Eksplicitne metode za sustav dviju polinomijalnih jednadžbi

$n \geq 2$ i $f, g \in \overset{\overline{K}}{\underset{\shortparallel}{K}}[T_1, \dots, T_n]$

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Primjena rezultanti

pretp. D je faktorijalna domena

Def. 1.39. Neka je $f(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n \in D[T]$, $a_n \neq 0$, $n \geq 1$

i $g(T) = b_0 + b_1 T + \dots + b_m T^m \in D[T]$, $b_m \neq 0$, $m \geq 1$.

Rezultanta polinoma f i g

se definira kao

$$\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_n & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_n & \\ & & \ddots & & & & \ddots \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & b_m & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & b_m \end{vmatrix}$$

determinanta $(m+n)\times(m+n)$ matrice.

Teorem:

$$\mathrm{Res}(f,g)=0 \iff \exists h \in D[T],\ \deg h \geq 1$$
$$\text{t.d. } h \mid f \text{ i } h \mid g.$$

Dokaz: Označimo s V_k D-modul polinoma iz $D[T]$ stupnja $< k$.

Promotrimo linearno preslikavanje φ

$$V_m \times V_n \xrightarrow{\varphi} V_{m+n}$$
$$(i,j) \mapsto f\cdot i + g\cdot j$$

Pokažimo da je preslikavanje injektivno ako i samo ako $\mathrm{Res}(f,g) \neq 0$.

Neka je $(1,0), (T,0), \ldots, (T^{m-1},0),$

$(0,1), (0,T), \ldots, (0,T^{n-1})$ baza

za $V_m + V_n$ te $1, T, \ldots, T^{m+n-1}$ baza za V_{m+n}.

U tom paru baza matrica operatora će je jednaka matrici iz definicije rezultante (ili precizније njoj transponiranoj matrici).

Pa tvrdnja slijedi.

Ako je nije injektivan onda postoje polinomi $i, j \in K[T]$; $\deg i < n$, $\deg j < m$

za koji vrijedi $f \cdot i = g \cdot j$.

Sada iz jednostruke faktorizacije polinoma u $D[T]$ slijedi da f i g imaju zajednički faktor jer nije moguće da $f \mid j$ i $g \mid i$

zbog toga što je $\deg f > \deg j$ ili $\deg g > \deg i$.
Drugi smjer se slično dokaže.

Neka su $X: f(T_1, \dots, T_n) = 0$ i $Y: g(T_1, \dots, T_n) = 0$
dvije hiperplohe u $\mathbb{A}^n$.

Teorem 6.2. Pretp. da f i g ovise o T_n. Napišimo

$$f = \sum_{i=0}^{\ell} f_i T_n^i \quad ; \quad f_i \in K[T_1, \dots, T_{n-1}], \ f_\ell \neq 0, \ \ell \geq 1$$

$$g = \sum_{j=0}^{m} g_j T_n^j \quad ; \quad g_j \in K[T_1, \dots, T_{n-1}], \ g_m \neq 0, \ m \geq 1$$

Tada vrijedi:

(i) Ukoliko je $\mathrm{Res}_{T_n}(f, g) = 0$ onda X i Y sadrže zajedničku ired. komponentu čiji reducirani polinom ovisi o T_n.

(ii) Ukoliko je $\mathrm{Res}_{T_m}(f,g) \in K \setminus \{0\}$

onda $X \cap Y = \emptyset$.

(iii) Neka je $\mathrm{Res}_{T_m}(f,g)$ nekonstantan

polinom u $K[T_1,\dots,T_{m-1}]$. Tada

za svaki $(a_1,\dots,a_{m-1}) \in D_{\mathbb{A}^{m-1}}(f_e \cdot g_m) \cap$

$$Z_{\mathbb{A}^{m-1}}(\mathrm{Res}_{T_m}(f,g))$$

postoji $a_m \in K$ t.d. $(a_1,\dots,a_m) \in X \cap Y$.

Posebno, ako su $f_e \cdot g_m$ konstanta u $K \neq 0$

onda $X \cap Y \neq \emptyset$.

(iv) Ako je $(a_1,\dots,a_m) \in X \cap Y$ onda

$$\mathrm{Res}_{T_m}(f,g)(a_1,\dots,a_{m-1}) = 0.$$

Dokaz: i) slijedi iz teorema o rezultanti

ii) Pretp. suprotno, $(a_1, \dots, a_n) \in X \cap Y$.

Tada polinomi $f(a_1, \dots, a_{n-1}, T_n)$ i

$g(a_1, \dots, a_{n-1}, T_n)$ imaju zajedničkih

↖ zbog pretp. to su ne-nul polin stupnja ℓ odnosno m.

nultočaka pa im je rezultanta nula.

No iz toga slijedi $res_{T_n}(f,g)(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$

što je u kontradikciji s pretp. da je rezult. iz $K - \{0\}$.

iii) Za $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in D_{\mathbb{A}^{n-1}}(f_\ell \cdot g_m) \cap Z(Res_{T_n}(f,g))$

Polinomi $f(a_1, \dots, a_{n-1}, T_n)$ i $g(a_1, \dots, a_{n-1}, T_n)$

su stupnja ℓ i m (za 1), Budući da je

njihova rezultanta jednaka 0, postoji h t.d.

$h \mid f$ i $h \mid g$, $\deg h > 0$. Tj. $\in K[T_n]$

svaka nultočka polinoma h je traženi a_n.

(iv) slijedi iz teorema o rezultanti

∎

Primjer:

char $K \neq 2$

$$\begin{cases} f = T_1^3 T_2^2 - 2T_1^2 T_2 + T_1 - 1 = 0 \\ g = T_1^2 T_2^2 - T_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

pretpostavka.

Računam

$$\mathrm{Res}_{T_2}(f,g) = \begin{vmatrix} T_1 - 1 & -2T_1^2 & T_1^3 & 0 \\ 0 & T_1 - 1 & -2T_1^2 & T_1^3 \\ -1 & -1 & T_1^2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & T_1^2 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = -T_1^4(2T_1 - 1)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Res}_{T_2}(f,g) = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = 0 \quad \text{i} \quad T_1 = \frac{1}{2}$$

Za nultočku $T_1 = 0$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} f(0, T_2) = -1 \\ g(0, T_2) = -T_2 - 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ nema rješenja

za $\tau_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2}, \tau_2) = \frac{1}{8}\tau_2^2 - \frac{1}{2}\tau_2 - \frac{1}{2} \\ \qquad = \frac{1}{8}(\tau_2^2 - 4\tau_2 - 4) \\ g(\frac{1}{2}, \tau_2) = \frac{1}{4}(\tau_2^2 - 4\tau_2 - 4) \end{cases}$$

imaju zajedničke nultočke $b_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

Projektivni prostor $\mathbb{P}^n$:

Na skupu $\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ definiramo relaciju

$$(a_0,\dots,a_n)\sim(b_0,\dots,b_n) \overset{def}{\iff} \exists t\in K,\ t\neq 0$$

$$\text{t.d. } b_i = t\cdot a_i,\ 0\le i\le n.$$

Klasu ekvivalencije određenu točkom $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^{n+1}-\{0\}$ označimo s

$$(a_0:a_1:\dots:a_n).$$

Po definiciji radi se o skupu

$$(a_0:a_1:\dots:a_n)=\{(ta_0,\dots,ta_n):\ t\in K, t\neq 0\}$$

ovo je pravac kroz ishodište

Definicija 6.8. Neka je $n \geq 1$. Projektivni n-dimenzionalni prostor $\mathbb{P}^n$ je kvocijentni skup od $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ u odnosu na $\sim$. tj. skup

$$\mathbb{P}^n \overset{\text{def}}{=} \{(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) \mid (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

Klase ekvivalencije $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ nazivamo točkama projektivnog prostora. Nadalje, $\mathbb{P}^1$ nazivamo projektivni pravac, $\mathbb{P}^2$ projektivna ravnina, $\mathbb{P}^3$ projektivni prostor.

uvjerite se da su ove definicije ekv.

Projektivan prostor možemo i malo apstraktnije definirati. Neka je V vektorski prostor nad K dimenzije $n+1$. Tada je projektivan prostor

pravac kroz ishodište.

$$\mathbb{P}(V) = \{\ell \subset V : \ell \text{ je vektorski potprostor dimenzije } 1\} \cong \mathbb{P}^n$$

Linearni potprostor od $\mathbb{P}(V)$ je podskup oblika $\mathbb{P}(W)$ gdje je $W < V$ vektorski potprostor. Ako je $\dim W = 1$ onda je $\mathbb{P}(W)$ točka, ako je $\dim W = 2$ onda je $\mathbb{P}(W)$ pravac ...

Lema: Neka su $\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2) \subset \mathbb{P}(V)$ projektivni potprostori. Tada

$$\mathbb{P}(V_1) \cap \mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2)$$

Dokaz: Po definiciji $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathbb{P}(V_2)$ je skup pravaca $\ell \subset V_1 \cap V_2$, tj. element od $\mathbb{P}(V_1 \cap V_2)$.

$\blacksquare$

Afin pokrivač proj. prostora

Neka je $V = K^{n+1}$. Za $0 \leq i \leq n$ definiram:

$$U_i := \{[x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n] : x_i \neq 0\}$$

Propozicija:

a) Skupovi U_i pokrivaju $\mathbb{P}^n$, tj.

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

b) Postoji bijekcija $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$

$$[x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Inverz je dan s

$$(y_0, \ldots, y_{n-1}) \mapsto [y_0 : \ldots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_{n-1}]$$

Projektivni algebarski skupovi:

Ne-nul polinom $F \in K[T_0, \dots, T_n]$ je **homogen** ako postoji $d \in \mathbb{N}_0$ t.d.

$$F(\lambda T_0, \dots, \lambda T_n) = \lambda^d F(T_0, \dots, T_n) \quad \forall \lambda \in K^*.$$

stupanj polinoma

Primjer: $F(T_0, T_1, T_2) = T_0 T_1 T_2 + T_0^3 + T_1 T_2^2$

Svaki nenul polinom F se može prikazati kao suma homogenih polinoma $F = F_0 + \dots + F_d$ gdje je F_i homogen polinom stupnja i.