Morfizmi projektivnih alg. skupova

Neka su $X \subset \mathbb{P}^n$ i $Y \subset \mathbb{P}^m$ projektivni alg. skupovi. Morfizam $f: X \to Y$ je funkcija

$$[x_0 : \ldots : x_n] \mapsto [f_0(x_0, \ldots, x_n) : f_1(x_0, \ldots, x_n) : \ldots : f_m(x_0, \ldots, x_n)]$$

gdje su f_i homogeni polinomi stupnja istog stupnja d, takvi da

a) $\forall x = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \in X$ barem jedna od vrijednosti $f_0(x), f_1(x), \ldots, f_m(x)$ je različita od 0

b) $\forall x \in X \quad f(x) \in Y$.

Primjer: Veronesovo preslikavanje

$v : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$

$$v([x:y:z]) = [x^2 : xy : xz : y^2 : yz : z^2]$$

$$= [X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5]$$

polinomi stupnja 2

ne mogu istovremeno biti jednaki 0

Je li slika preslikavanja alg. zatvoren skup? Ako da, koje ga jednadžbe opisuju.

Konstruirajmo matricu

$$M = \begin{pmatrix} X_0 & X_1 & X_2 \\ X_1 & X_3 & X_4 \\ X_2 & X_4 & X_5 \end{pmatrix}$$ gdje je $X_0 = x^2, \ldots$

Kako je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} (x\, y\, z) = M$

matrica ranga 1 sve su njene 2x2

minore jednake 0

$\Rightarrow v(\mathbb{P}^2)$ se nalazi u ploh

$$Y: \begin{cases} x_0x_3 - x_1^2 = 0 \\ x_0x_4 - x_1x_2 = 0 \\ x_1x_4 - x_2x_3 = 0 \\ x_0x_5 - x_2^2 = 0 \\ x_1x_5 - x_2x_4 = 0 \\ x_3x_5 - x_4^2 = 0 \end{cases}$$

Pokažimo da $v(\mathbb{P}^2) = Y$.

Neka je $P = [x_0 : \ldots : x_5]$ točka iz Y.

Tada slijedi da matrica $M = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_1 \\ & \ldots & \end{pmatrix}$

ima rang 1. Iz linearne algebre

znamo da se svaka 3x3 matrica

ranga 1 može zapisati kao $v v^T$

za neki vektor $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K^3$

iz čega slijedi $v([x:y:z]) = P$.

dokaz: Neka je w generator slike operatora M, tj.

dim $V = 3$

V unitaren, $\langle , \rangle$

$$M(x) = f(x) \cdot w \quad \forall x \in V$$

f funkcional na V. Tada $\ker f = \ker M$. Neka je $m \in V$ okomit na $\ker M$ skaliran tako da

$$M(x) = \langle x, m \rangle w .$$

Budući da je M simetričan

$$\langle M(x), y \rangle = \langle x, M(y) \rangle$$

$$\langle x, m \rangle \langle w, y \rangle = \langle x, w \rangle \langle y, m \rangle \quad \forall x, y$$

slijedi da je $m = w$ [d.z.] tj. matrični prikaz od M je sadržan $V V^*$ gdje je v prikaz vektora $m (= w)$. ∎

Napomena: Za razliku od afinih mnogostrukosti koji su jednoznačno određene svojim koordinatnim prstenom, za projektivne mnogostrukosti to više nije slučaj. Za proj. mnogostrukost $X \subset \mathbb{P}^n$, homogeni projektivni prsten $k[x_0, \dots, x_n] / I(X)$, gdje je $I(X)$ homogeni ideal pridružen mnog. X, kao graduirana k-algebra nije invarijanta proj. mnogostrukosti.

Primjer: $\mathbb{P}^1$

homogeni projektivni prsten je $k[x,y]$ s uobičajenom gradacijom $k[x,y]_d$ = homog. polinomi stupnja d

$$v_2 : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$$

$$[s:t] \mapsto [s^2 : st : t^2]$$

Slika $v_2(\mathbb{P}^1)$ je konika (izom. s $\mathbb{P}^1$) dana jednadžbom $ac - b^2 = 0$ gdje koord. na $\mathbb{P}^2$ označavam s $[a:b:c]$.

Homogeni koordinatni ideal je dan s $k[a,b,c] / (ac-b^2)$ gdje je gradacija inducirana s uobičajenim stupnjem polinoma.

Prstenovi $k[x,y]$ i $k[a,b,c]/(ac-b^2)$

nisu izomorfni kao graduirani prstenovi.

(ni kao negraduirani prstenovi).

$\blacksquare$

Automorfizmi projektivnog prostora $\mathbb{P}^n$:

Koristenjem automorfizama od $\mathbb{P}^n$ često možemo pojednostaviti dokaze.

Neka je $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}V$ gdje je V vekt. prostor nad k dimenzije $n+1$.

Tada $M \in GL(V)$ djeluje na $\mathbb{P}V$ jer za $v \in V$ i $\lambda \in k^*$

$$M(\lambda v) = \lambda M(v) \cong M(v) \text{ u } \mathbb{P}V$$

pa je $M(v)$ dobro definiran za $v \in \mathbb{P}V$.

Također $(\lambda M)(v) = M(v) \quad \forall v \in \mathbb{P}V$ u $\mathbb{P}(V)$

$$\Rightarrow GL(V)/k^* \cong PGL(V) \cong PGL_{n+1}(k)$$

djeluje na $\mathbb{P}V$.

Primjer: Neka je $n=1$ i $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

tada za $v=[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$

$$Mv = \left[1\cdot x_0 + 2\cdot x_1 : 3\cdot x_0 + 7\cdot x_1\right] \in \mathbb{P}^1$$

djeluje linearnom zamjenom varijabli

$\boxtimes$

Teorem: Ovo su svi automorfizmi od $\mathbb{P}^n$,

tj. $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = PGL_{n+1}(k)$.

Uočimo da automorfizmi od $\mathbb{P}^n$ preslikavaju projektivne alg. skupove u projektivne alg. skupove.

Pretp. da je $X \subset \mathbb{P}^n$ definiran s homogenim idealom $I \subset k[x_0, \ldots, x_n]$. Tada automorfizam

$$f_A : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n, \quad [x_0 : x_1 : \ldots : x_n] \mapsto \left[\sum_{j=0}^{n} a_{0j} x_0 : \ldots \right]$$

$A \in GL_{n+1}(k)$ preslikava svaki

$F \in I$ u

$$\tilde{F}(y_0, \ldots, y_n) = F\left(\sum_{j=0}^{n} b_{0j} y_j, \ldots, \sum_{j=0}^{n} b_{nj} y_j \right)$$

gdje je $B = A^{-1}$.

Očito, ako je $T = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ takav da je $F(T) = 0$ onda je $\tilde{F}(f_A(T)) = 0$ pa polinomi oblika $\tilde{F}$ generiraju homogeni ideal slike $f_A(X)$. Vidimo da su projektivni alg. skupovi X i $f_A(X)$ izomorfni.

Primjer: Neka je $f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ automorfizam dan matricom

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(k).$$

Tj. $f([x:y:z]) = [x+2y : y : z]$

Neka je $C \subset \mathbb{P}^2$ konika definirana homogenom jednadžbom

$$F(x,y,z) = xz - y^2 .$$

Želimo odrediti jednadžbu $\underbrace{}_{G(X,Y,Z)}$ od $C' = F(C)$.

gdje je $[X:Y:Z] = [x+2y : y : z]$.

1°) Invertiranjem dobivamo

$$x = X - 2Y, \quad y = Y, \quad z = Z$$

2°) Uvrštavanjem dobivamo

$$G(X,Y,Z) = F(X-2Y, Y, Z) = (X-2Y)Z - Y^2$$ $\boxtimes$

Kako možemo koristiti te automorfizme?

Def. Kažemo da je konačan skup točaka $\Gamma \subset \mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ u općem položaju ako za svaki $k \leq n+1$ i svaki podskup $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \Gamma$ vrijedi da su vektori $\{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ linearno nezavisni gdje je $p_i = [v_i]$

točka p_i je projektivizacija vektora v_i

Ako je $\#\Gamma \geq n+1$, to znači da se nikojih $n+1$ točaka ne nalazi u istoj hiperravnini.

Propozicija: Svaka dva uređena podskupa od $n+2$ točaka u općem položaju u $\mathbb{P}^n$ su projektivno ekvivalentni.

postoji automorfizam od $\mathbb{P}^n$ koji jedan uređeni skup preslikava u drugi

Dokaz. Neka su $p_i = [v_i]$, $q_i = [w_i]$ i $v_i, w_i \in V$ za svaki $i = 1, \dots, n+2$. ($\dim V = n+1$).

pripadni vektori uređenih podskupova $\{p_1, \dots, p_{n+2}\}$, $\{q_1, \dots, q_{n+2}\}$. Trebamo pokazati da postoji $A \in GL(V)$ t.d. $\forall i$

$$A v_i = \lambda_i w_i \text{ za neki } \lambda_i \in \mathbb{C}^*.$$

Budući da su točke u općem položaju $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ i $\{w_1, \dots, w_{n+1}\}$ su baze za V pa postoji α_i i δ_i t.d.

$$V_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i v_i$$

$$W_{n+2} = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i v_i$$

gdje su svi $\alpha_i \stackrel{?}{\neq} 0$ i $\delta_i \stackrel{?}{\neq} 0$

kad to ne bi bilo tako onda bi se V_{n+2} (ili W_{n+2}) nalazio u istoj hiper-ravnini zajedno s još n vektora (svi osim tog v_i za koji je $\alpha_i = 0$).

Definirajmo operator A koji bazu $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ preslikava u bazu

$\left\{ \frac{\delta_i}{\alpha_i} w_i \right\}_i$. Tada je

$$A(V_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \frac{\delta_i w_i}{\alpha_i} = W_{n+2}$$

što je trebalo dokazati.