$$

Rješenje sustava

$$\begin{aligned}
6\beta-\alpha &= 1 \\
12\beta-7\alpha &= -3
\end{aligned}$$

je $\alpha=1, \beta=\frac{1}{3}$. Eulerov multiplikator je $\mu(x,y)=x\sqrt[3]{y}$. Time dolazimo do zatvorene forme na $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, y\neq 0\}$

$$\underbrace{(6xy^{1/3}+12x^3y^{7/3})}_{f_1(x,y)}dx + \underbrace{(7x^4y^{4/3}+x^2y^{-2/3})}_{f_2(x,y)}dy = 0$$

Tražimo potencijal F na 1-povezanom području koje ne sadrži $y=0$ takvo da je $\partial_x F = f_1$ i $\partial_y F = f_2$.

$$\begin{aligned}
& \partial_x F(x,y) = f_1(x,y) \quad \Big/ \int dx \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = \int(6xy^{1/3}+12x^3y^{7/3})dx = 3x^2y^{1/3}+3x^4y^{7/3}+\Psi(y) \\
\Rightarrow\quad & \partial_y F(x,y) = \cancel{x^2y^{-2/3}} + \cancel{7x^4y^{4/3}} + \Psi'(y) = \cancel{7x^4y^{4/3}} + \cancel{x^2y^{-2/3}} = f_2(x,y) \\
\Rightarrow\quad & \Psi'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Psi(y) = C \\
\Rightarrow\quad & F(x,y) = 3x^2y^{1/3}+3x^4y^{7/3}+C, \quad C\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$3x^2y^{1/3}+3x^4y^{7/3}+C=0, \quad C\in\mathbb{R}.$$

c) Ako je

$$x^\alpha y^\beta (2y^3)dx + x^\alpha y^\beta (4x^3y^3 - 3xy^2)dy = 0$$

zatvorena forma tada

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_y(x^\alpha y^\beta (2y^3)) - \partial_x(x^\alpha y^\beta (4x^3y^3 - 3xy^2)) \\ &= 2(\beta+3)x^\alpha y^{\beta+2} - 4(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+3} + 3(\alpha+1)x^\alpha y^{\beta+2} \\ &= [-4(\alpha+3)]x^{\alpha+2}y^{\beta+3} + [3\alpha+2\beta+9]x^\alpha y^{\beta+2} \end{aligned}$$

čime slijedi da je $\alpha = -3, \beta = 0$. Pripadni Eulerov multiplikator je $\mu(x,y) = x^{-3}$. Definiramo $f_1(x,y) = 2x^{-3}y^3$, $f_2(x,y) = 4y^3 - 3x^{-2}y^2$. Tražimo potencijal F na 1-povezanom području koje ne sadrži $x = 0$.

$$\begin{aligned} & \partial_x F(x,y) = f_1(x,y) \quad \Big/ \int dx \\ \Rightarrow \quad & F(x,y) = \int 2x^{-3}y^3\,dx = -x^{-2}y^3 + \Psi(y) \\ \Rightarrow \quad & \partial_y F(x,y) = \cancel{-3x^{-2}y^2} + \Psi'(y) = 4y^3 \cancel{-3x^{-2}y^2} = f_2(x,y) \\ \Rightarrow \quad & \Psi'(y) = 4y^3 \quad \Rightarrow \quad \Psi(y) = y^4 + C \\ \Rightarrow \quad & F(x,y) = -x^{-2}y^3 + y^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Traženo rješenje je

$$-x^{-2}y^3 + y^4 + C = 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 5.6. *Riješite prethodni Zadatak 5.5 pod a) bez korištenja Eulerovih multiplikatora.*

6. Snižavanje reda diferencijalne jednadžbe

Nelinearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{6.1}$$

nije lagano riješiti. Ovisno o obliku nelinearne jednadžbe drugog reda postoji nekoliko pristupa kojima možemo pojednostaviti problem na diferencijalnu jednadžbu prvog reda.

6.1. Jednadžba bez nepoznate funkcije

Ako jednadžba ne sadrži eksplicitno y, tj. jednadžba je oblika

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{6.2}$$

tada uvodimo supstituciju $y' = p$ te rješavamo $F(x, p, p') = 0$.

Zadatak 6.1. *Pronađite rješenje diferencijalne jednadžbe:*

$$x^2y'' = (y')^2.$$

Rješenje: Uz supstituciju $p = y'$ dobivamo separabilnu diferencijalnu jednadžbu

$$x^2 p' = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p^2} = \frac{dx}{x^2} \quad \Big/ \int$$

Primijetimo da je $p^2 = 0 \iff p = 0 \iff y' = 0 \iff y = C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}$ stacionarno rješenje diferencijalne jednadžbe. Metodom separacije varijabli

$$\begin{aligned} & \int \frac{dp}{p^2} = \int \frac{dx}{x^2} \\ \Rightarrow \quad & -\frac{1}{p} = -\frac{1}{x} + C \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{p} = \frac{1}{x} + C \\ \Rightarrow \quad & \frac{1}{p} = \frac{1 + Cx}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1) $C = 0 \quad \Rightarrow \quad p = x \quad \Rightarrow \quad y' = x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$

2) $C \neq 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{x}{Cx+1} = \frac{1}{C}\frac{x+\frac{1}{C}-\frac{1}{C}}{x+\frac{1}{C}} = \frac{1}{C} - \frac{1}{C^2}\frac{C}{Cx+1}$ Nakon integriranja dobivamo rješenje:

$$y = \frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_2, \quad C, C_2 \in \mathbb{R}, C \neq 0.$$

Sva moguća rješenja su:

- $y = C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R},$
- $y = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R},$
- $y = \frac{1}{C}x - \frac{1}{C^2}\ln|Cx+1| + C_2, \quad C, C_2 \in \mathbb{R}, C \neq 0.$

□

Zadatak 6.2. *Odredite rješenje početne zadaće*

$$xy'' = y' + x((y')^2 + x^2), \quad y(\sqrt{2}) = 0,\ y'(\sqrt{2}) = 0.$$

Rješenje: Koristimo supstituciju $u = y'$ i dobivamo:

$$xu' = u + x(u^2 + x^2) \quad \iff \quad (\underbrace{u + x(u^2 + x^2)}_{f_1})dx + (\underbrace{-x}_{f_2})du = 0.$$

Tražimo Eulerov multiplikator $\mu = \mu(x, u)$ takav da je diferencijalna forma

$$\mu f_1 dx + \mu f_2 du$$

egzaktna. Stavimo $\mu = \mu(v)$, $v = x^2 + u^2$:

$$\begin{aligned} & \frac{\mu'(v)}{\mu(v)} = -\frac{1}{x^2 + u^2} = -\frac{1}{v} \\ \Rightarrow \quad & \mu(v) = \frac{C}{v} \\ \Rightarrow \quad & \mu(v) = \frac{1}{v}, \end{aligned}$$

dakle $\mu(x,u) = \frac{1}{x^2+u^2}$ je traženi Eulerov multiplikator. Dobivamo zatvorenu formu

$$\underbrace{\left(\frac{u}{x^2+u^2} + x\right)}_{\tilde{f}_1} dx + \underbrace{\left(-\frac{x}{x^2+u^2}\right)}_{\tilde{f}_2} du = 0.$$

Tražimo F takav da vrijedi $\partial_x F = \tilde{f}_1$ te $\partial_u F = \tilde{f}_2$.

$$\begin{aligned}
&\partial_u F(x,u) = -\frac{x}{x^2+u^2} \quad \Big/ \int du \quad \Rightarrow \quad F(x,u) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{x}\right) + \Phi(x) \\
\Rightarrow \quad &\partial_x F(x,u) = \cancel{\frac{u}{x^2+u^2}} + \Phi'(x) = \cancel{\frac{u}{x^2+u^2}} + x = \tilde{f}_1 \\
\Rightarrow \quad &\Phi'(x) = x \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

čime je 1. integral diferencijalne jednadžbe:

$$F(x,u) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{x}\right) + \frac{x^2}{2} + C = 0.$$

Izrazimo eksplicitno $u \equiv u(x)$:

$$\begin{aligned}
&\frac{u}{x} = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\
\Rightarrow \quad &u = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\
\Rightarrow \quad &y' = x \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2} + C\right) \\
\Rightarrow \quad &y = -\ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2} + C\right)\right| + D, \quad C, D \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vidimo da $y'(\sqrt{2}) = 0$ povlači da je $C = -1$ te ubacivanjem u posljednju jednadžbu slijedi da je $D = 0$. Traženo rješenje početne zadaće je

$$y = -\ln(\cos(x^2/2 - 1).$$

□

6.2. Autonomne jednadžbe drugog reda

Neka se u jednadžbi (6.1) ne pojavljuje eksplicitno nezavisna varijabla x, tj.

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{6.3}$$

Pripadnu jednadžbu zovemo autonomnom diferencijalnom jednadžbom drugog reda. Pretpostavljamo da je $y' = p(y)$, gdje je p nepoznata funkcija.

$$\begin{aligned}
y' = p(y) \quad \Big/' \quad &\Rightarrow \quad y'' = p'(y)y' = p'(y)p \\
&\Rightarrow \quad p'(y)p = f(y,p)
\end{aligned}$$

što daje diferencijalnu jednadžba 1. reda po p: $F(y, p, p') = 0$.

Zadatak 6.3. *Odredite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:*

$$yy'' + 1 = (y')^2.$$

Rješenje: Stavimo supstituciju $y' = p(y)$, čime je $y'' = p'p$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad yp'p + 1 = p^2 \\
&\Rightarrow \quad \frac{pdp}{p^2-1} = \frac{dy}{y} \quad \Big/^{\int} \qquad \text{za } p \neq \pm 1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln|p^2-1| = \ln|y| + C \\
&\Rightarrow \quad p^2 - 1 = Cy^2, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\
&\Rightarrow \quad p = \pm\sqrt{Cy^2+1} \\
&\Rightarrow \quad y' = \pm\sqrt{Cy^2+1} \Rightarrow \qquad \int \frac{dy}{\sqrt{Cy^2+1}} = \pm \int dx
\end{aligned}$$

Ovisno o predznaku od C imamo dva tipa rješenja:

$$\begin{aligned}
C > 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{C}}\mathrm{sh}^{-1}(\sqrt{y}) = \pm x + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R} \\
C < 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{-C}}\sin^{-1}(\sqrt{-C}y) = \pm x + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Ne zaboravimo stacionarna rješenja od ranije, dakle $y' = \pm 1$ čime je $y = \pm x + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}$. $\square$

7. Primjena diferencijalnih jednadžbi

Obične diferencijalne jednadžbe javljaju se u mnogim kontekstima matematike, društvenih i prirodnih znanosti. Pritom diferencijalne jednadžbe modeliraju dinamičke promjenjive fenomene, evoluciju i varijaciju.

Newtonov zakon hlađenja tijela (fizika)
Neka je $T(t)$ temperatura tijela uronjenog u neki medij temperature A. Imamo sljedeći zakon ponašanja:

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),\ k > 0. \tag{7.1}$$

Promjena temperature tijela proporcionalna je razlici temperature tijela i okoline.

Zadatak 7.1. *Pile stavimo u pećnicu temperature* $170^\circ C$. *Nakon* 16 *min pile ima temperaturu* $60^\circ C$. *Odredite trenutak kada će temperatura pileta biti* $100^\circ C$ *ako je početna temperatura bila* $20^\circ C$.

Rješenje: Uzimamo da je temperatura pećnice konstantna, $A = 170$. Poznato je $T(16) = 60$, $T(0) = 20$. Tražimo t_0 tako da $T(t_0) = 100$. Zapišimo početnu zadaću koristeći model (7.1):

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(A - T), \\ T(0) = 20. \end{cases}$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} &\frac{dT}{dt} = k(A - t)\ /:(A - T) \Rightarrow \frac{dT}{A - T} = kdt\ / \int \\ &\Rightarrow \int \frac{dT}{A - T} = \int kdt \Rightarrow -\ln(A - T) = kt + C,\ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow A - T = e^{-kt - C} = C_0 e^{-kt},\ C_0 > 0, \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je $T(t) = A - C_0 e^{-kt}$ traženo rješenje diferencijalne jednadžbe.

Odredimo C_0 i k iz uvjeta:

$$\begin{aligned} &T(0) = 20 = 170 - C_0 e^{-k \cdot 0} \Rightarrow C_0 = 170 - 20 = 150, \\ &T(16) = 60 = 170 - 150 e^{-16k}. \end{aligned}$$

Sada imamo:

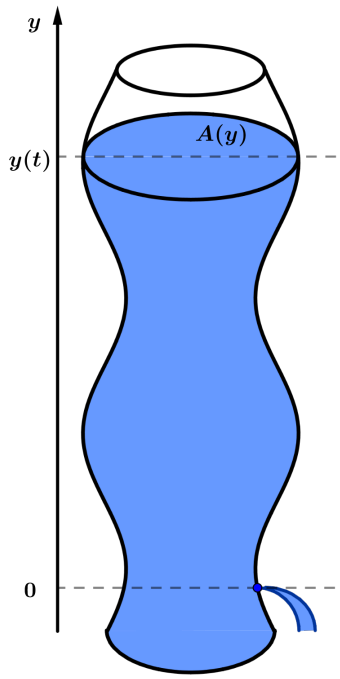
$$e^{-16k} = \frac{110}{150}\ / \ln \Rightarrow -16k = -\ln \frac{15}{11} \Rightarrow k = \frac{1}{16} \ln \frac{15}{11}.$$

Dalje računamo:

$$\begin{aligned} &T(t_0) = 100 \Leftrightarrow 100 = 170 - 150 e^{-\frac{1}{16} \ln \frac{15}{11} \cdot t_0} \\ &e^{-\frac{1}{16} \ln \frac{15}{11} \cdot t_0} = \frac{70}{150}\ / \ln \Leftrightarrow -\frac{1}{16} \ln \frac{15}{11} \cdot t_0 = -\ln \frac{15}{7} \Rightarrow t_0 = \frac{\ln \frac{15}{7}}{\ln \frac{15}{11}} \cdot 16 \approx 39.32. \end{aligned}$$

Nakon 39 minuta i 19 sekundi pećnica će biti zagrijana na 100° C □

Toricellijev zakon (fizika)
Neka je a površina otvora (male dimenzije) na visini 0, $v(t)$ brzina istjecanja tekućine (fluida) u trenutku t, $V(t)$ volumen tekućine u trenutku t, $A(y)$ površina poprečnog presjeka na visini y te $y(t)$ visina u trenutku t.
Brzina istjecanja tekućine dolazi iz Bernoullijevog principa i jednaka je $v \equiv \sqrt{2gy}$, gdje je g ubrzanje sile teže, a y je visina tekućine.



Slika 14: Posuda s fluidom

Vrijedi Toricellijev zakon:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dt} = A(y) \cdot \frac{dy}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy} = -k\sqrt{y},\ k = a\sqrt{2g},$$

čime dobivamo

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}. \tag{7.2}$$

Zadatak 7.2. *Klasični negativac iz špijunskih filmova izgradio je u tajnosti antenu u obliku polusfere radijusa* $305m$. *Na samom dnu antene nalazi se otvor površine* $1m^2$. *Izračunajte koliko vremena treba čekati do funkcionalnosti antene ako je bila do vrha ispunjena vodom radi tajnosti projekta. Antena funkcionira kada nema vode u polusferi.*

Rješenje: Vrijedi sljedeća početna zadaća:

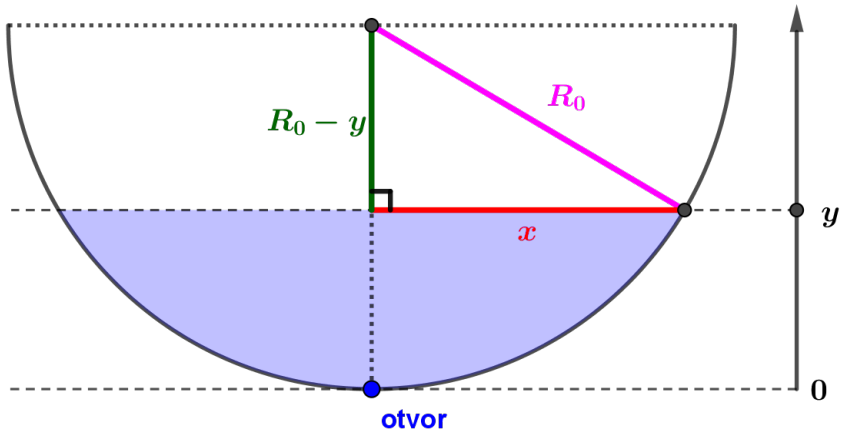
$$\begin{cases} A(y)\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}, \\ y(0) = R_0 = 305 \text{ m}. \end{cases}$$

Ovdje je $k = a\sqrt{2g} = \sqrt{2g}$, $g = 9.81\frac{m}{s^2}$, $a = 1m^2$ (otvor na dnu).

Tražimo T takav da je $y(T) = 0$.
Površina na visini y je dana sa $A(y) = x^2\pi = (R_0^2 - (R_0 - y)^2)\pi = \pi y(2R_0 - y)$.

Imamo diferencijalnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} &A(y)y' = -\sqrt{2g}\sqrt{y} \Leftrightarrow \pi y(2R_0 - y)y' = -\sqrt{2g}\sqrt{y}\ /:\sqrt{y}\pi \\ &\Rightarrow \sqrt{y}(2R_0 - y)dy = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi}dt\ /\int \\ &\Rightarrow \frac{4}{3}R_0 y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = -\frac{\sqrt{2g}}{\pi}t + C. \end{aligned}$$



Slika 15: Stanje u trenutku t

Uzmemo li u obzir početni uvjet $y(0) = R_0$, dobivamo:

$$C = \frac{4}{3}R_0^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{5}R_0^{\frac{5}{2}} = \frac{14}{15}R_0^{\frac{5}{2}}.$$

Napokon, imamo:

$$y(T) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2g}}{\pi}T + C = 0 \Leftrightarrow T = \frac{14}{15}\frac{\pi R_0^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{2g}}.$$

□

Zadatak 7.3. *Posuda s vodom ima oblik dobiven rotacijom krivulje $y = x^{4/3}$ oko y-osi. Otvor na dnu je otvoren točno u podne kada je dubina vode bila 2 m. Ako je u 13:00 dubina vode bila 1 m odredite kada će se posuda isprazniti.*

Rješenje: Označimo s y visinu fluida. Oblik posude je dobiven rotacijom krivulje $y = x^{4/3}$ oko y-osi što znači da je na visini y površina poprečnog presjeka $A(y) = \pi x(y)^2 = \pi(x^{3/4})^2 = \pi x^{3/2}$. Prema Toricellijevom zakonu (7.2):

$$\begin{aligned} & A(y)y' = -k\sqrt{y} \\ \Rightarrow\ & \pi y^{3/2}y' = -k\sqrt{y} \\ \Rightarrow\ & yy' = -C, \quad C > 0 \Rightarrow \qquad \frac{y^2}{2} = -Ct + D, \quad C > 0, D \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dani su uvjeti $y(0) = 2, y(1) = 1$, što znači da je $y^2 = -3t + 4$, tj. $y = \sqrt{-3t+4}$. Traženi trenutak T takav da je $y(T) = 0$ je $T = 4/3$. Posuda će se isprazniti u 13:20. □

Širenje informacija (društvene znanosti)

Zadatak 7.4. *Širenje informacije među fiksnom populacijom veličine N proporcionalno je broju ljudi koji nisu čuli informaciju. Ako pretpostavimo da je na početku P ljudi znalo za informaciju, napišite diferencijalnu zadaću. Nakon dugo vremena koliko će ljudi znati informaciju?*

Rješenje: Označimo sa S broj ljudi koji znaju informaciju, a t vrijeme. Imamo sljedeću početnu zadaću:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = k(N-S), \\ S(0) = P. \end{cases}$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned} &\frac{dS}{N-S} = kdt \ / \int \Rightarrow \int \frac{1}{N-S} dS = k \int dt \\ &\Rightarrow -\ln|N-S| = kt + C, \ C \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow N - S = Ce^{-kt}, \ C \neq 0 \end{aligned}$$

Sada iz $S(0) = P$ dobivamo $N - P = C$ te $C = N - P$ pa imamo:

$$S = N + (P - N)e^{-kt}.$$

Vrijedi $\lim_{t\to\infty} S = N$, što znači da će nakon dugo vremena svi znati informaciju. □

Otopine (kemija)

Zadatak 7.5. *Bazen kapaciteta* 180 *litara ispunjen je do vrha čistom vodom. Morska voda, koja sadrži* 36 *grama soli po litri, ulazi u bazen brzinom od* $2l/min$*, gdje se miješa s vodom u bazenu. Savršena (homogena) otopina izlazi brzinom od* $3l/min$*. Odredite količinu soli koja se nalazi u bazenu nakon* 20 *minuta.*

Rješenje: Označimo sa $X = X(t)$ količinu soli u trenutku t u gramima.

Prinos soli iz morske soli je konstantan i iznosi $36 \cdot 2g/min$. Otopina je savršena otopina, sol je odmah ravnomjerno raspoređena po bazenu pa je gubitak vode i soli proporcionalan, tj. $\frac{dV(t)}{V(t)} = \frac{dX(t)}{X(t)}$, čime je gubitak soli uslijed izlijevanja tekućine jednak:

$$dX(t) = \frac{X(t)}{V(t)} dV(t) = -3\frac{X(t)}{V(t)}.$$

Promjena volumena otopine jednaka je $V(t) = 180 - t$. Dobivamo Cauchyjevu zadaću:

$$\begin{cases} X'(t) = 72 - \frac{3X(t)}{180-t} \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

1) Homogena jednadžba:

$$\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} = -3\frac{X}{180-t} \Rightarrow \frac{dX}{X} = -3\frac{dt}{180-t} \ / \int \\ &\Rightarrow \ln|x| = 3\ln|t-180| \Rightarrow x = C(t-180)^3, \ C \neq 0. \end{aligned}$$

2) Varijacija konstante:

$$\begin{aligned} &C'(t)(t-180)^3 + 3C(t-180)^2 = 72 + 3C(t-180)^2 \\ &\Rightarrow C' = \frac{72}{(t-180)^3} \\ &\Rightarrow C = -36\frac{1}{(t-180)^2} + C_1, \ C_1 \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow X = -36(t-180) + C_1(t-180)^3 \end{aligned}$$

Sada iz $X(0) = 0$ dobivamo $C_1 = \frac{1}{900}$, pa slijedi:

$$X(t) = \frac{1}{900}(t-180)^3 - 36(t-180),$$

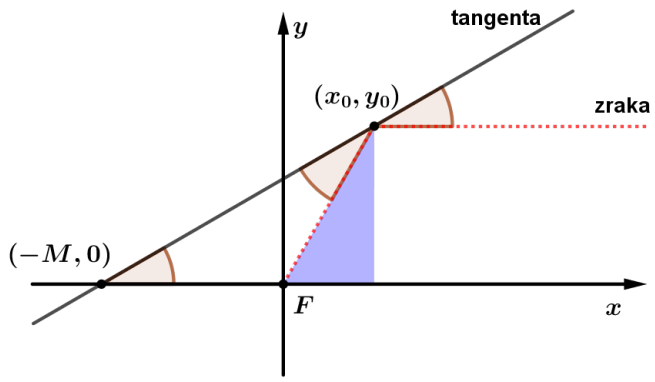
te dobivamo $x(20) \approx 1209$.

□

Optika (fizika)

Zadatak 7.6. *Odredite oblik zrcala koji paralelne zrake reflektira u jednu točku.*

Rješenje:



Slika 16: Skica Zadatka 7.6

Prema Pitagorinom poučku za osjenčani pravokutni trokut (vidi Sliku 16) vrijedi

$$M^2 = x_0^2 + y_0^2 \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{x_0^2 + y_0^2},\ M > 0.$$

Tangenta $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ prolazi kroz točku $(-M, 0)$ čime vrijedi identitet za proizvoljnu točku krivulje (x_0, y_0):

$$0 = y'(x_0)(-M - x_0) + y_0 \quad \Rightarrow \quad y'(x_0) = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

što daje diferencijalnu jednadžbu krivulje:

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Dana jednadžba je homogena (samo za pozitivne skalare!) što upućuje da je dobra supstitucija $z = \frac{y}{x}$, $z = z(x)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad z + xz' = y' &= \frac{u}{1 + \sqrt{1 + u^2}} \\
xz' &= \frac{-u\sqrt{1+z^2}}{1 + \sqrt{1+z^2}} \\
\frac{(1 + \sqrt{1+z^2})dz}{z\sqrt{1+z^2}} &= -\frac{dx}{x} \quad \Big/ \int \\
\int \frac{(1 + \sqrt{1+z^2})}{z\sqrt{1+z^2}} dz &= -\frac{dx}{x}
\end{aligned}$$

čime smo dobili:

$$\int \frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}dz + \int \frac{1}{z}dz = -\frac{dx}{x} \tag{7.3}$$

Pomoćni račun prvog integrala daje

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{z\sqrt{1+z^2}}dz &= \begin{bmatrix} u = \sqrt{z^2+1} \\ du = \frac{zdz}{\sqrt{z^2+1}} \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}+1} + C
\end{aligned}$$

Iskoristimo identitet

$$\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}+1}\frac{\sqrt{z^2+1}+1}{\sqrt{z^2+1}+1} = \frac{z^2}{(\sqrt{z^2+1}+1)^2}$$

i vratimo u (7.3) što daje 1. integral diferencijalne jednadžbe:

$$\ln|z| - \ln(\sqrt{z^2+1}+1) + \ln|z| + \ln|x| = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sređivanjem

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{z^2x}{\sqrt{z^2+1}+1} = C, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\
&\Rightarrow \quad z^2x - C = C\sqrt{z^2+1} \quad \Big/^2 \\
&\Rightarrow \quad z^4x^2 - 2Cz^2x + C^2 = C^2 + C^2z^2 \quad \Big/ : u^2 \\
&\Rightarrow \quad z^2x^2 - 2Cx - C^2 = 0 \\
&\Rightarrow \quad y^2 - 2Cx - C^2 = 0, \quad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}
\end{aligned}$$

smo dobili jednadžbu parabole s fokusom u ishodištu. □

Analiza (matematika)
Iako su obične diferencijalna jednadžbe same za sebe bogato i bitno polje u matematici spomenimo i neke direktne primjene običnih diferencijalnih jednadžbi u računanju poznatih identiteta.

Zadatak 7.7. *Izračunajte integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(x)\,dx.$$

Rješenje: Definiramo $I(a) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(ax)\, dx$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{da} I(a) &= \frac{d}{da} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(ax)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da} e^{-x^2} \cos(ax)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \sin(ax)\, dx = \begin{bmatrix} u = \sin(ax) & dv = x e^{-x^2} \\ du = a\cos(ax) & v = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin(ax) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos(ax)\, dx \\
&= -\frac{a}{2} I(a)
\end{aligned}$$

Prethodnu zamijenu derivacije i integrala možemo opravdati tako da radimo s konačnim integralima $\int_{-M}^{M}$ umjesto $\int_{-\infty}^{\infty}$ te tek na kraju pustimo $M \to \infty$ kako bi došli do diferencijalne jednadžbe. Prepoznajemo da se radi o separabilnoj diferencijalnoj jednadžbi $I'(a) = -\frac{a}{2} I(a)$.

$$\begin{aligned}
& \frac{dI}{I} = \frac{a da}{2} \quad \Big/ \int \\
\Rightarrow \quad & \ln |I| = -\frac{a^2}{4} + C \\
\Rightarrow \quad & I = C e^{-\frac{a^2}{4}}
\end{aligned}$$

Izračunajmo $I(0)$:

$$\begin{aligned}
I(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \\
&= 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = 2 \sqrt{\left(\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \right)^2} \\
&= 2 \sqrt{\int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} e^{-x^2 - y^2}\, dx dy} = 2 \sqrt{\int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{\infty} r e^{-r^2}\, dr d\varphi} = 2\sqrt{\pi/4} = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

Time je $I(a) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}}$ odnosno traženi integral je $I(1) = \sqrt{\pi} e^{-1/4}$.

$\square$

Poglavlje 3

Diferencijalne jednadžbe višeg reda

8. Laplaceova pretvorba

Laplaceova pretvorba je matematički alat s mnogim primjenama. Može pojednostaviti rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi ili sustava proizvoljnog reda. Posebno je korisna ako se bavimo nehomogenim jednadžbama u kojima funkcije desne strane nisu neprekidne.

Definicija 8.1. *Neka je $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Laplaceova pretvorba funkcije f je preslikavanje F definirano formulom*

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Definiciju 8.1 uvodi Pierre-Simon Laplace u svom radu *"Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de trés grands nombres"* (1782) iako se bazična formula pripisuje Leonhardu Euleru koji ju koristi kako bi sistematizirao rješavanje nekih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.
Standardno ćemo s $\mathcal{L}$ označavati Laplaceovu pretvorbu. U zadacima velika slova će označavati Laplaceovu pretvorbe funkcije, odnosno $F = \mathcal{L}(f), X = \mathcal{L}(x), Y = \mathcal{L}(y)$. Dodatno, argument funkcije dobivene Laplaceovom pretvorbom će uvijek biti s. Prije primjene na linearne diferencijalne jednadžbe ili sustave izračunajmo Laplaceovu pretvorbu nekih funkcija.

Primjer 8.2 (Računanje Laplaceove pretvorbe)**.**

- $f_1(t) = 1, t > 0$

$$\mathcal{L}(f_1)(s) = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st}\, dt = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^M = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

- $f_2(t) = e^{at}, t > 0, a \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(f_2)(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{at}\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-(s-a)t}\, dt = \lim_{M\to\infty} \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right|_0^M = \frac{1}{s-a}, \ s > a.$$

- $f_3(t) = t, t > 0$

$$\mathcal{L}(f_3)(s) = \int_0^\infty e^{-st} t\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} t\, dt = \lim_{M\to\infty} \left\{ -\frac{e^{-st}t}{s}\Big|_0^M - \int_0^M \frac{e^{-st}}{-s}\, dt \right\}$$
$$= \lim_{M\to\infty} \left\{ -\frac{e^{-sM}}{s} M + \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sM}}{s^2} \right\} = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0.$$

- $f_4(t) = \cos t, t > 0$

$$\mathcal{L}(\cos)(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cos t\, dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} \cos t\, dt$$

Parcijalnom integracijom

$$\int_0^M e^{-st} \cos t\, dt = -\frac{e^{-st}\cos t}{s}\Big|_0^M - \frac{1}{s}\int_0^M e^{-st} \sin t\, dt$$

i

$$\int_0^M e^{-st} \sin t\, dt = -\frac{e^{-st}\sin t}{s}\Big|_0^M + \frac{1}{s}\int_0^M e^{-st} \cos t\, dt.$$

eliminacijom podintegralne funkcije $t \mapsto e^{-st}\sin t$ *dobivamo*

$$\int_0^M e^{-st} \cos t\, dt = \frac{e^{-st}(\sin t - s\cos t)}{s^2+1}\Big|_0^M \quad \Big/^{\lim_{M\to\infty}}$$

čime je

$$\mathcal{L}(\cos)(s) = \frac{s}{s^2+1}, \quad s > 0.$$

- $H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}, \quad a \geq 0$ *(vidi Sliku 17)*

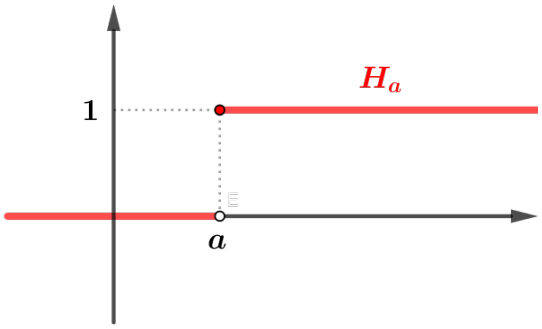
$$\mathcal{L}(H_a)(s) = \int_0^\infty e^{-st} H_a(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \frac{e^{-as}}{s}, \quad s > 0.$$

Zadatak 8.1. *Nađite Laplaceovu pretvorbu funkcije* $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$.

Rješenje:

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \begin{bmatrix} u = \sqrt{st} \\ du = \frac{\sqrt{s}}{2}\frac{dt}{\sqrt{t}} \end{bmatrix} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{2}{\sqrt{s}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

□



Slika 17: Heaviside-ova funkcija

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$	$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	$\mathrm{sh}(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\mathrm{ch}(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
te^{at}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	$H_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$

Tablica 3.1: Laplaceova pretvorba nekih funkcija

Laplaceova pretvorba općenito ne treba biti dobro definirana za svaku funkciju f, konkretno integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ ne mora postojati niti za jedan $s \in \langle \alpha, +\infty \rangle$, $\alpha > 0$. Jedan od dovoljnih uvjeta uz koje konvergira je ograničenje na rast funkcije f u beskonačnosti. Laplaceovu pretvorbu često korištenih funkcija možete pronaći u Tablici 3.1.

Definicija 8.3. *Kažemo da je funkcija f eksponencijalnog rasta ako postoje konstante α i $M, R > 0$ takve da*

$$e^{-\alpha t}|f(t)| < M, \qquad za\ t > R.$$

Primjer 8.4.

- $t \mapsto e^{t^2}$ *nije eksponencijalnog rasta.*
- *Svaka ograničena i neprekidna funkcija je eksponencijalnog rasta:* $\sin, \cos, \ldots$.
- $t \mapsto e^{at}, a \in \mathbb{R}$ *je eksponencijalnog rasta.*

Sljedeći teorem iskazuje dovoljne uvjete uz koje postoji Laplaceova pretvorba

Teorem 8.5 (Definiranost Laplaceove pretvorbe)**.** *Neka je $f : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$. Ako je funkcija f:*

a) eksponencijalnog rasta reda α,

b) po dijelovima neprekidna na svakom ograničenom segmentu $[a, b]$,

tada postoji $\mathcal{L}f : \langle \alpha, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$.

Uvjet pod b) u Teoremu 8.5 osigurava da Riemannov integral $\int_0^M e^{-st} f(t)\,dt$ postoji za svaki $M > 0$ kako bi nepravi integral imalo smisla promatrati. Recimo ako pogledamo Zadatak 8.1 $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ u nuli postiže beskonačnost te time uvjet pod b) nije zadovoljen, no svejedno je Laplaceova pretvorba dobro definirana u kontekstu nepravog integrala

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st}\,dt = \lim_{M\to\infty} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^M \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st}\,dt.$$

Neka od osnovnih svojstava Laplaceove pretvorbe:

S.1 $\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}(f) + \beta\mathcal{L}(g)$

S.2 ako postoje $\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(f')$ onda

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$$

S.3 ako postoje $\mathcal{L}(f^{(k)})$, $k = 0, 1, \ldots, n$ onda

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

S.4 $\mathcal{L}(e^{at}f(t))(s) = \mathcal{L}(f)(s-a)$

S.5 $\mathcal{L}(t^n f(t))(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f)(s)$

S.6 $\mathcal{L}(f(at))(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}(f)(s/a)$

S.7 $\mathcal{L}(f(t-a)H_a(t))(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f)(s)$

Zadatak 8.2. *Izračunajte Laplaceovu pretvorbu funkcije:*

a) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 5 \\ t-3, & t \geq 5 \end{cases}$,

b) $g(t) = e^{3t}\cos^2 t$,

c) $h(t) = \begin{cases} 1, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$.

Rješenje:

a)

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-3)H_5(t) \\ &= f_0(t-5)H_5(t) \end{aligned}$$

gdje je $f_0 : t-5 \mapsto t-3$ što daje $f_0(t) = t+2$. Po linearnosti Laplaceove pretvorbe i tablici slijedi

$$\mathcal{L}f_0(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}.$$

Pozivajući se na svojstvo **S.7** slijedi

$$\mathcal{L}(f_0(t-5)H_5(t))(s) = e^{-5s}\mathcal{L}f_0(s) = e^{-5s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s}\right).$$

b) $g(t) = e^{3t}\cos^2 t$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s) &= \mathcal{L}(e^{3t}\cos^2 t)(s) \overset{\text{S.4}}{=} \mathcal{L}(\cos^2 t)(s-3) = \mathcal{L}\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)(s-3)\\ &= [\mathcal{L}(1/2) + \mathcal{L}(\cos(2t)/2)]\,(s-3) = \frac{1}{2}\frac{1}{\xi} + \frac{1}{2}\frac{\xi}{\xi^2+4}\bigg|_{\xi=s-3}\\ &= \frac{1}{2(s-3)} + \frac{s-3}{2((s-3)^2+4)}.\end{aligned}$$

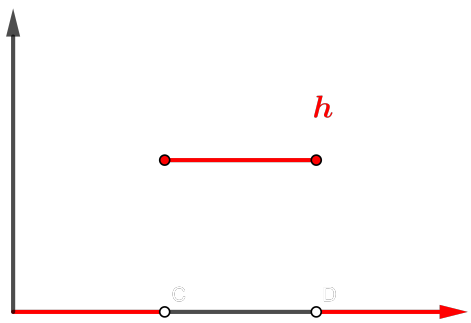
c) $h(t) = \begin{cases} 1, & 1 \le t \le 2 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$

Vidimo da se funkcija h može shvatiti kao (vidi Sliku 18)

$$H_1(t) - H_2(t)$$

za $t \in \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{2\}$. Istaknimo da je Laplaceova pretvorba funkcije h i $H_1 - H_2$ jednaka jer se vrijednost integrala ne mijenja ako promijenimo vrijednost podintegralne funkcije u nekim točkama. Time dobivamo

$$\mathcal{L}h(s) = \mathcal{L}(H_1 - H_2)(s) = \mathcal{L}H_1(s) - \mathcal{L}H_2(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} - e^{-2s}).$$



Slika 18: Funkcija h

□

Zadatak 8.3. *Nađite Laplaceovu pretvorbu od* $g(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 2t+1, & 1 \le t \le 2 \\ 1-t, & 2 < t \le 3 \\ 3, & t > 3 \end{cases}$.

Rješenje: Prepoznajemo da se funkcija g može interptretirati na sljedeći način do na skup nekoliko točaka (gdje se pojavljuje prekidi od g):

$$g_2(t) := \underbrace{t^2 H_0(t)}_{I} + \underbrace{(2t+1-t^2)H_1(t)}_{II} + \underbrace{(1-t-(2t+1))H_2(t)}_{III} + \underbrace{(3-(1-t))H_3(t)}_{IV}$$

$$
\begin{array}{llll}
I\ldots & f_0(t)H_0(t) = t^2 H_0(t) & \Rightarrow f_0(t) = t^2, & \mathcal{L}f_0(s) = \frac{2}{s^3} \\
II\ldots & f_1(t-1)H_1(t) = (-t^2+2t+1)H_1(t) & \Rightarrow f_1(t) = -t^2+2, & \mathcal{L}f_1(s) = -\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s} \\
III\ldots & f_2(t-2)H_2(t) = (-3t)H_2(t) & \Rightarrow f_2(t) = -3t-6, & \mathcal{L}f_2(s) = -\frac{3}{s^2} - \frac{6}{s} \\
IV\ldots & f_3(t-3)H_3(t) = (t+2)H_3(t) & \Rightarrow f_3(t) = t+5, & \mathcal{L}f_3(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}
\end{array}
$$

čime dobivamo $g_2(t) = f_0(t)H_0(t) + f_1(t-1)H_1(t) + f_2(t-2)H_2(t) + f_3(t-3)H_3(t)$ i primjenom svojstva **S.7** slijedi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}g(s) = \mathcal{L}g_2(s) &= \mathcal{L}f_0(s) + e^{-s}\mathcal{L}f_1(s) + e^{-2s}\mathcal{L}f_2(s) + e^{-3s}\mathcal{L}f_3(s) \\
&= \frac{2}{s^3} + e^{-s}\left(-\frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}\right) + e^{-2s}\left(-\frac{3}{s^2} - \frac{6}{s}\right) + e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{5}{s}\right)
\end{aligned}
$$

□

8.1. Inverzna Laplaceova pretvorba

Istaknimo ako dvije neprekidne funkcije imaju istu Laplaceovu pretvorbu onda se one podudaraju, tj. Laplaceove pretvorba je injektivna na prostoru neprekidnih funkcija $C([0,+\infty\rangle)$. Inverznu Laplaceovu pretvorbu u oznaci $\mathcal{L}^{-1}$ nećemo definirati u potpunosti na kolegiju jer prostore funkcija koji predstavljaju domenu i kodomenu Laplaceove pretvorbe još niste upoznali. Svojstva inverzne Laplaceove pretvorbe slijede direktno iz ranije spomenutih svojstava za Laplaceovu pretvorbu. Na primjer, inverzna Laplaceova pretvorba je linearna. Za f, g takve da je $F = \mathcal{L}f, G = \mathcal{L}g$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ imamo

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{L}f + \beta\mathcal{L}g \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}} \\
&\alpha f + \beta g = \mathcal{L}^{-1}(\alpha\mathcal{L}f + \beta\mathcal{L}g) \\
&\alpha\mathcal{L}^{-1}F + \beta\mathcal{L}^{-1}G = \mathcal{L}^{-1}(\alpha F + \beta G)
\end{aligned}
$$

U pravilu ako tražimo $\mathcal{L}^{-1}F$ tada je potrebno prepoznati funkciju f takvu da $\mathcal{L}f = F$ što ćemo demonstrirati u sljedećim zadacima.

Zadatak 8.4. *Odredite inverznu Laplaceovu pretvorbu funkcija:*

a) $F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2}$,

b) $F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13}$,

c) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$.

Rješenje:

a)

$$
\begin{aligned}
F(s) = \frac{1}{s^2-3s+2} &= \frac{1}{(s-2)(s-1)} = -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2} \\
&= -\mathcal{L}(e^t)(s) + \mathcal{L}(e^{2t})(s) = \mathcal{L}(-e^t + e^{2t})(s) \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = -e^t + e^{2t}$.

b)

$$F(s) = \frac{1}{s^2+6s+13} = \frac{1}{(s+3)^2+2^2} = \frac{1}{2}\frac{2}{(s+3)^2+2^2} = \frac{1}{2}\mathcal{L}(e^{-3t}\sin 2t)(s) \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = \frac{1}{2}e^{-3t}\sin 2t.$

c)

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \ldots = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} \\ &= \mathcal{L}(1)(s) - \mathcal{L}(\cos t)(s) \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = 1 - \cos t.$

□

Sada možemo započeti s primjenom Laplaceove pretvorbe na početne zadaće. Opći proces možete vidjeti ispod:

početna zadaća		rješenje početne zadaće
$\downarrow \mathcal{L}$		$\uparrow \mathcal{L}^{-1}$
algebarska jednadžba	$\rightarrow$	rješenje algebarske jednadžbe

Pritom je bitno naglasiti kako Laplaceovu pretvorbu možemo primijeniti i na sustave diferencijalnih jednadžbi te diferencijalne jednadžbe višeg reda. Nažalost, nelinearne diferencijalne jednadžbe nisu pogodne za tretiranje Laplaceovom pretvorbom.

Zadatak 8.5. *Laplaceovom pretvorbom pronađite rješenje početne zadaće:*

a) $\begin{cases} y' - 2y = e^{3t} \\ y(0) = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y'' + y = e^{-2t}\sin t \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = f \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ *gdje je* $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$.

Rješenje:

a) $y' - 2y = e^{3t} \quad \Big/^{\mathcal{L}}$

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}(y')(s) - 2\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(e^{3t})(s) \\ &s\mathcal{L}(y)(s) - y(0) - 2\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(e^{3t})(s), \quad Y = \mathcal{L}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad sY - 3 - 2Y = \frac{1}{s-3} \\
&\Rightarrow \quad (s-2)Y = \frac{1}{s-3} + 3 \quad /^{:(s-2)} \\
&\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{(s-2)(s-3)} + \frac{3}{s-2} \\
&\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2} + \frac{3}{s-2} = \frac{1}{s-3} + \frac{2}{s-2} \\
&\Rightarrow \quad Y(s) = \mathcal{L}(e^{3t} + 2e^{2t})(s) \quad /^{\mathcal{L}^{-1}} \\
&\Rightarrow \quad y(t) = e^{3t} + 2e^{2t}.
\end{aligned}$$

Traženo rješenje je $y(t) = e^{3t} + 2e^{2t}$.

b) $y'' + y = e^{-2t}\sin t \quad /^{\mathcal{L}}$

$$s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(e^{-2t}\sin t)(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}, \quad Y = \mathcal{L}(y)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (s^2+1)Y = \frac{1}{(s+2)^2+1} \\
&\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{(s^2+1)\left[(s+2)^2+1\right]} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{Bs}{s^2+1} + \frac{C}{(s+2)^2+1} + \frac{D(s+2)}{(s+2)^2+1} \\
&\qquad = \ldots = \frac{1}{8}\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{8}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{8}\frac{1}{(s+2)^2+1} + \frac{1}{8}\frac{s+2}{(s+2)^2+1} \quad /^{\mathcal{L}^{-1}}
\end{aligned}$$

Traženo rješenje je $y(t) = \frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{8}\cos t + \frac{1}{8}e^{-2t}\sin t + \frac{1}{8}e^{-2t}\cos t$.

c) $y'' + 2y' + 2y = f \quad /^{\mathcal{L}}, \qquad f(t) = 1 - H_\pi(t).$

$$s^2\mathcal{L}(y)(s) - sy(0) - y'(0) + 2s\mathcal{L}(y)(s) - 2y(0) + 2\mathcal{L}(y)(s) = \mathcal{L}(f)(s), \quad Y = \mathcal{L}(y)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad (s^2+2s+2)Y = \mathcal{L}(1-H_\pi)(s) = \frac{1}{s}(1-e^{-\pi s}) \\
&\Rightarrow \quad Y = \frac{1}{s\left[(s+1)^2+1\right]}(1-e^{-\pi s})
\end{aligned}$$

Rastavom na parcijalne razlomke vidimo da je

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s\left[(s+1)^2+1\right]} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1}\right) \\
&= \mathcal{L}((1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t)/2)(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)
\end{aligned}$$

Dobivamo da je

$$\begin{aligned}
Y &= (1-e^{-\pi s})\mathcal{L}(g)(s) \\
&= \mathcal{L}(g)(s) - e^{-\pi s}\mathcal{L}(g)(s) \\
&= \mathcal{L}(g)(s) - \mathcal{L}(g(t-\pi)H_\pi(t))(s) \quad /^{\mathcal{L}^{-1}}
\end{aligned}$$

te je traženo rješenje početne zadaće:

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) - H_\pi(t)g(t-\pi) \\ &= \frac{1}{2}(1 - e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t) - \frac{1}{2}H_\pi(t)(1 - e^{-t+\pi}\cos(t-\pi) - e^{-t+\pi}\sin(t-\pi)) \end{aligned}$$

□

Napomena 8.6. *U posljednjem Zadatku 8.5 pod c) na desnoj strani diferencijalne jednadžbe nalazi se funkcija f koja ima prekid u π. Uočite da smo Laplaceovom pretvorbom dobili rješenje početne zadaće koje je klase C^1, ali ne i C^2 jer ima prekid u π(provjerite).*

Gornja zadaću se može interpretirati i kao dva zavisna potproblema:

$$\begin{cases} y_a'' + 2y_a' + 2y_a = 1 \\ y_a(0) = y_a'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_b'' + 2y_b' + 2y_b = 0 \\ y_b(\pi) = y_a(\pi), y_b'(\pi) = y_a'(\pi) \end{cases}.$$

Zadatak 8.6. *Laplaceovom pretvorbom pronađite rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi:*

$$\begin{cases} x' - 6x + 3y = 8e^t, & x(0) = 1 \\ y' - 2x - y = 4e^t, & y(0) = 0 \end{cases}$$

Rješenje: Uz notaciju $X = \mathcal{L}(x), Y = \mathcal{L}(y)$ primjenom Laplaceove pretvorbe slijedi

$$\begin{cases} sX - 1 - 6X + 3Y = 8\frac{1}{s-1} \\ sY - 2X - Y = 4\frac{1}{s-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{cases} (s-6)X + 3Y = \frac{s+7}{s-1} & /^{\cdot 2} \\ (s-1)Y - 2X = \frac{4}{s-1} & /^{\cdot (s-6)} \end{cases}\right\} +$$

što daje

$$\begin{aligned} &(s^2 - 7s + 12)Y = \frac{6s-10}{s-1} \\ \Rightarrow \quad &Y = \frac{6s-10}{(s-1)(s-3)(s-4)} = \ldots = -\frac{2}{3}\frac{1}{s-1} - 4\frac{1}{s-3} + \frac{14}{3}\frac{1}{s-4} \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}} \\ \Rightarrow \quad &y(t) = -\frac{2}{3}e^t - 4e^{3t} + \frac{14}{3}e^{4t} \end{aligned}$$

Ako vratimo y u 2. diferencijalnu jednadžbu

$$x(t) = \frac{1}{2}(y' - y - 4e^t) = \ldots = -2e^t - 4e^{3t} + 7e^{4t}$$

čime smo pronašli rješenja sustava. □

Dobivena rješenja x i y moraju zadovoljiti i 1. diferencijalnu jednadžbu (2. je očito zadovoljena, tako je x dobiven). S obzirom da je rastav na parcijalne razlomke proces u kojem se lagano pojave aritmetičke greške, svaka provjera koje ne ide direktno po postupku predstavlja dobru dodatnu provjeru rješenja.

Zadatak 8.7. *Laplaceovom pretvorbom pronađite rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi:*

$$\begin{cases} x' - 4x + 2y = 2t, & x(0) = 3 \\ y' - 8x + 4y = 1, & y(0) = 5 \end{cases}$$

Rješenje: Uz notaciju $X = \mathcal{L}(x), Y = \mathcal{L}(y)$ primjenom Laplaceove pretvorbe dobivamo

$$\begin{cases} sX - x(0) - 4X + 2Y = \frac{2}{s^2} \\ sY - y(0) - 8X + 4Y = \frac{1}{s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \left.\begin{cases} (s-4)X + 2Y = \frac{3s^2+2}{s^2} & /^{\cdot 8} \\ -8X + (s+4)Y = \frac{1+5s}{s} & /^{\cdot (s-4)} \end{cases}\right\} +$$

čime dobivamo

$$\begin{aligned} & s^2 Y = \frac{5s^3 + 5s^2 - 4s + 16}{s^2} \\ \Rightarrow \quad & Y = \frac{16}{s^4} - \frac{4}{s^3} + \frac{5}{s^2} + \frac{5}{s} \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}} \\ \Rightarrow \quad & y = \frac{8}{3}t^3 - 2t^2 + 5t + 5 \quad \text{ubacimo u 2.DJ} \\ \Rightarrow \quad & x = \frac{4}{3}t^3 + 2t + 3 \end{aligned}$$

□

8.2. Konvolucija funkcija

Neka su f_1, f_2 realne funkcije realne varijable. Konvolucija funkcija f_1, f_2 u oznaci $f_1 * f_2$ je preslikavanje definirano formulom

$$(f_1 * f_2)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako su $f_1, f_2 : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ tada gledamo njihova proširenja nulom na cijeli $\mathbb{R}$ u oznaci $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, respektivno. Konvolucija funkcija $f_1 * f_2 : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ je onda dana formulom:

$$(f_1 * f_2)(t) = (\tilde{f}_1 * \tilde{f}_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau, \quad t > 0.$$

Zadatak 8.8. *Pokažite da vrijedi*

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2).$$

Rješenje:

Neka je $\tilde{f}$ proširenje nulom od f na cijeli $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_1 * f_2)(s) &= \int_0^\infty e^{-st}(f_1 * f_2)(t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-st}(\widetilde{f_1 * f_2})(t)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-st} \int_{-\infty}^\infty \tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)\,d\tau dt = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-st}\tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)\,d\tau dt \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-st}\tilde{f}_1(\tau)\tilde{f}_2(t-\tau)\,dt d\tau = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-s(t-\tau)}\tilde{f}_2(t-\tau)e^{-s\tau}\tilde{f}_1(\tau)\,dt d\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau}\tilde{f}_1(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^\infty e^{-s(t-\tau)}\tilde{f}_2(t-\tau)\,dt}_{\int_{-\infty}^\infty e^{-st}\tilde{f}_2(t) = \mathcal{L}f_2(s)}\,d\tau \\
&= \int_{-\infty}^\infty e^{-s\tau}\tilde{f}_1(\tau)\mathcal{L}(f_2)(s)\,d\tau = \mathcal{L}f_1(s)\mathcal{L}f_2(s).
\end{aligned}$$

□

Zadatak 8.9. *Pokažite da vrijedi* $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$.

Rješenje:

$$\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)H_0(t-\tau)\,d\tau = (f * H_0)(t) \quad \Big/^{\mathcal{L}}$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)(s) = \mathcal{L}(f * H_0)(s) = \mathcal{L}f(s)\mathcal{L}H_0(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$$

□

Može se pokazati da je konvolucija asocijativna i komutativna. Sve zajedno to možemo zapisati kao:

K.1 $f * (g * h) = (f * g) * h$

K.2 $f * g = g * f$

K.3 $\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1)\mathcal{L}(f_2)$

K.4 $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right)(s) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s}$

Zadatak 8.10. *Napravite inverznu Laplaceovu pretvorbu sljedećih funkcija:*

a) $F(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

b) $F(s) = \frac{1}{(s-4)(s+1)}$

c) $F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$

d) $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}$.

Rješenje:

a)

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}(1)(s)\mathcal{L}(\sin)(s) \quad \Big/^{\mathcal{L}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = 1 * \sin(t) = \sin * 1(t) = \int_0^t \sin(\tau)\,d\tau = -\cos\tau\Big|_0^t = -\cos t + 1$$

b)

$$F(s) = \frac{1}{(s-4)(s+1)} = \frac{1}{s-4}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}(e^{4t})(s)\mathcal{L}(e^{-t})(s) = \mathcal{L}(e^{4t} * e^{-t})(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = \int_0^t e^{4\tau}e^{-t+\tau}\,d\tau = e^{-t}\frac{e^{5\tau}}{5}\Big|_0^t = \frac{1}{5}(e^{4t} - e^{-t})$$

c)

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{1}{s+1}\frac{s}{s^2+4} = \mathcal{L}(e^{-t} * \cos 2t)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = \int_0^t e^{-\tau}\cos(2(t-\tau))\,d\tau = \ldots = \frac{1}{5}(-e^{-t} + 2\sin 2t + \cos 2t)$$

d)

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} = (\mathcal{L}(\sin)(s))^2 = \mathcal{L}(\sin * \sin)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t) = \int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t \frac{1}{2}(\cos(t-2\tau) - \cos t)\,d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{4}\sin(t-2\tau)\Big|_0^t = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t).$$

□

Zadatak 8.11. *Laplaceovom pretvorbom pronađite rješenje sustava diferencijalnih jednadžbi:*

$$\begin{cases} x' - 3x - y = 1, & x(0) = 0 \\ y' + 9x + 3y = \frac{1}{\sqrt{t}}, & y(0) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Djelovanjem Laplaceove pretvorbe ($X = \mathcal{L}(x)$, $Y = \mathcal{L}(y)$)

$$
\begin{aligned}
& + \begin{cases} (s-3)X - Y = \frac{1}{s} & \Big/ \cdot (s+3) \\ (s+3)Y + 9X = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & s^2 X = \frac{s+3}{s} + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \\
\Rightarrow \quad & X = \frac{1}{s^2} + \frac{3}{s^3} + \frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{\pi}{s}}
\end{aligned}
$$

gdje smo iskoristili rješenje Zadatka 8.1 za desnu stranu druge jednadžbe. Uočimo da je

$$
\frac{1}{s^2}\sqrt{\frac{\pi}{s}} = \mathcal{L}\left(t\right)\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \mathcal{L}\Big(t * \frac{1}{\sqrt{t}}\Big) = \mathcal{L}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}} * t}_{f}\Big)
$$

Odredimo funkciju f definirano konvolucijom.

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}(t-\tau)\,d\tau = t\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau}}\,d\tau - \int_0^t \sqrt{\tau}\,d\tau \\
&= 2t\sqrt{t} - \frac{2}{3}t\sqrt{t} = \frac{4}{3}t\sqrt{t}
\end{aligned}
$$

Time je $x(t) = \mathcal{L}^{-1}(X)(t) = t + \frac{3}{2}t^2 + \frac{4}{3}t\sqrt{t}$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je $y(t) = \ldots = 2\sqrt{t} - 4t^(3/2) - \frac{9}{2}t^2$. □

Konvolucija je korisna ako želimo zapisati opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe.

Zadatak 8.12. *Zapišite opće rješenje početne zadaće:*

$$
\begin{cases} y'' + k^2 y = f(t), \quad k > 0 \\ y(0), y'(0) \ \textit{zadane vrijednosti} \end{cases}
$$

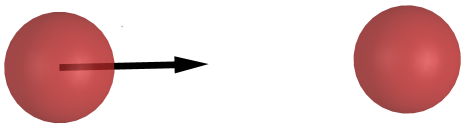
Rješenje: Notacija $Y = \mathcal{L}y$.

$$
\begin{aligned}
& s^2 Y - sy(0) - y'(0) + k^2 Y = \mathcal{L}(f)(s) \\
& (s^2 + k^2)Y = \mathcal{L}(f)(s) + sy(0) + y'(0) \\
& Y = y(0)\frac{s}{s^2+k^2} + y'(0)\frac{1}{s^2+k^2} + \mathcal{L}(f)(s)\frac{1}{s^2+k^2} \\
& \quad = y(0)\mathcal{L}(\cos(kt))(s) + \frac{y'(0)}{k}\mathcal{L}(\sin(kt))(s) + \frac{1}{k}\mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(\sin(k\cdot))(s) \\
& y(t) = y(0)\cos(kt) + \frac{y'(0)}{k}\sin(kt) + \frac{1}{k} f * \sin(kt)(t) \\
& y(t) = \underbrace{y(0)\cos(kt) + \frac{y'(0)}{k}\sin(kt)}_{\text{homogeno rj. DJ}} + \underbrace{\frac{1}{k}\int_0^t f(\tau)\sin(k(t-\tau))\,d\tau}_{\text{partikularno rj. DJ}}.
\end{aligned}
$$

□

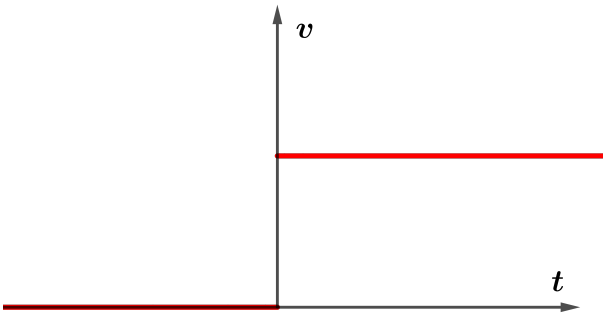
8.3. Diracova funkcija ili funkcija jediničnog impulsa

Laplaceova pretvorba je dosta jaki alat i posebno je pogodna ako linearna diferencijalna jednadžba ili sustav imaju desnu stranu sa prekidima (vidi Zadatak 8.5), pa čak i ako ima singularitet u nuli (vidi Zadatak 8.11). No, što ako moramo modelirati probleme u kojima se pojavljuju jake sile u kratkom vremenskom trenutku ili točkovne mase. Uzmimo primjer elastičnog sudara u fizici (Slika 19). Ako nacrtamo graf brzine kuglice u mirovanju prije i



Slika 19: Elastični sudar

nakon sudara dobivamo rezultat kao na Slici 20. Možemo zamisliti da je došlo do promijene



Slika 20: Brzina kuglice u mirovanju. U trenutku $t = 0$ dolazi do elastičnog sudara.

brzine od 0 prema v_0 pod djelovanjem sile u kratkom vremenskom periodu koji je dovoljno mali tako da ga nije jednostavno opaziti. Recimo da je promijena brzine bila afina i da je trajala neki manji vremenski trenutak $\Delta t = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Time je

$$v_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ v_0 n t & t \in \left\langle 0, \frac{1}{n} \right] \\ v_0 & t > \frac{1}{n} \end{cases}$$

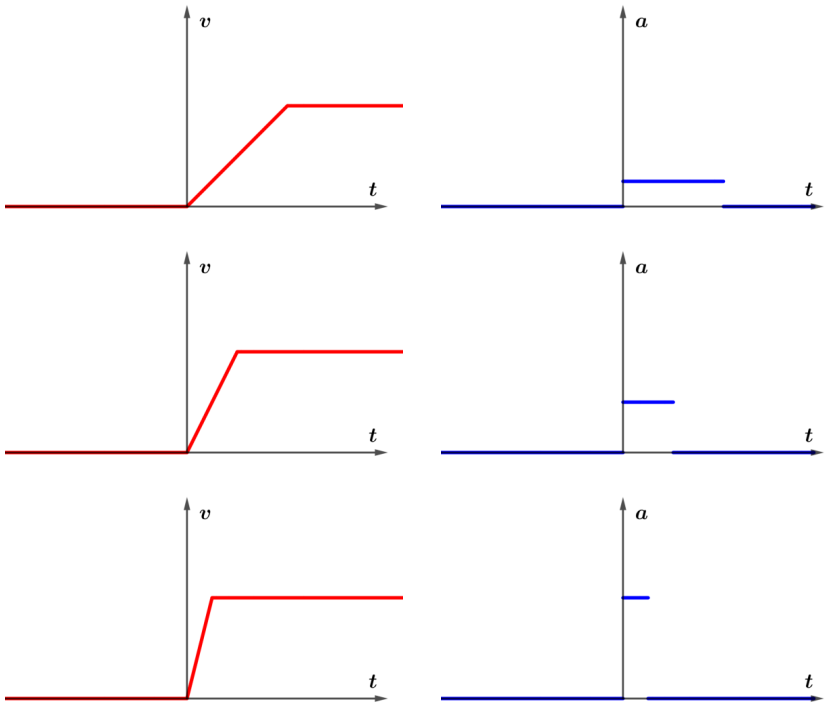
dok je akceleracija dana s

$$a_n(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ v_0 n & t \in \left\langle 0, \frac{1}{n} \right] \\ 0 & t > \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Njihove grafove možemo vidjeti na Slici 21. Uočimo da $\lim_n v_n(t) = v_0 H_0(t)$ vrijedi za svaki $t \neq 0$. Točkovni limes akceleracije je $\lim_n a_n(t) = 0$. S druge strane vrijednost od $\int_{\mathbb{R}} a_n(t) = v_0 > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Time možemo zaključiti da a_n ne može konvergirati prema funkciji u klasičnom smislu. Traženi limes je funkcional na prostoru funkcija. U ovom slučaju, funkcional na beskonačnodimenzionalnom vektorskom prostoru čime izlazimo iz opsega ove skripte.

Uz dogovor da je $v_0 = 1$, označimo "limes" niza $(a_n)_n$ u oznaci δ_0:

$$\delta_0 = \lim_{n \to \infty} n(H_0 - H_{1/n}).$$



Slika 21: Brzina i akceleracija

Označimo sa x položaj kuglice. Ako je kuglica u početku bila u mirovanju sve do trenutka $t = 0$, tada je njena diferencijalna jednadžba za $t < 0$ (dogovorno uzimamo da je masa kuglice jednaka 1)

$$x''(t) = 0.$$

S obzirom da se nakon trenutka $t = 0$ kuglica giba konstantnom brzinom v_0 znamo da na nju ne djeluje nikakva sila čime je diferencijalna jednadžba za $t > 0$

$$x''(t) = 0.$$

Sve zajedno diferencijalnu jednadžbu položaja pišemo kao

$$x''(t) = v_0\delta_0 \tag{8.1}$$

što znači upravo

$$\begin{cases} x''(t) = 0 & \text{za } t \neq 0, \\ x'(0^+) = x'(0^-) + v_0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Da bi izraz (8.1) mogli koristiti sa aspekta Laplaceove pretvorbe potrebno je odrediti vrijednost Laplaceove pretvorbe od δ_0:

$$\mathcal{L}(\delta_0)(s) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(n(H_0 - H_{1/n})) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-\frac{s}{n}}}{s}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-\frac{s}{n}}}{\frac{s}{n}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-s/n}\cancel{\frac{s}{n^2}}}{-\cancel{\frac{s}{n^2}}} = 1, \quad s > 0$$

Možemo definirati δ_a, $a > 0$.

$$\delta_a = \lim_{n\to\infty} n(H_a - H_{a+1/n})$$

U literaturi je standardno formalno pisati s varijablom $\delta_a(t) = \delta_0(t-a)$. Pripadna Laplaceova pretvorba iznosi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\delta_a)(s) &= \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}(n(H_a - H_{a+1/n})) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{s}e^{-as} - \frac{e^{-as-\frac{s}{n}}}{s}\right)\\ &= e^{-as}\lim_{n\to\infty}\frac{1-e^{-\frac{s}{n}}}{\frac{s}{n}} \overset{\text{L'H}}{=} e^{-as}\lim_{n\to\infty}\frac{-e^{-s/n}\cancel{\frac{s}{n^2}}}{-\cancel{\frac{s}{n^2}}} = e^{-as}, \quad s>0\end{aligned}$$

Zanimljivo je što se dešava ako δ_a gledamo u konvoluciji s neprekidnom funkcijom f:

$$\begin{aligned}\delta_a * f(t) &= \lim_{n\to\infty}(n(H_a - H_{a+1/n})) * f(t)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t n(H_a(\tau) - H_{a+1/n}(\tau))f(t-\tau)\,d\tau\end{aligned}$$

Prethodni izraz je očito 0 ako je $t < a$. Pogledajmo što dobivamo ako je $t > a$ i $n > \frac{1}{t-a}$:

$$\begin{aligned}\delta_a * f(t) &= \lim_{n\to\infty}\int_0^t n(H_a(\tau) - H_{a+1/n}(\tau))f(t-\tau)\,d\tau\\ &= \lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+1/n} f(t-\tau)\,d\tau\\ &= f(t-a)\end{aligned}$$

gdje smo u posljednjem koraku iskoristili da je f neprekidna funkcija, čime je to i $g : \tau \mapsto f(t-\tau)$ te činjenicu ako je g neprekidna u a tada je $\lim_{n\to\infty} n\int_a^{a+1/n} g(\tau)\,d\tau = g(a)$.

Zaista jer je g neprekidna u točki a to znači da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da ako je $|x-a| < \delta$ to povlači $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Time je za svaki n takav da $\frac{1}{n} < \delta \iff n > \frac{1}{\delta}$

$$\begin{aligned}\left|n\int_a^{a+1/n} g(\tau)\,d\tau - g(a)\right| &\le \left|n\int_a^{a+1/n} g(\tau) - g(a)\,d\tau\right|\\ &\le n\int_a^{a+1/n}|g(\tau)-g(a)|\,d\tau \le \cancel{n}\varepsilon\frac{1}{\cancel{n}} = \varepsilon\end{aligned}$$

Čime je tvrdnja pokazana.

Time smo pokazali sljedeća svojstva Diracove funkcije:

D.1 $\mathcal{L}(\delta_a)(s) = e^{-as}, \quad a \ge 0$

D.2 $\delta_a * f(t) = f(t-a)H_a(t)$

Zadatak 8.13. *Pronađi rješenje početne zadaće*

$$\begin{cases} y'' + y = \delta_0 + 2\delta_\pi\\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0.\end{cases}$$

Rješenje: Djelujemo Laplaceovom pretvorbom:

$$\begin{aligned} & s^2Y - sy(0) - y'(0) + Y = 1 + 2e^{-\pi s} \\ \Rightarrow\ & Y = \frac{1}{s^2+1} + 2e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\ \Rightarrow\ & Y = \mathcal{L}(\sin)(s) + 2\mathcal{L}(\delta_\pi)(s)\mathcal{L}(\sin)(s) \\ \Rightarrow\ & Y = \mathcal{L}(\sin + 2\delta_\pi * \sin)(s) \end{aligned}$$

Znači rješenje je $y(t) = \sin(t) + 2\sin(t-\pi)H_\pi(t)$. □

Napomena 8.7. *u prethodnom zadatku diferencijalnu jednadžbu*

$$y'' + y = \delta_0 + 2\delta_\pi$$

možemo shvatiti kao

$$\begin{cases} y'' + y = 0 & za\ t \neq 0, \pi \\ y'(0^+) = y'(0^-) + 1 \\ y'(\pi^+) = y'(\pi^-) + 2. \end{cases}$$

Ukratko, prethodni zadatak se time može interpretirati kao dva zavisna podzadatka:

$$\begin{cases} y_a'' + y_a = 0 \\ y_a(0) = 0,\ y_a'(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_b'' + y_b = 0 \\ y_b(\pi^+) = y_a(\pi^-),\ y_b'(\pi^+) = y_a'(\pi^-) + 2 \end{cases}$$

i riješiti bez korištenja Laplaceove pretvorbe.

8.4. Zadaci za vježbu

Zadatak 8.14. *Odredite inverznu Laplaceovu pretvorbu*

a) $F(s) = \frac{3s+1}{s^4+4}$

b) $F(s) = \frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi}$

c) $F(s) = \frac{2s(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$

Rješenje:

a) $F(s) = \frac{3s+1}{s^2+4}$. Nultočke od $s^4 + 4 = 0$ su $s_{1,2} = 1 \pm i, s_{3,4} = -1 \pm i$. Pritom $s_{1,2}$ zadovoljava jednakost

$$\begin{aligned} s - 1 &= \pm i \quad /^2 \\ (s-1)^2 &= -1 \\ (s-1)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

dok $s_{3,4}$ zadovoljava

$$\begin{aligned} s + 1 &= \pm i \quad /^2 \\ (s+1)^2 &= -1 \\ (s+1)^2 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

To daje $s^4+4=((s-1)^2+1)((s+1)^2+1)$. Tražimo rastav

$$\frac{3s+1}{s^4+4}=\frac{A}{(s-1)^2+1}+\frac{B(s-1)}{(s-1)^2+1}+\frac{C}{(s+1)^2+1}+\frac{D(s+1)}{(s+1)^2+1}$$
$$\frac{As^2+2As+2A+Bs^3+Bs^2-2B+Cs^2-2Cs+2C+Ds^3-Ds^2+2D}{s^4+4}$$

što daje sustav

$$\left.\begin{array}{lllllll} s^3 & \dots & & B & & +D & =0 \\ s^2 & \dots & A & +B & +C & -D & =0 \\ s & \dots & 2A & & -2C & & =3 \\ 1 & \dots & 2A & -2B & +2C & +2D & =1 \end{array}\right\} A=7/8, B=-1/8, C=-5/8, D=1/8.$$

Time je

$$\frac{3s+1}{s^4+4}=\frac{7}{8}\mathcal{L}(e^t\sin t)(s)-\frac{1}{8}\mathcal{L}(e^t\cos t)(s)-\frac{5}{8}\mathcal{L}(e^{-t}\sin t)(s)+\frac{1}{8}\mathcal{L}(e^{-t}\cos t)(s) \Big/ \mathcal{L}^{-1}$$
$$\mathcal{L}^{-1}F(t)=\frac{7}{8}e^t\sin t-\frac{1}{8}e^t\cos t-\frac{5}{8}e^{-t}\sin t+\frac{1}{8}e^{-t}\cos t.$$

b) $F(s)=\frac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi}=\frac{s}{s^2+\pi}+\frac{s}{s^2+\pi}e^{-3s}$
Jer je

$$\mathcal{L}(\cos(\sqrt{\pi}t))(s)=\frac{s}{s^2+\pi},$$
$$\mathcal{L}(H_3(t)\cos(\sqrt{\pi}(t-3)))=\frac{s}{s^2+\pi}e^{-3s}$$

slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}F(t)=\cos(\sqrt{\pi}t)+H_3(t)\cos(\sqrt{\pi}(t-3)).$$

c)

$$F(s)=\frac{2s(e^{-\pi s}-e^{-2\pi s})}{s^2+4}=\frac{2s}{s^2+4}e^{-\pi s}-\frac{2s}{s^2+4}e^{-2\pi s}$$
$$=\mathcal{L}(H_\pi(t)2\cos(2(t-\pi)))(s)-\mathcal{L}(H_{2\pi}(t)2\cos(2(t-2\pi)))(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}F(t)=H_\pi(t)2\cos(2(t-\pi))-H_{2\pi}(t)2\cos(2(t-2\pi)).$$

□

Zadatak 8.15. *Pronađite rješenje sustava:*

$$\begin{cases} x''+x'+y'+2x-y=0, & x(0)=y(0)=1 \\ y''+x'+y'+4x-2y=0, & x'(0)=y'(0)=0 \end{cases}$$

Rješenje: $X=\mathcal{L}(x), Y=\mathcal{L}(y)$.

$$s^2X-sx(0)-x'(0)+sX-x(0)+sY-y(0)+2X-Y=0$$
$$s^2Y-sy(0)-y'(0)+sX-x(0)+sY-y(0)+4X-2Y=0$$

$$\left.\begin{array}{ll} (s^2+s+2)X+(s-1)Y=s+2 & \cdot(-(s+4)) \\ (s^2+s-2)Y+(s+4)X=s+2 & \cdot(s^2+s+2) \end{array}\right\}+$$

što nakon sređivanja daje

$$(s-1)s(s^2+3s+3)Y=s^3+2s^2-2s-4.$$

Nakon rastavljanja na parcijalne razlomke dobivamo

$$Y=\frac{2}{21}\frac{(s+3/2)}{(s+3/2)^2+3/4}+\frac{24}{21\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s+3/2)^2+3/4}-\frac{3}{7}\frac{1}{s-1}+\frac{4}{3}\frac{1}{s},$$

tj.

$$y=\frac{2}{21}e^{-3/2t}\cos(\sqrt{3}/2t)+\frac{24}{21\sqrt{3}}e^{-3/2t}\sin(\sqrt{3}/2t)-\frac{3}{7}e^t+\frac{4}{3}$$

te još preostaje analogno napraviti za x:

$$x=\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-3/2t}\sin(\sqrt{3}/2t)+\frac{1}{3}e^{-3/2t}\cos(\sqrt{3}/2t).$$

□

Zadatak 8.16. *Koristeći Laplaceovu pretvorbu i konvoluciju, pokažite da početna zadaća za desnu stranu $r : C([0,+\infty\rangle\,;\mathbb{R})$:*

$$y''+ay'+by=r,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad a,b\in\mathbb{R}$$

ima rješenje

$$y(t)=\int_0^t w(t-u)r(u)\,du=w*r(t),$$

gdje je w rješenje početne zadaće $y''+ay'+by=\delta_0$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.
Funkcija $(t,u)\mapsto w(t-u)$ se zove Greenova funkcija za linearni operator $\frac{d^2}{dt^2}+a\frac{d}{dt}+b$.

Zadatak 8.17. *Pronađite rješenje početnih zadaća*

a) $y'+3y=\delta_2,\ y(0)=2$

b) $2y''+10y=5H_3-5\delta_4,\ y(0)=-1, y'(0)=1.$

Rješenje:

a) Djelovanjem Laplaceove pretvorbe dobivamo

$$\begin{aligned} & sY-2+3Y=e^{-2s} \\ \Rightarrow\ & (s+3)Y=2+e^{-2s} \\ \Rightarrow\ & Y=\frac{2}{s+3}+e^{-2s}\frac{1}{s+3} \\ \Rightarrow\ & Y=2\mathcal{L}(e^{-3t})(s)+\mathcal{L}\delta_2\mathcal{L}(e^{-3t}) \\ \Rightarrow\ & Y=\mathcal{L}(2e^{-3t}+\delta_2*e^{-3\cdot}(t))(s) \end{aligned}$$

Time je traženo rješenje $y(t)=2e^{-3t}+e^{-3(t-2)}H_2(t)$.

b) Laplaceova pretvorba daje

$$
\begin{aligned}
& 2(s^2Y - sy(0) - y'(0)) + 10Y = 2\frac{e^{-3s}}{s} - 5e^{-4s} \\
\Rightarrow\quad & (2s^2+10)Y = 2\frac{e^{-3s}}{s} - 5e^{-4s} - 2 + 2s \\
\Rightarrow\quad & Y = e^{-3s}\frac{1}{s(s^2+5)} - \frac{5}{2}e^{-4s}\frac{1}{s^2+5} - \frac{s-1}{s^2+5} \\
\Rightarrow\quad & Y = e^{-3s}\left[\frac{1}{5s} - \frac{s}{5(s^2+5)}\right] - \frac{5}{2\sqrt{5}}e^{-4s}\frac{\sqrt{5}}{s^2+5} - \frac{s}{s^2+5} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{s^2+5} \\
\Rightarrow\quad & Y = \frac{1}{5}\mathcal{L}(\delta_3)(s)\mathcal{L}(1-\cos(\sqrt{5}t))(s) - \frac{\sqrt{5}}{2}\mathcal{L}(\delta_4)(s)\mathcal{L}(\sin(\sqrt{5}t))(s) \\
& \quad - \mathcal{L}(\cos(\sqrt{5}t)) + \frac{\sqrt{5}}{5}\mathcal{L}(\sin(\sqrt{5}t))(s).
\end{aligned}
$$

Konačno rješenje je

$$
\begin{aligned}
y(t) = & \frac{1}{5}(1-\cos(\sqrt{5}(t-3)))H_3(t) - \frac{\sqrt{5}}{2}\sin(\sqrt{5}(t-4)))H_4(t) \\
& - \cos(\sqrt{5}t) + \frac{\sqrt{5}}{5}\sin(\sqrt{5}t).
\end{aligned}
$$

□

9. Linearne jednadžbe višeg reda s konstantnim koeficijentima

Neka je dan interval I u $\mathbb{R}$, neprekidno preslikavanje $f \in C(I;\mathbb{R})$ te niz koeficijenata $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Linearnu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda s konstantnim koeficijentima pisati ćemo u sljedećem obliku:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f. \tag{9.1}$$

U slučaju da je desna strana jednaka nul-funkciji kažemo da je pripadna jednadžba homogena. Diferencijalnoj jednadžbi (9.1) pridružujemo linearni diferencijalni operator L:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{d}{dx} + a_0 \tag{9.2}$$

čime onda (9.1) skraćeno pišemo $L(y) = f$.

9.1. Homogene linearne jednadžbe

Skup rješenja homogene jednadžbe $L(y) = 0$ reda n je konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije n. Ako pronađemo n linearno nezavisnih rješenja od $L(y) = 0$, tada možemo zapisati opće rješenje od $L(y) = 0$.

Primjer 9.1. *Skup $\{x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x\}$ je linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Rješenje: Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\alpha \sin + \beta \cos = 0$$

tj.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \alpha \sin x + \beta \cos x = 0.$$

Stavimo li $x = 0$, slijedi da je $\beta = 0$. Uz $x = \pi/2$ vrijedi da je $\alpha = 0$. Dakle, skup je linearno nezavisan. □

Napomena 9.2. *Pretpostavimo da je rješenje od $L(y) = 0$ moguće prikazati u obliku $x \mapsto e^{\lambda x}$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada*

$$\begin{aligned} L(e^{\lambda x}) &= \lambda^n e^{\lambda x} + a_{n-1}\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_1\lambda e^{\lambda x} + a_0 e^{\lambda x} \\ &= e^{\lambda x}\underbrace{\left[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0\right]}_{P_L(\lambda)} \end{aligned}$$

je posljednja jednakost 0 ako i samo je λ nultočka od polinoma $P_L(\lambda)$. Polinom $P_L(\lambda)$ zovemo polinom pridružen diferencijalnom operatoru L. Ako P_L ima n različitih realnih nultočaka tada je prostor rješenja homogene jednadžbe $L(y) = 0$ razapet sa skupom

$$\left\{x \mapsto e^{\lambda_1 x}, x \mapsto e^{\lambda_2 x}, \ldots, x \mapsto e^{\lambda_n x}\right\}$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nultočke od P_L.

Napomena 9.3. *Neka je λ dvostruka nultočka od P_L. Tada su preslikavanja $x \mapsto e^{\lambda x}$ i $x \mapsto xe^{\lambda x}$ rješenje homogene jednadžbe $L(y) = 0$. Zaista*

$$\begin{aligned} L(xe^{\lambda x}) &= L\Big(\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda x}\Big) = \frac{d}{d\lambda}[L(e^{\lambda x})] \\ &= xe^{\lambda x}P_L(\lambda) + e^{\lambda x}P_L'(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

posljednji izraz jednak je nula ako je λ dvostruka nultočka od P_L.

Pravilo generiranja linearno nezavisnih rješenja homogene jednadžbe
Linearno nezavisna rješenja homogene jednadžbe $L(y) = 0$ formiramo ovisno o karakteru nultočke $\lambda \in \mathbb{C}$ polinoma P_L prema sljedećim pravilima:

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ r-terostrukoj nultočki polinoma P_L pridružujemo r linearno nezavisnih rješenja:
$$x \mapsto e^{\lambda x},\ x \mapsto xe^{\lambda x}, \ldots, x \mapsto x^{r-1}e^{\lambda x}.$$

2) $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ i $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ r-terostrukim kompleksno konjugiranim nultočkama polinoma P_L pridružujemo $2r$ linearno nezavisnih rješenja:
$$x \mapsto e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x \mapsto xe^{\alpha x}\cos\beta x, \ldots, x \mapsto x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$x \mapsto e^{\alpha x}\sin\beta x,\ x \mapsto xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, x \mapsto x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Zadatak 9.1. *Odredite opće rješenje jednadžbe:*

a) $y^{(3)} - 4y^{(2)} + 5y' - 2y = 0$

b) $y^{(6)} - y^{(2)} = 0.$

Rješenje:

1) Prvo odredimo polinom pridružen linearnom operatoru:
$$P_L(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = \ldots = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$
Dakle po pravilu pridružiranja linearno nezavisnih rješenja:
$$\begin{aligned} \lambda_1 = 2, r_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto e^{2x} \\ \lambda_2 = 1, r_2 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto e^{x},\ x \mapsto xe^{x} \end{aligned}$$
što daje opće rješenje:
$$y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{x} + C_3xe^{x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

2) Polinom pridružen diferencijalnom operatoru je
$$P_L(\lambda) = \lambda^6 - \lambda^2 = \lambda^2(\lambda^4 - 1) = \lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1).$$
Prema pravilu pridruživanja
$$\begin{aligned} \lambda_1 = 0, r_1 = 2 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto 1, x \mapsto x \\ \lambda_2 = -1, r_2 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto e^{-x} \\ \lambda_3 = 1, r_3 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto e^{x} \\ \lambda_{4,5} = \pm i, r_{4,5} = 1 \quad &\Rightarrow \quad x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x \end{aligned}$$

čime možemo zapisati opće rješenje za $C_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, 6$:

$$y(x) = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x + C_5 \cos x + C_6 \sin x.$$

□

9.2. Metoda varijacije konstanti

Neka su $y_1, y_2, \ldots y_n$ linearno nezavisna rješenja od $L(y) = 0$. Opće rješenje od $L(y) = f$ tražimo u obliku

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Pritom funkcije $C_1, \ldots C_n$ određujemo iz sljedećeg sustava:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) + \ldots + C_n'(x)y_n(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + \ldots + C_n'(x)y_n'(x) &= 0 \\ \vdots & \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) &= 0 \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) &= f(x) \end{cases} \tag{9.3}$$

Napomena 9.4. *Neka je dan interval I u $\mathbb{R}$, neprekidno preslikavanje $f : I \to \mathbb{R}$ te niz neprekidnih funkcija $a_i : I \to \mathbb{R}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Za linearnu diferencijalnu jednadžbu n-tog reda*

$$L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f, \tag{9.4}$$

definiramo n linearno nezavisnih rješenja homogenog sustava u oznaci $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^n(I; \mathbb{R})$. Definiramo niz funkcija $C_1, C_2, \ldots C_n$ koje zadovoljavaju sustav (9.3). Tada

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x) \quad \Big/' \\
y'(x) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i'(x) \quad \Big/' \\
y''(x) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i'(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i''(x) \quad \Big/' \\
&\vdots \\
y^{(n-1)(x)} &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-2)}(x)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}(x) \quad \Big/' \\
y^{(n)}(x) &= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)}(x)}_{=f(x)} + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}(x) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}(x).
\end{aligned}$$

Time je

$$\begin{aligned}
L(y(x)) &= y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0(x)y(x) \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n)}(x) \\
&\quad + a_{n-1}(x)\big(\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i^{(n-1)}(x)\big) + \ldots + a_0(x)\big(\sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i(x)\big) \\
&= f(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\underbrace{L(y_i(x))}_{=0} = f(x)
\end{aligned}$$

Zaista, ako postoji rješenje sustava $C_i : I \to \mathbb{R}$ od (9.3), tada je opće rješenje od (9.4) dano izrazom

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x) + \ldots + C_n(x)y_n(x).$$

Uočimo kako se metoda varijacije konstanti može primijeniti i na linearnu diferencijalnu jednadžbu s nekonstantnim koeficijentima, pod uvjetom da je poznata baza rješenja homogene linearne jednadžbe.

Zadatak 9.2. *Odredite opće rješenje jednadžbe $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$*

Rješenje:

1° Homogeno rješenje jednadžbe $y'' + y = 0$.
Pripadni polinom je $P_L(\lambda) = \lambda^2 + 1$, tj. nultočke su $\lambda_{1,2} = \pm i$, što daje

$$y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2° Metoda varijacije konstanti
Tražimo rješenje u obliku $y(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$. Sustav (9.3) glasi

$$\left.\begin{aligned}
C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x &= 0 \quad \Big/ \cdot \sin x \\
C_1'(x)(-\sin x) + C_2'(x)\cos x &= \tfrac{1}{\sin x} \quad \Big/ \cdot \cos x
\end{aligned}\right\} +$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad C_2'(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} \\
C_2(x) &= \ln|\sin x| + D_2, D_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vraćanjem izraza $C_2'(x)$ u prvu jednadžbu sustava:

$$C_1'(x)\cos x + \frac{\cos x}{\sin x}\sin x = 0 \;\Rightarrow\; C_1'(x) = -1 \;\Rightarrow\; C_1(x) = -x + D_1,\; D_1 \in \mathbb{R},$$

što daje u konačnici opće rješenje za $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= (-x + D_1)\cos x + (\ln|\sin x| + D_2)\sin x \\
&= \underbrace{D_1 \cos x + D_2 \sin x}_{\text{homogeno rj.}} + \underbrace{(-x\cos x + \sin x \ln|\sin x|)}_{\text{partikularno rj.}}
\end{aligned}$$

□

Zadatak 9.3. *Pronađi opće rješenje:* $xy'' + y' = x^2$.

Rješenje: Prvo zapišimo jednadžbu tako da je vodeći koeficijent jednak 1:

$$y'' + \frac{1}{x}y' = x.$$

1° Homogeno rješenje jednadžbe $y'' + \frac{1}{x}y' = 0$
Supstitucijom $z = y'$ imamo separabilnu diferencijalnu jednadžbu: $z' = -\frac{1}{x}z$ što daje

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \Big/\int \\
&\Rightarrow \quad \ln|z| = -\ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \quad \ln|z| = -\ln|x| + \ln C_0, \quad C_0 > 0 \\
&\Rightarrow \quad |z| = \frac{C_0}{|x|}, \quad C_0 > 0 \\
&\Rightarrow \quad z = \frac{C_0}{x}, \quad C_0 \neq 0
\end{aligned}$$

Jer je i $z = 0$ stacionarno rješenje vidimo da se opće rješenje diferencijalne jednadžbe može zapisati kao $z = \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Time je homogeno rješenje $y_h' = z$, tj.

$$y_h = C\ln|x| + D, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

2° Metoda varijacije konstanti
Tražimo rješenje u obliku $y(x) = C_1(x)\ln|x| + C_2(x)$. Sustav (9.3) glasi

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln|x| + C_2'(x)1 = 0 \\ C_1'(x)\frac{1}{x} + C_2'(x)0 = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad C_1'(x) = x^2 \quad \Big/\int \\
&\Rightarrow \quad C_1(x) = \frac{x^3}{3} + D_1
\end{aligned}$$

Vraćanjem izraza za $C_1'(x)$ u prvu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad C_2'(x) = -x^2\ln|x| \quad \Big/\int \\
&\Rightarrow \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln|x| + \frac{x^3}{9} + D_2
\end{aligned}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$\begin{aligned}
y(x) &= \Big(\frac{x^3}{3} + D_1\Big)\ln|x| + \Big(-\frac{x^3}{3}\ln|x| + \frac{x^3}{9} + D_2\Big) \\
&= \underbrace{D_1\ln|x| + D_2}_{y_h} + \underbrace{\frac{x^3}{9}}_{y_p}, \quad D_1, D_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

□

Napomena 9.5. *Vodeći koeficijent linearne diferencijalne jednadžbe mora biti jednak* 1 *kod metode varijacije konstante. U suprotnom ne daje točno rješenje.*

9.3. Redukcija reda linearne jednadžbe drugog reda

Neka je dana linearna diferencijalna jednadžba 2. reda:

$$y'' + py' + ry = 0, \quad p = p(x),\, r = r(x).$$

Ako je y_1 jedno rješenje, opće rješenje y tražimo u obliku $y = hy_1$:

$$\begin{aligned}
&(hy_1)'' + p(hy_1)' + r(hy_1) = 0\\
&h''y_1 + 2h'y_1' + hy_1'' + ph'y_1 + phy_1' + rhy_1 = 0\\
&h\underbrace{(y_1'' + py_1' + ry_1)}_{=0} + h''y_1 + h'(2y_1' + py_1) = 0\\
&y_1h'' + (2y_1' + py_1)h' = 0
\end{aligned}$$

što dalje tretiramo supstitucijom $z = h'$.

Zadatak 9.4. *Pronađite opće rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe 2. reda:*

$$y'' + \frac{2}{x\ln x}y' - \frac{1}{x^2\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$$

ako je poznato jedno partikularno rješenje $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$

Rješenje: Tražimo opće rješenje od

$$y'' + \frac{2}{x\ln x}y' - \frac{1}{x^2\ln x}y = \frac{1}{\ln x}$$

Rješenje tražimo supstitucijom $y = hy_1$:

$$\begin{aligned}
&y'' + py' + ry = 0\\
&h''y_1 + 2h'y_1' + hy_1'' + ph'y_1 + phy_1' + rhy_1 = 0\\
&h\cancel{(y_1'' + py_1' + ry_1)} + h''y_1 + h'(2y_1' + py_1) = 0.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\ln x}h'' + h'\Big(\cancel{2\frac{-1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{2}{x\ln x}\frac{1}{\ln x}}\Big) = 0\\
\Rightarrow\quad &h'' = 0\\
\Rightarrow\quad &h = Cx + D, \quad C, D \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Dakle, opće rješenje homogene jednadžbe je

$$y = hy_1 = (Cx + D)\frac{1}{\ln x} = C\frac{x}{\ln x} + D\frac{1}{\ln x}, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Traženje općeg rješenja ide metodom varijacije konstanti $y = C(x)\frac{x}{\ln x} + D(x)\frac{1}{\ln x}$

$$\begin{cases} C'(x)\frac{x}{\ln x} + D'(x)\frac{1}{\ln x} = 0\\ C'(x)\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} - D'(x)\frac{1}{x\ln^2 x} = \frac{1}{\ln x}\end{cases}$$

Iz prve jednadžbe znamo $D'(x) = -xC'(x)$ što ubacivanjem u drugu daje

$$C'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + C_0 \quad \Rightarrow \quad D'(x) = -x \quad \Rightarrow \quad D(x) = -\frac{x^2}{2} + D_0.$$

Traženo rješenje je

$$y = C_0 \frac{x}{\ln x} + D_0 \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{\ln x}, \quad C_0, D_0 \in \mathbb{R}.$$

□

Neki puta jedno homogene rješenje možemo pronaći u obliku $x \mapsto x^\alpha$.

Zadatak 9.5. *Pronađite opće rješenje*

a) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3\sqrt{x}$,

b) $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2$.

Rješenje:

a) Radi se o linearnoj diferencijalnoj jednadžbi 2. reda s nekonstantnim koeficijentima:

$$y'' - \frac{2}{x}y' + \frac{2}{x^2}y = 3x^{-3/2}.$$

Ubacimo li $x \mapsto x^\alpha$ u homogenu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - \frac{2}{x}\alpha x^{\alpha-1} + \frac{2}{x^2}x^\alpha \\ &= (\alpha(\alpha-1) - 2\alpha + 2)x^{\alpha-2} = (\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Zaključujemo da je opće rješenje homogene jednadžbe:

$$y_h(x) = Cx + Dx^2, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Metodom varijacije konstante tražimo rješenje u obliku $y(x) = C(x)x + D(x)x^2$ koje zadovoljava sustav

$$\begin{cases} C'(x)x + D'(x)x^2 = 0 \\ C'(x)1 + D'(x)2x = 3x^{-3/2}. \end{cases}$$

Prva jednadžba kaže da je $C'(x) = -xD'(x)$. Uvrštavanjem u drugu dolazimo do $D'(x) = 3x^{-3/2}$ čime je $C'(x) = -3x^{-3/2}$.
Znači

$$C(x) = 6x^{-1/2} + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R}, \qquad D(x) = -2x^{-3/2} + D_0, \quad D_0 \in \mathbb{R}.$$

Traženo opće rješenje je

$$y = C_0x + D_0x^2 + 4\sqrt{x}, \quad C_0, D_0 \in \mathbb{R}.$$

b) Radimo s

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 1,$$

Uvrstimo li $x \mapsto x^\alpha$ u homogenu jednadžbu i usporedimo s nulom

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 3\alpha x^{\alpha-2} + 4x^{\alpha-2} \\ &= (\alpha^2 - 4\alpha + 4)x^{\alpha-2} = (\alpha-2)^2 x^{\alpha-2} \end{aligned}$$

Zaključujemo da je $x \mapsto x^2$ jedno rješenje. Drugo rješenje dobivamo redukcijom reda jednadžbe, tako da u homogenu jednadžbu uvrstimo supstituciju $y(x) = x^2 h(x)$:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 h''(x) + 4xh'(x) + 2h(x) - \frac{3}{x}\big(2xh(x) + x^2 h'(x)\big) + \frac{4}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2} h(x) \\ &= x^2 h''(x) + xh'(x) + (2-6+4)h(x) = x^2 h''(x) + xh'(x). \end{aligned}$$

Supstitucija $z = h'$ daje separabilnu jednadžbu

$$\begin{aligned} & xz' = -z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = -\frac{dx}{x} \quad \Big/ \int \\ \Rightarrow \quad & \ln|z| = -\ln|x| + C \\ \Rightarrow \quad & z = \frac{C}{x}, \quad C \neq 0 \\ \Rightarrow \quad & h' = \frac{C}{x} \\ \Rightarrow \quad & h = C\ln|x| + D, \quad C, D \in \mathbb{R}, C \neq 0. \end{aligned}$$

Zaključujemo da je opće homogeno rješenje oblika

$$y = x^2 h = Cx^2 \ln|x| + Dx^2, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Metodom varijacije konstante tražimo rješenje u obliku $y(x) = C(x)x^2 \ln|x| + D(x)x^2$ koje zadovoljava sustav

$$\begin{cases} C'(x)x^2 \ln|x| + D'(x)x^2 = 0 \\ C'(x)(2x\ln|x| + x) + D'(x)2x = 1. \end{cases}$$

Vidimo da je $D'(x) = -C'(x)\ln|x|$ pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu slijedi

$$C'(x) = \frac{1}{x}, \quad \Rightarrow \quad C(x) = \ln|x| + C_0, \quad C_0 \in \mathbb{R},$$

i

$$D'(x) = -\frac{\ln|x|}{x}, \quad \Rightarrow \quad D(x) = -\frac{1}{2}\ln^2|x| + D_0 \in \mathbb{R}.$$

Time je opće rješenje

$$y = C_0 x^2 \ln|x| + D_0 x^2 + \frac{x^2}{2}\ln^2|x|, \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

$\square$

9.4. Metoda neodređenih koeficijenata

Neka je dan diferencijalni operator

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1}\frac{d^n}{dx^{n-1}} + \ldots + a_0, \quad a_{n-1}, ..., a_0 \in \mathbb{R}$$

te linearna diferencijalna jednadžba s konstantnim koeficijentima $L(y) = f$. Pripadni polinom operatora L u oznaci P_L glasi

$$P_L(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Pretpostavimo da je desna strana f oblika

$$f(x) = P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + Q(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

pri čemu su P, Q polinomi. Označimo s $m = \max\{\deg P, \deg Q\}$. Razlikujemo dva slučaja:

1) Ako $\lambda = \alpha \pm \beta i$ nisu nultočke od P_L, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $L(y) = f$ tražimo u obliku

$$u_p(x) = \tilde{P}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + \tilde{Q}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2) Ako su $\lambda = \alpha \pm \beta i$ r-terostruka nultočka od P_L, partikularno rješenje diferencijalne jednadžbe $L(y) = f$ tražimo u obliku

$$u_p(x) = x^r\left(\tilde{P}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x + \tilde{Q}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x\right).$$

Pritom su u oba slučaja $\tilde{P}, \tilde{Q}$ polinomi stupnja m s *neodređenim koeficijentima*

Zadatak 9.6. *Pronađite opće rješenje:* $4y''' + y' = 2\sin\frac{x}{2}$

Rješenje: Pripadni polinom

$$P_L(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{4}\lambda = \lambda(\lambda^2 + \frac{1}{4}) = \lambda(\lambda - \frac{1}{2}i)(\lambda + \frac{1}{2}i).$$

Time je homogeno rješenje:

$$y_h(x) = C_1 + C_2\cos\frac{x}{2} + C_3\sin\frac{x}{2}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

Prepoznajemo da je desna strana oblika

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} = P(x)e^{0x}\cos\frac{x}{2} + Q(x)e^{0x}\sin\frac{x}{2},$$

gdje su

$$P = 0, \quad Q = \frac{1}{2}, \quad m = \max\{\deg P, \deg Q\} = 0.$$

Vidimo da su $0 \pm \frac{1}{2}i$ nultočke kratnosti $r = 1$. Po metodi neodređenih koeficijenata tražimo partikularno rješenje u obliku

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^r\left(\tilde{P}(x)e^{0x}\cos\frac{x}{2} + \tilde{Q}(x)e^{0x}\sin\frac{x}{2}\right) \\ &= x(A\cos\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2}) = Ax\cos\frac{x}{2} + Bx\sin\frac{x}{2} \end{aligned}$$

Uz pomoćni račun derivacija

$$\begin{aligned}
y_p'(x) &= A\cos\frac{x}{2} - \frac{A}{2}x\sin\frac{x}{2} + B\sin\frac{x}{2} + \frac{B}{2}x\cos\frac{x}{2}\\
y_p''(x) &= -A\sin\frac{x}{2} - \frac{A}{4}x\cos\frac{x}{2} + B\cos\frac{x}{2} - \frac{B}{4}x\sin\frac{x}{2}\\
y_p'''(x) &= -\frac{3A}{4}\cos\frac{x}{2} + \frac{A}{8}x\sin\frac{x}{2} - \frac{3B}{4}\sin\frac{x}{2} - \frac{B}{8}x\cos\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

dobivamo da je

$$y_p'''(x) + \frac{1}{4}y_p'(x) = -\frac{A}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{B}{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Jer partikularno rješenje zadovoljava $y_p'''(x) + \frac{1}{4}y_p'(x) = \frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ slijedi da je to moguće za $A = 0, B = -1$, tj.

$$y_p(x) = -x\sin\frac{x}{2}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe je

$$y = C_1 + C_2\cos\frac{x}{2} + C_3\sin\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2}, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 9.7. *Pronađite opće rješenje diferencijalne jednadžbe:*

$$y^{(3)} - 6y^{(2)} + 11y^{(1)} - 6y = e^x.$$

Rješenje:

$$\begin{aligned}
P_L(\lambda) &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6\\
&= (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\\
\Rightarrow \quad & y_h(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x}
\end{aligned}$$

Usporedimo obje metode za traženje partikularnog rješenja:

- Metoda varijacija konstante
  Opće rješenje tražimo u obliku $y(x) = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x} + C_3(x)e^{3x}$. Sustav (9.3) glasi

$$\left\{\begin{array}{llll}
C_1'(x)e^x & +C_2'(x)e^{2x} & +C_3'(x)e^{3x} & = 0\\
C_1'(x)e^x & +C_2'(x)2e^{2x} & +C_3'(x)3e^{3x} & = 0\\
C_1'(x)e^x & +C_2'(x)4e^{2x} & +C_3'(x)9e^{3x} & = e^x.
\end{array}\right.$$

  Eliminacijom C_1' ostaje

$$\left\{\begin{array}{lll}
C_2'(x)e^{2x} & +2C_3'(x)e^{3x} & = 0 \quad \Big/^{\cdot(-3)}\\
3C_2'(x)e^{2x} & +8C_3'(x)e^{3x} & = e^x
\end{array}\right\} +$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & 2C_3'(x)e^{3x} = e^x \\
& C_3'(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} \\
& C_3(x) = -\frac{1}{4}e^{-2x} + D_3 \\
\Rightarrow \quad & C_2'(x) = -2C_3'(x)e^x = -e^{-x} \\
& C_2(x) = e^{-x} + D_2 \\
\Rightarrow \quad & C_1'(x)e^x - e^x + \frac{1}{2}e^x = 0 \\
& C_1'(x) = \frac{1}{2} \\
& C_1(x) = \frac{1}{2}x + D_1
\end{aligned}$$

Što daje

$$\begin{aligned}
y(x) &= D_1e^x + D_2e^{2x} + D_3e^{3x} + (\frac{1}{2}xe^x + e^x - \frac{1}{4}e^x) \\
&= D_1e^x + D_2e^{2x} + D_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x, \quad D_1, D_2, D_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

- Metoda neodređenih koeficijenata

$$\begin{aligned}
f(x) = e^x \quad & \Rightarrow \quad m = 0, \lambda = 1, r = 1 \\
& \Rightarrow \quad y_p(x) = x(Ae^x) = Axe^x
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}
y_p'(x) &= A(e^x + xe^x) \\
y_p''(x) &= A(2e^x + xe^x) \\
y_p'''(x) &= A(3e^x + xe^x)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow (y_p^{(3)} - 6y_p^{(2)} + 11y_p^{(1)} - 6y_p)(x) = 2Ae^x = f(x) = e^x$$

Dakle, $y_p = \frac{1}{2}xe^x$ što daje opće rješenje

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$

□

U praksi metoda neodređenih koeficijenata je brža osobito ako je red diferencijalne jednadžbe veći ili jednak 3. S druge strane metoda varijacija konstantni se može koristiti kod traženja rješenja općih linearnih jednadžbi višeg reda, gdje koeficijenti nisu nužno konstantni.

9.5. Zadaci za vježbu

Zadatak 9.8. *Pronađite opće rješenje:* $y^{(4)} + y^{(3)} = \cos 4x + x + 1$.

Rješenje: Dani $P_L(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(\lambda + 1)$ daje opće homogene rješenje:

$$y_h(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x}.$$

Prepoznajemo $f(x) = \underbrace{\cos 4x}_{f_1(x)} + \underbrace{x + 1}_{f_2(x)} = f_1(x) + f_2(x)$ te radimo metodu neodređenih koeficijenata za svaki $f_i, i = 1, 2$.

1° $f_1(x) = \cos 4x$
Vidimo da $\lambda_1 = \pm 4i$ nisu nultočke polinom $P_L(\lambda)$ te je $m_1 = 0$ (jer je $P_1(x) = 1, Q_1(x) = 0$). Drugim riječima tražimo pripadno partikularno rješenje u obliku

$$y_{p1}(x) = A\cos 4x + B\sin 4x.$$

Pomoćni račun daje:

$$\begin{aligned} y'_{p1}(x) &= 4A(-\sin 4x) + 4B\cos 4x \\ y^{(2)}_{p1}(x) &= -16A\cos 4x - 16B\sin 4x \\ y^{(3)}_{p1}(x) &= 64A\sin 4x - 64B\cos 4x \\ y^{(4)}_{p1}(x) &= 256A\cos 4x + 256\sin 4x \end{aligned}$$

Dakle,

$$(y^{(4)}_{p1} + y^{(3)}_{p1})(x) = (256A - 64B)\cos 4x + (256B + 64A)\sin 4x = f_1(x) = \cos 4x.$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 256A - 64B = 1 \\ 256B + 64A = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{272}, B = -\frac{1}{1088}.$$

Dakle, $y_{p1}(x) = \frac{1}{272}\cos 4x - \frac{1}{1088}\sin 4x$.

2° $f_2 = x + 1 = (x+1)e^{0x}\cos(0x)$
Jer je $\lambda = 0$ nultočka od P_L kratnosti 3 imamo redom $m_2 = 1$ i $r_2 = 3$ što znači da tražimo partikularno rješenje u obliku:

$$y_{p2}(x) = x^3(Cx + D).$$

Uz pomoćni račun:

$$\begin{aligned} y'_{p2}(x) &= 4Cx^3 + 3Dx^2 \\ y^{(2)}_{p2}(x) &= 12Cx^2 + 6Dx \\ y^{(3)}_{p2}(x) &= 24Cx + 6D \\ y^{(4)}_{p2}(x) &= 24C \end{aligned}$$

slijedi da je

$$(y^{(4)}_{p2} + y^{(3)}_{p2})(x) = 24Cx + (6D + 24C) = f_2(x) = x + 1.$$

Time smo dobili $y_{p2}(x) = \frac{x^4}{24}$.

Sve zajedno opće rješenje dane jednadžbe je

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \\ &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4e^{-x} + \frac{1}{272}\cos 4x - \frac{1}{1088}\sin 4x + \frac{x^4}{24} \end{aligned}$$

□

Zadatak 9.9. *Odredite opće rješenje jednadžbe*

$$t^4y^{(3)} + 3t^3y^{(2)} = 2t.$$

Rješenje: Prvo pokušavamo odredite opće rješenje homogene jednadžbe. Prvo snizimo red diferencijalne jednadžbe: $z = y''$ čime dobivamo

$$t^4 z' + 3t^3 z = 0$$

što daje rješenje $z = \frac{C_1}{t^3}$. Neposrednim integriranjem dobivamo (do na promjenu konstante)

$$y = C_1 \frac{1}{t} + C_2 t + C_3, \;\; C_i \in \mathbb{R} \; i = 1, 2, 3.$$

Metodom varijacije konstante daje sustav:

$$\begin{cases} C_1'(t)\frac{1}{t} & +C_2'(t)t & +C_3'(t)1 & = 0 \\ C_1'(t) - \frac{1}{t^2} & +C_2'(t)1 & +C_3'(t)0 & = 0 \\ C_1'(t)\frac{2}{t^3} & +C_2'(t)0 & +C_3'(t)0 & = \frac{2}{t^3} \end{cases}$$

što daje rješenje $C_1(t) = t + D_1, C_2(t) = -\frac{1}{t} + D_2, C_3(t) = 2\ln t + D_3$ čime je opće rješenje

$$y(t) = D_1 \frac{1}{t} + D_2 t + D_3 + 2\ln t$$

U prethodnom zadatku možemo uvrstiti $x \mapsto x^\alpha$ kao oblik rješenja homogene jednadžbe. To daje

$$t^4 \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)t^{\alpha-3} + 3t^3 \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} = 0$$

što vrijedi ako i samo ako je $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2) + 3\alpha(\alpha-1) = 0$ što daje sva linearna nezavisna rješenja od ranije: $t \mapsto t^\alpha$, $\alpha = 0, \pm 1$. $\square$

10. Sustavi diferencijalnih jednadžbi

Dan je otvoren skup $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, (t_0, U_0) \in \Omega$ i preslikavanje $F \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Neka je dana početna zadaća prvog reda:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = F(t, U(t)), \\ U(t_0) = U_0. \end{cases} \tag{10.1}$$

Definicija 10.1. *Kažemo da je $U : I \to \mathbb{R}$ rješenje od (10.1) ako:*

1) $U \in C^1(I; R^n)$, I otvoreni interval koji sadrži t_0.

2) $\Gamma(U) = \{(t, U(t)) \,:\, t \in I\} \subset \Omega$.

3) $U(t_0) = U_0$.

4) $U'(t) = F(t, U(t))$, $t \in I$.

Napomena 10.2. *Jednadžbu višeg reda*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

možemo svesti na sustav prvog reda:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ y_3 = y'' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ y_3' = y''' = y_4 \\ \vdots \\ y_n' = y^{(n)} = f(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{array}$$

Uz vektor $Y = [y_1, y_2, \ldots, y_n]^\tau$ slijedi da se jednadžba višeg reda može zapisati kao

$$\frac{d}{dt}Y = \mathbf{A}Y + f(t, Y)e_n,$$

gdje je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad e_n = (0, \ldots, 0, 1)^\tau.$$

Prethodni postupak je bitan iz više razloga. Prvi razlog je taj što se recimo egzistencija i jedinstvenost rješenja može pokazati za sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda te se time može koristiti i kod rješenja diferencijalnih višeg reda. Drugi razlog je praktične prirode jer postoji puno numeričkih metoda za rješavanje sustava gdje je standardno jednadžbe višeg reda svesti na sustav.

Neka je desna strana sustava diferencijalnih jednažbi

$$U'(t) = F(t, U(t)),$$

$(t, U_1, U_2, \ldots, U_n) \mapsto F(t, U_1, U_2, \ldots, U_n)$ afina funkcija u zadnjih n-varijabli, tj.

$$F(t, U) = A(t)U + B(t), \quad A : I \to \mathbb{R}^{n \times n},\ B : I \to \mathbb{R}^n.$$

Tada se opće rješenje sustava može prikazati kao suma homogenog i partikularnog rješenja. Neka je $U_p : I \to \mathbb{R}^n$ partikularno rješenje, tj. $U_p' = AU_p + B$. Ako je $U : I \to \mathbb{R}^n$ neko rješenje sustava $U' = AU + B$ time je

$$\begin{aligned}(U - U_p)' &= U' - U_p' \\ &= AU + B - AU_p - B \\ &= A(U - U_p)\end{aligned}$$

i tada postoji $U_h : I \to \mathbb{R}^n$ rješenje homogenog sustava diferencijalnih jednadžbi $U_h' = AU_h$ tako da je $U - U_p = U_h$, tj.

$$U = U_p + U_h.$$

Vrijedi i više. Skup

$$\mathcal{U} = \{U : C^1(I; \mathbb{R}^n) \ : \ U \text{ je rješenje od } U' = AU\}$$

je vektorski potprostor $C^1(I; \mathbb{R}^n)$ konačne dimenzije n. Proces pronalaska rješenja linearnog sustava diferencijalnih jednadžbi ostaje isti:

1) pronađi prostor rješenja linearnog homogenog sustava jednadžbi

2) pronađi partikularno rješenje.

10.1. Homogeni linearni sustav s konstantnim koeficijentima

Napomena 10.3. *Neka je dan sustav diferencijalnih jednadžbi $U'(t) = AU(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Pretpostavimo da je matrica A dijagonalizibilna matrica te neka su (λ_i, q_i), $i = 1, \dots, n$ svojstveni parovi matrice ($Aq_i = \lambda_i q_1$). Označimo matricu*

$$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Tada je

$$AQ = [Aq_1, Aq_2, \dots, Aq_n] = [\lambda_1 q_1, \lambda_2 q_2, \dots, \lambda_n q_n] = QD$$

gdje je $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ dijagonalna matrica. Pritom možemo zapisati matricu A kao QDQ^{-1}. Iskoristimo li to u sustavu

$$\begin{aligned}U'(t) &= AU(t) = QDQ^{-1}U(t) \quad \backslash^{Q^{-1}} \\ Q^{-1}U'(t) &= DQ^{-1}U(t) \\ (Q^{-1}U(t))' &= D(Q^{-1}U(t)) \quad [V(t) = Q^{-1}U(t)] \\ V'(t) &= DV(t) \qquad \Longleftrightarrow \qquad v_i'(t) = \lambda_i v_i(t),\ i = 1, \dots, n.\end{aligned}$$

Dakle, $v_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$, gdje je $C_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}V(t) &= \sum_{i=1}^{n} (C_i e^{\lambda_i t}) e_i \qquad \backslash^{Q} \\ U(t) &= QV(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} Q e_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} C_i e^{\lambda_i t} q_i.\end{aligned}$$

Preslikavanja $t \mapsto e^{\lambda_i t} q_i$ razapinju prostor rješenja homogenog autonomnog sustava $U'(t) = AU(t)$.

Zadatak 10.1. *Odredite opće rješenje sustava*

$$\frac{d}{dt}U(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} U(t).$$

Rješenje:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1 = \ldots = (\lambda - 4)(\lambda - 2).$$

$$\Rightarrow \sigma(A) = \{2, 4\} \Rightarrow J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

- Za $\lambda_1 = 2$ odredimo $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I})$

$$(A - 2\mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}) = [\{q_1\}].$$

- Za $\lambda_2 = 4$ odredimo $\mathrm{Ker}(A - 4\mathrm{I})$

$$(A - 4\mathrm{I}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - 4\mathrm{I}) = [\{q_2\}].$$

$(\lambda_i, q_i), i = 1, 2$ su svojstveni parove dijagonalizibilne matrice A pa po Napomeni 10.3 slijedi da su $t \mapsto e^{\lambda_i t} q_i$ tražena linearno nezavisna rješenja sustava, tj. opće rješenje glasi

$$U(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} q_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} q_2 = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

□

Zadatak 10.2. *Pronađite rješenja sustava $U' = AU$, gdje je* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -5 & -3-\lambda & -7 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -(\lambda + 1)^3 \Rightarrow \sigma(A) = \{-1\}$$

Odredimo Jordanovu formu.

$$A + \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

čime smo dobili da je $\mathrm{Ker}(A+\mathrm{I}) = [\{q_1\}]$, tj. da je geometrijska kratnost od -1 jednaka 1. Dakle Jordanova forma je time jedinstveno određena i glasi

$$J_A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tražimo matricu prijelaza $Q = [q_1, q_2, q_3]$ takvu da je $AQ = QJ_A$.

$$AQ = QJ_A \iff \begin{cases} Aq_1 = -q_1 \\ Aq_2 = -q_2 + q_1 \\ Aq_3 = -q_3 + q_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (A+\mathrm{I})q_1 = 0 \\ (A+\mathrm{I})q_2 = q_1 \\ (A+\mathrm{I})q_3 = q_2 \end{cases}$$

Tražimo q_2 takav da je $(A+\mathrm{I})q_2 = q_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & -2 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Potrebno je samo partikularno rješenje sustava, pa možemo staviti da je $x_3 = 0$ što odmah daje $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, dakle $q_2 = (-1, 2, 0)^\tau$. Ponavljanjem postupka dobivamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & -7 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

za $x_3 = 0$ dobivamo $x_1 = 0, x_2 = -1$ što daje $q_3 = (0, -1, 0)^\tau$.

$$\begin{aligned} &U' = AU \\ &U' = QJ_AQ^{-1}U \quad \backslash^{Q^{-1}} \\ &(Q^{-1}U)' = J_A \underbrace{(Q^{-1}U)}_{V} \qquad V(t) = Q^{-1}U(t) \\ &V' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} V \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

što je jednostavno za riješiti ako krenemo redom v_3, v_2, v_1:

$$\begin{cases} v_3'(t) = -v_3(t) & \Rightarrow v_3(t) = C_3e^{-t} \\ v_2'(t) = -v_2(t) + v_3(t) & \Rightarrow v_2(t) = C_2e^{-t} + C_3te^{-t} \\ v_1'(t) = -v_1(t) + v_2(t) & \Rightarrow v_1(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3\frac{t^2}{2}e^{-t} \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} V(t) &= v_1(t)e_1 + v_2(t)e_2 + v_3(t)e_3 \\ &= C_1e^{-t}e_1 + C_2e^{-t}(e_2 + e_1t) + C_3e^{-t}(e_3 + te_2 + \frac{t^2}{2}e_1) \quad \backslash^{Q} \\ \Rightarrow U(t) &= QV(t) = C_1e^{-t}q_1 + C_2e^{-t}(q_2 + tq_1) + C_3e^{-t}(q_3 + tq_2 + \frac{t^2}{2}q_1). \end{aligned}$$

□

Napomena 10.4. *Za svaki lanac* $\{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ *takav da vrijedi*

$$\begin{aligned}
(A-\lambda \mathrm{I})q_k &= q_{k-1}\\
(A-\lambda \mathrm{I})q_{k-1} &= q_{k-2}\\
&\vdots\\
(A-\lambda \mathrm{I})q_2 &= q_1\\
(A-\lambda \mathrm{I})q_1 &= 0
\end{aligned}$$

možemo definirati skup $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ *od* k *linearno nezavisnih rješenja sustava* $U' = AU$ *oblika*

$$\begin{aligned}
U_1(t) &= e^{\lambda t} q_1\\
U_2(t) &= e^{\lambda t}(q_2 + t q_1)\\
U_3(t) &= e^{\lambda t}(q_3 + t q_2 + \frac{t^2}{2} q_1)\\
&\vdots\\
U_k(t) &= e^{\lambda t}(q_k + t q_{k-1} + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} q_1).
\end{aligned}$$

Zadatak 10.3. *Zapišite opće rješenje sustava* $U' = AU$*, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 10 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$k_A(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3) \Rightarrow \sigma(A) = \{2, 3\}$$

- $\lambda = 3$

$$A - 3\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -3\\ & -1 & 10 & 4\\ & & -1 & 0\\ & & & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -3\\ & -1 & 0 & 4\\ & & -1 & 0\\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 3x_4 = 0\\ -x_2 + 4x_4 = 0\\ -x_3 = 0 \end{cases}$$

  Ako stavimo $x_4 = 1$ dobivamo $x_1 = -3, x_2 = 4, x_3 = 0$, dakle vektor $q_4 = (-3, 4, 0, 1)^\tau$ i $\mathrm{Ker}(A - 3\mathrm{I}) = [\{q_4\}]$.

- $\lambda = 2$

$$A - 2\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -3\\ & 0 & 10 & 4\\ & & 0 & 0\\ & & & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 10 & 0\\ & & 0 & 0\\ & & & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ & 0 & 0 & 0\\ & & 0 & 0\\ & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0\\ x_4 = 0 \end{cases}.$$

  Time je $\mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I}) = [\{e_1, e_2\}]$.

Iz ovoga možemo zaključiti da je Jordanova forma matrice A

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}$$

jer dimenzija jezgre operatora $(A - 2\mathrm{I})$ je upravo broj elementarnih Jordanovih klijetki od svojstvene vrijednosti $\lambda = 2$.

Tražimo vektor v takav da $(A - 2\mathrm{I})^2 v = 0$ i $(A - 2\mathrm{I})v \neq 0$, tzv, generalizirani vektor svojstvene vrijednosti 2, ranga 2.

$$(A - 2\mathrm{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ & 0 & 0 & 4 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_4 = 0$$

Vidimo da za v uvjet $(A - 2\mathrm{I})^2 v = 0$ je ekvivalentan s time da je $v_4 = 0$. S druge strane uvjet $v \notin \mathrm{Ker}(A - 2\mathrm{I})$ ispunjen je ako je $v_3 \neq 0$ ili $v_4 \neq 0$. Dakle $v = e_3$ je jedan takav traženi vektor.

Proglasimo $q_3 = e_3$. Tada je $q_2 = (A - 2\mathrm{I})q_3 = (1, 10, 0, 0)^\tau$. Možemo staviti da je $q_1 = e_1$. Definiramo

$$Q = [q_1, q_2, q_3, q_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tada vrijedi $AQ = QJ_A$. Koristeći Napomenu 10.4 možemo zapisati pripadna linearno nezavisna rješenja:

$$\begin{aligned} U_1(t) &= e^{2t} q_1 \\ U_2(t) &= e^{2t} q_2 \\ U_3(t) &= e^{2t}(q_3 + t q_2) \\ U_4(t) &= e^{3t} q_4 \end{aligned}$$

čime je opće rješenje sustava:

$$U(t) = C_1 e^{2t} q_1 + C_2 e^{2t} q_2 + C_3 e^{2t}(q_3 + t q_2) + C_4 e^{3t} q_4.$$

□

10.2. Fundamentalna matrica

Neka je dan homogeni linearni sustav diferencijalnih jednadžbi:

$$U' = AU, \ A = A(t) \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n}). \tag{10.2}$$

Definicija 10.5 (Matrica Wronskog)**.** *Za niz vektorskih funkcija $U_1, U_2, \ldots, U_n : I \to \mathbb{R}^n$ definiramo matricu Wronskog*

$$W(t) = [U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)] : I \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

Od interesa je proučavati sljedeće matrice Wronskog:

Definicija 10.6 (Fundamentalna matrica)**.** *Za sustav* (10.2) *definiramo fundamentalnu matricu kao matricu Wronskog funkcija* U_i, $i = 1, , \ldots, n$ *koja su linearno nezavisna rješenja istog sustava.*

Teorem 10.7. *Neka su* $U_1, U_2, \ldots, U_n \in C(I; \mathbb{R}^n)$ *rješenje sustava* (10.2) *te pripadna* W *matrica Wronskog. Tada je ekvivalentno:*

- $U_1, U_2, \ldots, U_n \in C(I; \mathbb{R}^n)$ *su linearno nezavisne funkcije*
- $\det W(t) \neq 0$ *za neki* $t \in I$
- $\det W(t) \neq 0$ *za svaki* $t \in I$.

Primjer 10.8. *U Zadatku 10.1 pokazali smo da je za sustav*

$$\frac{d}{dt}U(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} U(t) \tag{10.3}$$

opće rješenje oblika:

$$U(t) = C_1 U_1(t) + C_2 U_2(t)$$

gdje su $U_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *i* $U_2(t) = e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Matrica Wronskog vektorskih funkcija* U_1 *i* U_2 *je*

$$W(t) = \begin{bmatrix} -e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & e^{4t} \end{bmatrix}$$

koja je ujedno i fundamentalna matrica sustava (10.3). *Uočimo da je* $\det W(t) = -2e^{6t} \neq 0$ *za svaki* $t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 10.4. *Neka su dane vektorske funkcije* $U(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ *i* $V(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}$ *te njihova matrica Wronskog* $W(t) = [U(t), V(t)]$. *Pokažite da je*

a) $\{U, V\}$ *linearno nezavisni skup u* $C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$

b) $\det W(t) = 0$ *na* $\mathbb{R}$.

Rješenje:

a) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gledamo

$$\begin{aligned} & \alpha U + \beta V = 0 \\ \iff \quad & \alpha \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

čime za $t = 0$ dobivamo da je $\alpha = 0$, dok je onda za $t = 1$ $\beta = 0$.

b)

$$\det W(t) = \begin{vmatrix} t & t^2 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 - t^2 = 0.$$

Pritom a) i b) nisu u kontradikciji. Ovo samo znači da ne postoji matrična funkcija $A \in C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^{n \times n})$ takva da su U, V rješenje sustava $Z' = AZ$. □

Zadatak 10.5. *Ako su $\Phi(t), \Psi(t)$ fundamentalne matrice sustava (10.2), tada postoji konstanta regularna matrica $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $\Psi(t) = \Phi(t)P$.*

Rješenje: Neka su $\Phi(t), \Psi(t)$ fundamentalne matrice sustava $U' = AU$. Tada je $\Phi(t)$ regularna za svaki $t \in I$, tj. $t \mapsto \Phi^{-1}(t)$ je dobro definirano preslikavanje. Jer je

$$\Phi^{-1}(t)\Phi(t) = \mathrm{I}$$

deriviranjem dobivamo

$$(\Phi^{-1}(t))'\Phi(t) + \Phi^{-1}(t)(\Phi(t))' = 0,$$

tj. $(\Phi^{-1}(t))' = -\Phi^{-1}(t)(\Phi(t))'\Phi^{-1}(t)$. Pokazat ćemo da je derivacija izraza $\Phi^{-1}(t)\Psi(t)$ upravo jednaka nuli.

$$\begin{aligned}
(\Phi^{-1}(t)\Psi(t))' &= (\Phi^{-1}(t))'\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\Psi'(t) \\
&= -\Phi^{-1}(t)(\Phi(t))'\Phi^{-1}(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)\Psi'(t) \\
&= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Phi(t)\Phi^{-1}(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) \\
&= -\Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) + \Phi^{-1}(t)A(t)\Psi(t) = 0
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da postoji $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $\Phi^{-1}(t)\Psi(t) = P$, odnosno $\Psi(t) = \Phi(t)P$. Matrica P je regularna kao produkt regularnih matrica. □

Opće rješenje početne zadaće

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) & A : I \to R^{n\times n},\ B : I \to \mathbb{R}^n \\ U(t_0) = U_0 \end{cases}$$

možemo zapisati kao

$$U(t) = W(t)W(t_0)^{-1}U_0 + W(t)\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)B(s)\,ds. \tag{10.4}$$

Može se pokazati da je $\Phi(t,s) = W(t)W^{-1}(s)$ neovisna o odabiru fundamentalne matrice W.

Zadatak 10.6. *Riješite sustav:*

$$\begin{cases} U'(t) = A(t)U(t) + B(t) \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

gdje je $A(t) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Rješenje:

$$\det(A - \lambda\mathrm{I}) = \ldots = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4) \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) = \{1,2,4\}$$

Pripadni svojstveni parovi matrice A su: $(1,(-2,1,0)^\tau), (2,(0,0,1)^\tau), (4,(1,1,0)^\tau)$, čime je $A = QDQ^{-1}$, gdje je

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ D = \mathrm{diag}(1,2,4).$$

Traženo opće rješenje homogene jednadžbe $U' = AU$ je

$$U(t) = C_1 \underbrace{e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_1(t)} + C_2 \underbrace{e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{U_2(t)} + C_3 \underbrace{e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{U_3(t)},$$

čime je fundamentalna matrica upravo:

$$W(t) = [U_1(t), U_2(t), U_3(t)] = \begin{bmatrix} -2e^t & 0 & e^{4t} \\ e^t & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix}.$$

Koristeći formulu (10.4) slijedi da je traženo rješenje:

$$\begin{aligned} U(t) &= W(t)W(t_0)^{-1}U_0 + W(t)\int_{t_0}^{t} W^{-1}(s)B(s)\,ds \\ &= \begin{bmatrix} -2e^t & 0 & e^{4t} \\ e^t & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + \int_0^t \begin{bmatrix} -2e^t & 0 & e^{4t} \\ e^t & 0 & e^{4t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2e^s & 0 & e^{4s} \\ e^s & 0 & e^{4s} \\ 0 & e^{2s} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^s \end{pmatrix} ds \\ &= \ldots = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^t + e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \\ 2e^{2t} - e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Napomena 10.9 (Eksponencijalna funkcija)**.** *Definiramo*

$$E(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Na predavanjima ste pokazali

1) $E(0) = \mathrm{I}$
2) $E'(t) = AE(t) = E(t)A$
3) $\det E(t) \neq 0$ *za svaki* t.

dakle, E je fundamentalna matrica sustava $U' = AU$. Ako je poznata Jordanova forma matrice A u oznaci J_A te matrica prijelaza Q takva da je $AQ = QJ_A$, eksponencijalnu matricu računamo direktno

$$E(t) = e^{tA} = Qe^{tJ_A}Q^{-1}$$

gdje za elementarnu Jordanovu klijetku vrijedi

$$E(\lambda, n) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix}, \qquad e^{tE(\lambda,n)} = e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \ldots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \ldots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

To nam u praksi daje alternativni način računanja fundamentalne matrice sustava, što je osobito korisno ako se traži rješenje početnog problema $U' = AU$, $U(0) = U_0$ jer je traženo rješenje $U(t) = E(t)U_0$.

Zadatak 10.7. *Neka su $A, B \in C(I; \mathbb{R}^{n\times n})$, $I \subset \mathbb{R}$ otvoreni interval te neka matrična funkcija $t \mapsto Z(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zadovoljava*

$$Z'(t) = A(t)Z(t) + Z(t)B(t). \tag{10.5}$$

Označimo s X i Y fundamentalne matrice sustava $U' = AU$ i $U' = B^\tau U$, respektivno. Pokažite sljedeću tvrdnju:
Z je fundamentalna matrica od (10.5) ako i samo ako postoji $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takvo da $Z = XPY^\tau$.

Rješenje: $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $Z(t) = X(t)PY(t)^\tau$. Tada je

$$\begin{aligned} Z'(t) &= X'(t)PY(t)^\tau + X(t)P(Y(t)^\tau)' \\ &= A(t)X(t)PY(t)^\tau + X(t)PY(t)^\tau B(t). \\ &= A(t)Z(t) + Z(t)B(t), \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili da je $Y(t)' = B^\tau(t)Y(t)$, tj. transponirano $(Y(t)^\tau)' = Y^\tau(t)B(t)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Pokazat ćemo da je preslikavanje $\phi(t) = X^{-1}(t)Z(t)Y^{-\tau}(t)$ konstantno.

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= (X^{-1}(t))'Z(t)Y^{-\tau}(t) + X^{-1}(t)Z'(t)Y^{-\tau}(t) + X^{-1}(t)Z(t)(Y^{-\tau}(t))' \\ &= -X^{-1}(t)A(t)X(t)X^{-1}(t)Z(t)Y^{-\tau}(t) + X^{-1}(t)A(t)Z(t)Y^{-\tau}(t) \\ &\quad + X^{-1}(t)Z(t)B(t)Y^{-\tau}(t) - X^{-1}(t)Z(t)Y^{-\tau}(t)Y^\tau(t)B(t)Y^{-\tau}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, postoji $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je $Z = XPY^\tau$. □

10.3. Zadaci za vježbu

Zadatak 10.8. *Pronađite opće rješenje sustava $U' = AU$ gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I}) = (\lambda - 2)^6$$

$$(A-2\mathrm{I}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} r(A-2\mathrm{I}) = 4 \Rightarrow d(A-2\mathrm{I}) = 2 \\ \Rightarrow \text{dvije elementarne Jordanove klijetke} \end{array}$$

$$(A-2\mathrm{I})^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r((A-2\mathrm{I})^2) = 2$$

$$(A-2\mathrm{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r((A-2\mathrm{I})^3) = 1$$

$$(A-2\mathrm{I})^4 = 0$$

čime je Jordanova forma jednaka

$$J_A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tražimo matricu prijelaza $Q = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6]$ takvu da je $AQ = QJ_A$. Pritom za q_4 vrijedi $(A-2\mathrm{I})^4 q_4 = 0$ i $(A-2\mathrm{I})^3 q_4 \neq 0$. Na primjer $q_4 = e_4$ to zadovoljava jer je $(A-2\mathrm{I})^3 e_4 = e_1 \neq 0$.

$$\begin{aligned} q_3 &= (A-2\mathrm{I})q_4 = e_3 \\ q_2 &= (A-2\mathrm{I})q_3 = e_1 + e_2 \\ q_1 &= (A-2\mathrm{I})q_2 = e_1 \end{aligned}$$

Slično, tražimo q_6 takav da je $(A-2\mathrm{I})^2 q_6 = 0$ i $(A-2\mathrm{I})q_6 \neq 0$, ali i da $q_6 \notin [\{q_1, q_2, q_3, q_4\}]$. Iz prethodnog računa znamo

$$\mathrm{Ker}((A-2\mathrm{I})^2) = \{(\alpha, \beta, \gamma+\delta, -2\delta, \gamma, \delta)^\tau \ : \ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

pa ako stavimo $\delta = 1, \alpha = \beta = \gamma = 0$, slijedi da je $q_6 = (0, 0, 1, -2, 0, 1)^\tau$ traženi vektor. Naime, očito $q_6 \notin [\{q_1, q_2, q_3, q_4\}] = [\{e_1, e_2, e_3, e_4\}]$, dok je $q_5 = (A-2\mathrm{I})q_6 = (1, 1-1, 0, 1, 0)^\tau \neq 0$.

Time je opće rješenje po Napomeni 10.4

$$\begin{aligned} U(t) = {} & C_1 e^2 t q_1 + C_2 e^{2t}(q_2 + t q_1) + C_3 e^{2t}(q_3 + t q_2 + \frac{t^2}{2} q_1) \\ & + C_4 e^{2t}(q_4 + t q_3 + \frac{t^2}{2} q_2 + \frac{t^3}{6} q_1) + C_5 e^{2t} q_5 \\ & + C_6 e^{2t}(q_6 + t q_5), \quad C_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, 6. \end{aligned}$$

□

Zadatak 10.9. *Pronađite opće rješenje sustava: $U' = AU$ ako je*

a) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & 2 \\ 7 & -4 & -12 & 10 \\ -6 & 6 & 13 & -8 \\ -3 & 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -11 & 11 \\ 3 & -12 & -42 & 42 \\ -2 & 12 & 37 & -34 \\ -1 & 7 & 20 & -17 \end{bmatrix}$

Hint: $\sigma(A) = \{3\}$ u oba slučaja s time da u a) slučaju imate dvije Jordanove klijetke reda 2, dok pod b) dvije različite elementarne Jordanove klijetke.

Bibliografija

[1] M. Alić, *Obične diferencijalne jednadžbe*, Matematički odjel PMF, Zagreb, 1994.

[2] B.P. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1996.

[3] K.B. Howell, *Ordinary differential equations: an introduction to the fundamentals*, CRC Press, 2019.

[4] Z. Tutek, M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednadžbe*, skripta 2022.