Korijeni polinoma, Lee-Yangov teorem i jednadžba provođenja topline

Matija Kazalicki

1 Uvod

U ovom članku bavit ćemo se polinomima čije se sve nultočke nalaze ili na jediničnoj kružnici (u kompleksnoj ravnini) ili čije su sve nultočke realni brojevi. Posebno je zanimljivo što ćemo za istraživanje te klase polinoma između ostaloga koristiti i metode proizašle iz statističke mehanike (Lee-Yangov teorem) i termodinamike (jednadžba provođenja topline). Ove ideje ćemo ilustrirati na sljedećem primjeru. [1]

Zadatak 1. Neka su $\beta \in (0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da se sve nultočke polinoma

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{k(n-k)} x^k$$

nalaze na jediničnoj kružnici $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Ovaj zadatak ćemo riješiti na tri načina.

2 Tri rješenja

2.1 Lee-Yangov teorem

Neka je G konačan graf (bez petlji) sa skupom vrhova V i bridova E. Promatramo funkcije $\sigma : V \to \{-1, 1\}$ koje se nazivaju spin funkcije. Ako za neki $v \in V$ vrijedi $\sigma(v) = 1$ onda kažemo da vrh v ima pozitivan spin, inače negativan. Sa $m(\sigma)$ označavamo broj vrhova pozitivnog spina te sa $d(\sigma)$ broj bridova s vrhovima različitog spina. Za $\beta \in \mathbb{R}$ definiramo polinom

$$Z_\beta(x) = \sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} x^{m(\sigma)},$$

gdje sumiramo po svim spin funkcijama σ.

Teorem 2.1 (Lee-Yang Circle Theorem)**.** *Neka je $\beta \in (0,1)$. Tada se sve nultočke od $\mathbb{Z}_\beta(x)$ nalaze na jediničnoj kružnici.*

Primjer. Ako primijenimo prethodni teorem na potpuni graf sa n vrhova dobit ćemo $Z_\beta(x) = f_n(x)$ (uvjerite se u to) pa tvrdnja iz Zadatka 1. slijedi.

[1] Ovaj cijeli članak je motiviran pitanjem o nultočkama polinoma $f_n(x)$ (i raznim odgovorima) na web stranici `https://mathoverflow.net/questions/299304/a-family-of-polynomials-whose-zeros-all-lie-on-the-unit-circle/299334`.

Za dokaz teorema (prema [2]) trebat će nam poopćenje polinoma $Z_\beta(x)$ na više varijabli. Označimo sa

$$Z_{(\beta,G)}(x_1,x_2,\ldots,x_n) := Z_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \sum_\sigma \beta^{d(\sigma)} \prod_{v\in V,\sigma(v)=1} x_v,$$

gdje je $\#V = n$.

Lema 2.2.

$$Z_\beta(x_1,x_2,\ldots,x_n) \neq 0 \text{ ako je } |x_i| > 1 \text{ za svaki } 1 \leq i \leq n. \tag{2.1}$$

Dokaz leme. Tvrdnju ćemo dokazati induktivno. Za graf G kažemo da ima Lee-Yangovo (LY) svojstvo ako svi njegovi inducirani podgrafovi (i on sam) zadovoljavaju tvrdnju (2.1). (Graf (V',E') je podgraf grafa (V,E) ako je $V' \subset V$ i $E' \subset E$. Podgraf je induciran (skupom vrhova V') ako je skup bridova E' maksimalan moguć.)

Uočimo da graf koji se sastoji od jednog vrha ima LY svojstvo. Ako graf ima jedan brid i dva vrha onda

$$Z_\beta(x_1,x_2) = 1 + \beta(x_1+x_2) + x_1x_2 = 0 \iff x_1 = \frac{1+\beta x_2}{\beta + x_2}.$$

Lako se vidi da $|x_2| > 1 \implies |x_1| < 1$ i obratno (jer Mobiusova transformacija $z \mapsto \frac{\beta z+1}{z+\beta}$ preslikava unutrašnjost jedinične kružnice izvan kružnice - dokažite to!) pa i taj graf ima LY svojstvo.

Ako su G_1 i G_2 disjunktni grafovi i $G = G_1 \cup G_2$ tada $Z_{(\beta,G} = Z_{(\beta,G_1)}Z_{(\beta,G_1)}$ iz čega slijedi da ako grafovi G_1 i G_2 imaju LY svojstvo da to svojstvo onda ima i graf G. Posebno, disjunktna unija bridova i izoliranih vrhova ima LY svojstvo.

Kontrakcija grafa je graf dobiven identifikacijom neka dva njegova nesusjedna vrha (primjetimo da kontrakcijom jednostavnog grafa možemo dobiti graf sa višestrukim bridovima, ali ne i sa petljama). Svaki graf $G = (V,E)$ (bez petlji) se može dobiti kontrakcijom grafa koji je disjunktna unija $\#E$ bridova i odgovarajućeg broja izoliranih bridova (dokažite to), tako da je za dokaz leme dovoljno dokazati da kontrakcija čuva LY svojstvo.

Pretpostavimo da G graf koji ima LY svojstvo. Neka su v_1 i v_2 vrhovi koji nisu spojeni bridom. Neka je G' graf dobiven kontrakcijom vrhova v_1 i v_2 u vrh koji ćemo označiti s v_2. Uočimo da postoji bijekcija između svih spinova σ' grafa G' i spinova σ grafa G za koje je $\sigma(v_1) = \sigma(v_2)$. Očito vrijedi da je $d(\sigma) = d(\sigma')$, odnosno $m(\sigma) = m(\sigma')$ ako je $\sigma(v_1) = -1$ te $m(\sigma) = m(\sigma') + 1$ ako je $\sigma(v_1) = 1$. Iz toga slijeda da ako particijski polinom grafa G zapišemo kao

$$Z_{(\beta,G)}(x_1,x_2\ldots,x_n) = Ax_1x_2 + Bx_1 + Cx_2 + D,$$

gdje su A, B, C i D polinomi u varijablama $x_3, x_4, \ldots, x_n$, da je onda

$$Z_{(\beta,G')}(x_2,\ldots,x_n) = Ax_2 + D.$$

Fiksirajmo $(x_3,\ldots,x_n)$ takve da je $|x_i| > 1$ za sve $i \geq 3$ i uvrstimo $x_1 = x_2 = x$. Tada kvadratna jednadžba $Ax^2 + (B+C)x + D = 0$ nema rješenja za $|x| > 1$ pa ako pretpostavimo da je $A \neq 0$ slijedi da je apsolutna vrijednost umnoška rješenja $|\alpha_1\alpha_2| = |-\frac{D}{A}| \leq 1$. Ako je $Z_{(\beta,G')} = 0$ onda je $x_2 = -\frac{D}{A}$, odnosno $|x_2| = |\frac{D}{A}| \leq 1$ pa možemo zaključiti da $Z_{(\beta,G')}(x_2,\ldots,x_n) = 0$ nema rješenja za ako je $|x_i| > 0$ za sve i. Pokažimo sada da A ne može biti jednak nuli.

Neka je G_3 graf dobiven iz grafa G izbacivanjem vrhova v_1 i v_2 (koji nisu susjedni). Spin funkciju

σ grafa G_3 proširujemo do spin funkcije $\tilde{\sigma}$ grafa G tako da definiramo $\tilde{\sigma}(v_1) = \tilde{\sigma}(v_2) = 1$. Tada imamo

$$
\begin{aligned}
Z_{(\beta,G_3)}(x_3,\ldots,x_n) &= \sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} \prod_{\substack{v\in V(G_3)\\ \sigma(v)=1}} x_v \\
&= \sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} \frac{\prod\limits_{v\in V(G_3)} x_v}{\prod\limits_{\substack{v\in V(G_3)\\ \sigma(v)=-1}} x_v} \\
&= \left(\prod_{v\in V(G)-\{v_1,v_2\}} x_v \right) \sum_{\tilde{\sigma}} \frac{\beta^{d(\tilde{\sigma})}}{\prod\limits_{\substack{v\in V(G)-\{v_1,v_2\}\\ \tilde{\sigma}(v)=-1}} \beta^{r(v)} x_v},
\end{aligned}
$$

gdje je $r(v)$ ukupan broj bridova koji spajaju vrh v sa vrhovima v_1 i v_2. Iz ovoga slijedi da je

$$
\beta^{\sum_v r(v)} Z_{(\beta,G_3)}(x_3,\ldots,x_n) = A(\beta^{r(v_3)}x_3,\ldots,\beta^{r(v_n)}x_n).
$$

Budući da je G_3 podgraf grafa G (koji ima LY svojstvo), slijedi da je $A \neq 0$. Dakle, pokazali smo da za graf G' vrijedi (2.1). Kako je svaki podgraf od G' ili podgraf od G ili se može dobiti kontrakcijom podgrafa od G, primjenom prethodnog argumenta možemo zaključiti da i za njega vrijedi (2.1), odnosno da i graf G' ima LY svojstvo. $\square$

Dokaz teorema. Prema Lemi, $Z_{(\beta,G)}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ ako je $|x_i| > 1$ za sve i. Primijetimo

$$
\begin{aligned}
Z_{(\beta,G)}(x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}) &= \sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} \prod_{v,\sigma(v)=1} x_v^{-1} \\
&= \frac{\sum_\sigma \beta^{d(\sigma)} \prod_{v,\sigma(v)=-1} x_v}{\prod_v x_v}.
\end{aligned}
$$

Spin funkcije dolaze u parovima $(\sigma,-\sigma)$ (vrijedi $d(\sigma) = d(-\sigma)$) pa imamo

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} \prod_{v,\sigma(v)=1} x_v &= \sum_{-\sigma} \beta^{d(-\sigma)} \prod_{v,-\sigma(v)=1} x_v \\
&= \sum_{\sigma} \beta^{d(\sigma)} \prod_{v,\sigma(v)=-1} x_v.
\end{aligned}
$$

Odnosno iz

$$
Z_{(\beta,G)}(x_1^{-1},\ldots,x_n^{-1}) = \frac{Z_{(\beta,G)}(x_1,\ldots,x_n)}{\prod_v x_v}
$$

slijedi da je $Z_{(\beta,G)}(x_1,\ldots,x_n) \neq 0$ ako je $|x_i| < 1$ za sve i. Tvrdnja teorema sada slijedi ako specijaliziramo $Z_{(\beta,G)}(x,x,\ldots,x)$. $\square$

2.2 Klasični teoremi o nultočkama polinoma

Krenut ćemo sa klasičnim teoremom iz kompleksne analize.

Teorem 2.3 (Gauss-Lucas)**.** *Neka je $P(z) \in \mathbb{C}[z]$ polinom stupnja n sa kompleksnim koeficientima. Tada se nultočke polinoma $P'(z)$ nalaze u konveksnoj ljusci nultočaka polinoma $P(z)$.*

Dokaz. Neka je $P(z) = \alpha \prod_{i=1}^{n}(z - a_i)$. Ako je $P(z_0) \neq 0$, onda

$$\frac{P'(z_0)}{P(z_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_0 - a_i}.$$

Posebno, ako je $P'(z_0) = 0$ (i $P(z_0) \neq 0$), onda $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z_0 - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{z} - \overline{a_i}}{|z_0 - a_i|^2} = 0$. Odnosno

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_i|^2}\right)\overline{z_0} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_i|^2}\overline{a_i} \quad \text{i} \quad z_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_i|^2} a_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|z_0 - a_i|^2}}.$$

Budući da je z_0 oblika $z_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$ gdje su λ_i nenegativni i $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ slijedi da se z_0 nalazi u konveksnoj ljusci nultočaka polinoma $P(z)$ (zašto?). □

Ako Gauss-Lucasov teorem primijenimo na polinom čije se sve nultočke nalaze na jediničnoj kružnici, slijedit će da se nultočke njegove derivacije nalaze u jediničnom krugu. Ovaj teorem daje obrat te tvrdnje.

Teorem 2.4 (A. Cohn, 1922 [1])**.** *Neka je $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ polinom stupnja n s kompleksnim koeficijentima. Tada se nultočke polinoma $p_n(z)$ nalaze na jediničnoj kružnici ako i samo ako*

a) $a_{n-k} = \mu \overline{a_k}$, za sve $0 \leq k \leq n$, gdje je $|\mu| = 1$,

b) sve nultočke polinoma $p_n'(z)$ se nalaze u jediničnom krugu.

Koristeći Cohnov teorem možemo riješiti Zadatak 1.

Primjer (Polinomi $f_n(x)$). Tvrdnju dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$, $f_1(x) = 1 + x$ pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da se sve nultočke polinoma $f_{n-1}(x)$ nalaze na jediničnoj kružnici. Primijetimo da je uvjet (a) iz Cohnovog teorema zadovoljen za $f_n(x)$ ako uzmemo $\mu = 1$. Za provjeru uvjeta (b) računamo

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^{k(n-k)} k x^{k-1}, \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \beta^{(k+1)(n-k-1)} (k+1) x^k, \\
&= n\beta^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \beta^{k(n-1-k)} \left(\frac{x}{\beta}\right)^k, \\
&= n\beta^{n-1} f_{n-1}\left(\frac{x}{\beta}\right).
\end{aligned}$$

Tada za svaku nultočku x_0 polinoma $f_n'(x)$ vrijedi $n\beta^{n-1} f_{n-1}(\frac{x_0}{\beta}) = 0$, pa je prema pretpostavci $\frac{x_0}{\beta} = z_0$ za neki z_0 na jediničnoj kružnici. Kako je $\beta \in (0, 1)$, x_0 se nalazi unutar jediničnog kruga pa je uvjet (b) Cohnovog teorema zadovoljen, odnosno nultočke od $f_n(x)$ se nalaze na jediničnoj kružnici.

2.3 Jednadžba provođenja

Jednadžba provođenja topline (eng. heat equation) je parabolička parcijalna diferencijalna jednadžba koja opisuje distribuciju topline u nekom području kao funkciju o vremenu. U jednodimenzionalnom slučaju, ako funkcija $u(x,t)$ opisuje temperaturu u trenutku t u točki x (za (x,t) u nekoj domeni $\mathcal{D}$), onda ona zadovoljava jednadžbu provođenja ako za neki $\alpha > 0$ vrijedi

$$\partial_t u(x,t) - \alpha \partial_{xx} u(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \mathcal{D}.$$

Mogli bi reći, što je graf funkcije $u(t,\cdot)$ "strmiji" to će se brže "izgladiti".

Rješenja jednadžbe provođenja zadovoljavaju takozvani jaki princip maksimuma. Ugrubo, princip kaže da ako se maksimum rješenja postiže u unutrašnjosti (povezane) domene (a ne na rubu), onda je funkcija konstantna. Intuitivno to ima smisla jer ako nema unutarnjih izvora topline (izvori topline se početnim uvjetima mogu "smjestiti" na rub područja), toplina se raspršuje po unutrašnjosti.

Kao posljedicu jakog principa maksimuma navodimo sljedeći teorem koji nećemo dokazivati (za preciznu formulaciju i dokaz pogledajte Theorem 2.1. u [3]).

Teorem 2.5 (Sturm)**.** *Neka je $t_0 < t_1$. Tada broj nultočaka funkcije $u(\cdot, t_1)$ nije veći od broja nultočaka funkcije $u(\cdot, t_0)$.*

Dokažimo[2] sada da se sve nultočke polinoma $f_n(x)$ nalaze na jediničnoj kružnici. Ideja je smjestiti polinom $f_n(x)$ u familiju polinoma parametriziranih sa β i onda tvrdnju dokazati za sve članove familije koristeć trivijalnu činjenicu da tvrdnja vrijedi za $\beta = 1$ (kao i za $\beta = 0$). Zamjenom varijabli $\beta = e^t$ i $x = e^{iu}$, gdje su $t \in \langle -\infty, 0]$ i $u \in [0, 2\pi\rangle$, dobivamo

$$f_n(x) = \exp\left[t\left(\frac{n}{2}\right)^2 + i\left(\frac{n}{2}\right)u\right] \cdot F_t(y),$$

gdje je

$$F_t(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \exp\left[-t(k-\frac{n}{2})^2 + i(k-\frac{n}{2})u\right]$$

realna funkcija (jer je k-ti član sume kompleksno konjugiran $n-k$-tom članu) za koju vrijedi $F_t(u + 2\pi) = (-1)^n F_t(u)$ za sve u i t. Primijetimo da funkcija $F_t(u)$ zadovoljava jednadžbu provođenja:

$$\partial_t F_t(u) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{(2k-n)^2}{4}\binom{n}{k} \exp\left[-t(k-\frac{n}{2})^2 + i(k-\frac{n}{2})u\right] = \partial_{uu} F_t(u).$$

Iz Sturmovog teorema slijeda da se povećanjem t-a broj nultočaka funkcije $F_t(u)$ ne smanjuje. Za $t = 0$ funkcija $F_0(u)$ ima nultočku n-tog redu u $u = \pi$ (koja odgovara, za $\beta = 1$, nultočki n-tog reda polinoma $f_n(x) = (x+1)^n$), pa zaključujemo da i za $t < 0$ funkcija $F_t(u)$ ima n nultočaka (ne može imati više od n nultočaka jer je $f_n(x)$ polinom stupnja n). Tvrdnja sad slijedi.

3 Još o jednadžbi provođenja

Krenimo sad u suprotnom smjeru[3], dani polinoma ćemo smjestiti u familiju koja zadovoljava jednadžbu provođenja i vidjeti što možemo reći o nultočkama polinoma te familije.

[2] Prezentirat ćemo elegantan dokaz N. Elkiesa.

[3] Ovaj odjeljak prati članak T. Tao-a"Heat flow and zeros of polynomials" objavljen na blogu "What's new": `https://terrytao.wordpress.com/2017/10/17/heat-flow-and-zeroes-of-polynomials/`

Neka je $P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ polinom stupnja n s kompleksnim koeficijentima. Možemo ga faktorizirati

$$P(z) = (z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

gdje su $z_1, \ldots, z_n$ njegove ne nužno različite nultočke. Konstruirat ćemo familiju polinoma $P_t(z) = P(t, z)$ koja sadrži polinom $P(z)$ (tj. $P(0, z) = P(z)$) i koja zadovoljava

$$\partial_t P(t, z) = \partial_{zz} P(t, z).$$

Lako se vidi da je polinom $P(t, z)$ jednoznačno dan formulom

$$P(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \partial_z^{2j} P(0, z).$$

Proučit ćemo kako se nultočke $z_i(t)$ polinoma $P_t(z)$ mijenjaju ("gibaju") u vremenu t. Jednadžbe gibanja dobivamo implicitnim deriviranjem jednadžbe $P(t, z_i(t)) = 0$,

$$\partial_{zz} P(t, z_i(t)) + \partial_t z_i(t) \partial_z P(t, z_i(t)) = 0.$$

Radi jednostavnosti oznaka, nećemo pisati ovisnost o vremenu. Iz faktorizacije polinoma $P(z)$ imamo

$$\partial_z P(z_i) = \prod_{j:j \neq i} (z_i - z_j),$$

odnosno

$$\partial_{zz} P(z_i) = 2 \sum_{k:k \neq i} \sum_{j:j \neq i,k} (z_i - z_j),$$

iz čega slijedi jednadžba gibanja

$$\partial_t z_i = \sum_{k:k \neq i} \frac{2}{z_k - z_i}$$

ako izbjegavamo vremena u kojima polinom $P_t(z)$ ima višestruke nultočke.

Iz jednadžbi gibanja slijedi da ako su u nekom trenutku sve nultočke polinoma realne, da će one nastavit biti realne sve dok su međusobno različite. Pretpostavimo da je to slučaj (recimo u trenutku $t = 0$) i te realne nultočke označimo sa $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Dakle vrijedi

$$\partial_t x_i = \sum_{k:k \neq i} \frac{2}{x_k - x_i}.$$

Ako definiramo sa H "entropiju" (logaritam diskriminante polinoma $P_t(z)$)

$$H := - \sum_{i,j:i \neq j} \log |x_i - x_j|,$$

onda vrijedi $\partial_t x_i = \frac{\partial H}{\partial x_i}$. Vrijedi da je $\partial_t H = 4E$ gdje je E "energija"

$$
\begin{aligned}
E &:= \frac{1}{4}\sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial x_i}\right)^2 \\
&= \sum_i \left(\sum_{k:k\neq i} \frac{1}{x_k - x_i}\right)^2 \\
&= \sum_{i,k:i\neq k} \frac{1}{(x_k - x_i)^2} + 2\sum_{i,j,k} \frac{1}{(x_k - x_i)(x_j - x_i)} \\
&= \sum_{i,k:i\neq k} \frac{1}{(x_k - x_i)^2}.
\end{aligned}
$$

Iz ovoga slijedi da su nultočke polinoma $P_t(z)$ realne i različite i za sve $t < 0$ (jer je entropija rastuća funkcija). Primijetite da je ovaj rezultat sličan Sturmovom teoremu iz prethodnog odjeljka.

Što se dešava za $t > 0$? Hoće li se nultočke u nekom trenutku "sudariti"?

Lema 3.1. *Vrijedi*

$$\partial_t \sum_{i,j} (x_i - x_j)^2 = -4n^2(n-1).$$

Iz prethodne leme slijedi da će se sudar dogoditi najkasnije u vremenu $t_0 = \frac{\sum_{i,j}(x_i - x_j)^2}{4n^2(n-1)}$.

4 Zadaci

1. Dokažite da su sve nultočke polinoma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k(n-k)} x^k$ realne.

2. Neka je $p(z)$ polinom stupnja n čije se sve nultočke nalaze na jediničnoj kružnici. Neka je $g(z) = p(z)/z^{n/2}$. Dokažite da se sve nultočke funkcije $g'(z)$ također nalaze na jediničnoj kružnici.

3. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Dokažite da se sve nultočke polinoma

$$p_n(x) = \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{m} 2^{-nm+2k(m-k)} \binom{n}{k} \binom{n}{m-k} x^m,$$

nalaze na jediničnoj kružnici.

4*. Polinomi pridruženi potpunom grafu (po Lee-Yangovom teoremu) imaju zanimljivo svojstvo da (uz sitne preinake i zamjenu varijabli) zadovoljavaju jednadžbu provođenja, što nam onda daje alternativni dokaz tvrdnje o nultočkama. Postoje li neki drugi grafovi sa sličnim svojstvom? Napravite mali eksperiment, istražite polinome pridružene nekim drugim grafovima u potrazi za tim svojstvom. Mozete koristiti neki programski paket kao što je Mathematica.

5. Objasnite zašto su nultovķe polinoma $P_t(z)$ realne i različite za sve $t < 0$ ako su takve za $t = 0$.

6. Dokažite Lemu 3.1

7. Dokažite

$$\partial_t E = 2 \sum_{i,j:i\neq j} \left(\frac{2}{(x_i - x_j)^2} - \sum_k \frac{1}{(x_k - x_i)(x_k - x_j)}\right)^2.$$

Literatura

[1] A. Cohn, *Uber die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise*, Math. Z., 14, 1922, 110-148.

[2] S. Mukherjee *Geometry of polynomials*, `https://math.berkeley.edu/~nikhil/courses/270/lec15.pdf`

[3] V. A. Galaktionov, P. J. Harwin, *Sturm's Theorems on Zero Sets in Nonlinear Parabolic Equations*, Sturm-Liouville Theory: Past and Present, 173-199.