

ALGEBARSKE KRIVULJE: TREĆA ZADAĆA

- (1) Pronađite četiri elementa d koji proširuju Fermatovu Diofantovu četvorku $\{1, 3, 8, 120\}$ do petorke.
- (2) Neka je $\{a, b, c, d\}$ racionalna Diofantova četvorka za koju vrijedi $abcd = 1$. Dokažite da je produkt bilo koja dva elementa te četvorke potpun kvadrat. Parametrizirajte sve takve četvorke.
- (3) Neka je $E : y^2 = x^3 + x^2 - x$ eliptička krivulja. Pronađite racionalnu točku reda 3 na E . Obrazložite kako ste ju pronašli. Hint: točke infleksije.
- (4) (*) Neka su Q, T' i $(0, q)$ tri racionalne točke na eliptičkoj krivulji E nad $\mathbb{Q}$ koja je dana jednadžbom $y^2 = f(x)$, gdje je f normirani polinom stupnja 3 (s racionalnim koeficijentima). Pretpostavimo $\mathcal{O} \notin \{Q, T', Q + T'\}$. Dokažite da je tada

$$x(Q)x(T')x(Q + T') + q^2$$

potpun kvadrat.