MODULARNE FORME: PRVA ZADAĆA

(1) Odredite predstavnike klasa $\Gamma_1(2)\backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ i skicirajte (neku) fundamentalnu domenu grupe $\Gamma_1(2)$. Odredite njene eliptičke točke.

(2) Neka je $p > 2$ prost broj i neka je $\Gamma < \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ kongruencijska podgrupa nivoa p. Definirajmo skup

$$X = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})/(\pm 1) - (0,0).$$

Grupa $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ djeluje na taj skup formulom

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)(u,v) = (au+bv, cu+dv), \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), (u,v) \in X.$$

Označimo sa $\tilde{\Gamma}$ sliku od Γ po mod p redukciji $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

a) Dokažite da je broj orbita djelovanja od $\tilde{\Gamma}$ na X jednak broju kaspova od Γ.

b) Dokažite da je broj orbita od $\tilde{\Gamma}$ jednak

$$\frac{1}{[\Gamma : \Gamma(p)]}\left(\frac{p^2-1}{2}\delta + \frac{p-1}{2}\#\{\gamma \in \tilde{\Gamma} : Tr(\gamma) = \pm 2 \ \text{ i } \gamma \neq \pm I\}\right),$$

gdje je $\delta = 2$ ako $-I \in \Gamma$, inače $\delta = 1$. (Uputa: koristite Burnsideovu lemu.)

c) Koliko kaspova imaju podgrupe $\Gamma(p)$, $\Gamma_0(p)$ i $\Gamma_1(p)$?