ALGEBARSKE KRIVULJE: DRUGA ZADAĆA

1. Homogenizacija i dehomogenizacija krivulja

Neka je $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$ afina ravninska krivulja dana jednadžbom $y^2 = x^3 - x$.

a) Homogenizirajte jednadžbu od $\mathcal{C}$. Dobivenu projektivnu krivulju nazovite $\overline{\mathcal{C}}$. S kojojm je jednadžbom $\overline{\mathcal{C}}$ opisana?
b) Odredite točke od $\overline{\mathcal{C}}$ u beskonačnosti.
c) Provjerite jesu li te točke singularne?

2. Morfizmi

Neka je $X = \mathbb{A}^1$ afin pravac i neka je $Y = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ afina ravninska krivulja (nad poljem $\mathbb{C}$). Pokažite da ove dvije krivulje nisu izomorfne tako da pokažete da odgovarajući koordinatni prstenovi nisu izomorfni. Hint: Pokažite da je jedan prsten integralno zatvoren, a drugi nije. Zatim pokažite da su njihova algebarska zatvorenja izomorfna. Odredite neki izomorfizam.

3. Projektivna ekvivalencija

Neka je dana projektivna eliptička krivulja

$$\overline{\mathcal{D}} : y^2 z = (x - az)(x - bz)(x - cz),$$

gdje su a, b i c različiti kompleksni brojevi. Koristeći projektivne automorfizme od $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ istražite kada će ova krivulja biti izomorfna s krivuljom $\overline{\mathcal{C}}$ iz prethodnog zadatka. (Jedan smjer je malo teži.)