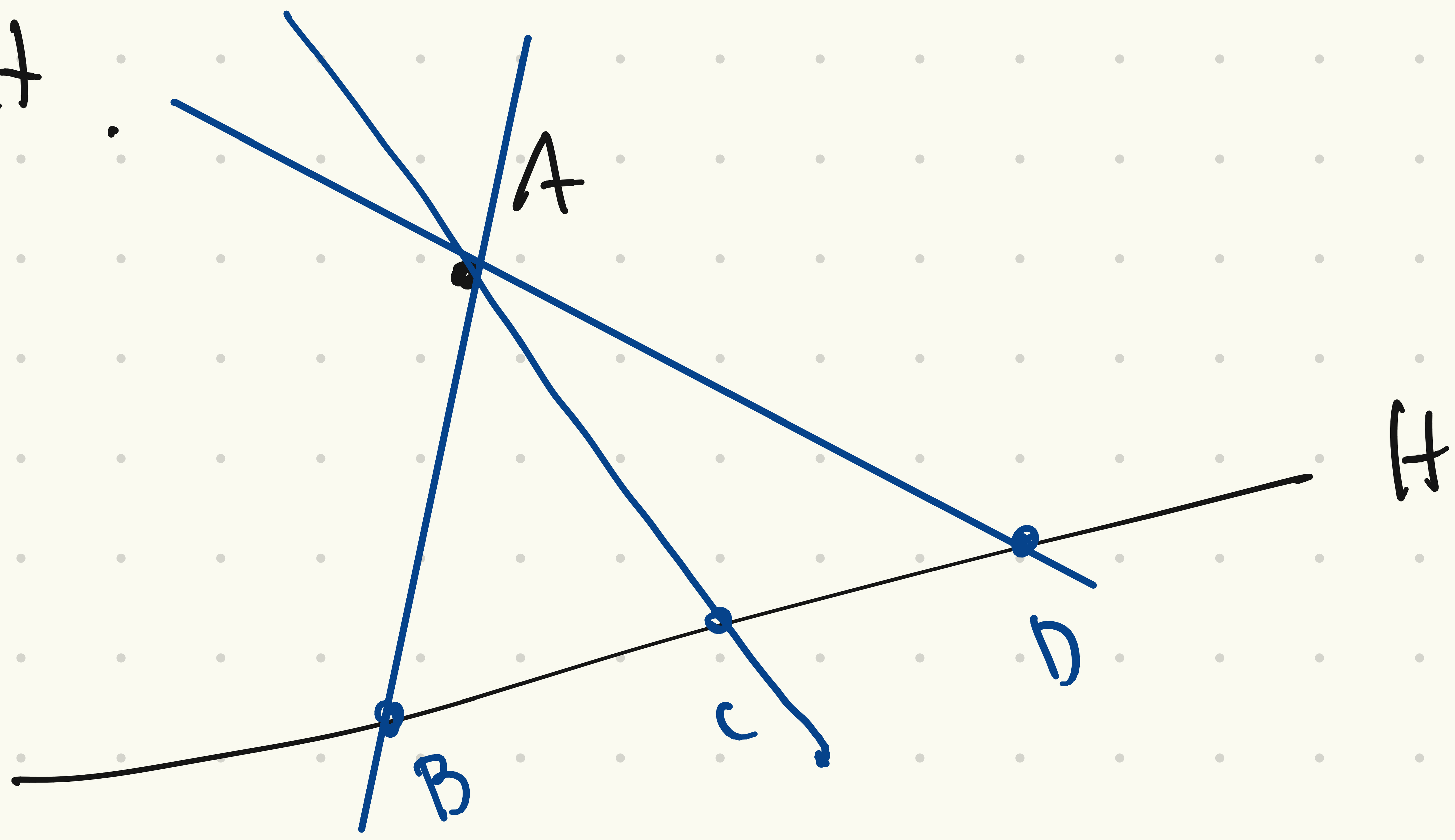
Neka svojstva projektivnih krivulja i hiperploha

Geometrijska interpretacija stupnja hiperplohe

Neka je $A \in \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$ točka. Neka je $H \subset \mathbb{P}^n$ hiperravnina t.d. $A \notin H$.

Skup točaka hiperravnine H je u bijekciji sa skupom pravaca kroz A – svakom pravcu kroz A pridružimo točku presjeka pravca s H.



Teorem 8.1. Neka je $n \geq 2$, char $K = 0$ i $X \subset \mathbb{P}^n$ hiperploha, $A \notin X$. Tada za sve pravce p kroz A vrijedi da je $p \cap X \neq \emptyset$ i broj točaka presjeka je $\leq \deg X$.

stupanj polinoma koji generira $I(X)$

Nadalje, za svaku hiperravninu $H \subset \mathbb{P}^n$ t.d. $A \notin H$ postoji alg. skup $Y_{X,H,A}$ t.d. $H \setminus H \cap Y_{X,H,A} \neq \emptyset$ i za sve $B \in H \setminus H \cap Y_{X,H,A}$ presjek $AB \cap X$ sastoji se od točno $\deg X$ točaka.

drugim riječima $\exists$ Zariski otvoren skup $U \subset H$ t.d. $\forall B \in U$, $AB \cap X$ se sastoji od točno $\deg X$ točaka.

to je generička situacija

kažemo da za generičku točku B pravac AB siječe X u $\deg X$ točaka

Dokaz: Tvrdnja trivijalno vrijedi ako je $\deg X = 1$ tj. ako je X hiperravnina. Pretp. zato $\deg X \geq 2$.

Tvrdnja: Možemo pretp. da je $A = (0:0:\ldots:0:1)$ i $H = Z(T_n)$

Dokaz: Pokažimo da postoji automorfizam $A \in PGL_{n+1}(k)$ koji točku A preslika u $(0:\ldots:0:1)$, a hiperravninu H preslika u $Z(T_n)$.

To je zato što postoji automorfizam koji preslikava točku A i nekih n točaka na H odabranih tako da je skup od tih $n+1$ točaka u općem položaju u točku $(0:\ldots:1)$ i nekih n točaka na $Z(T_n)$ (opet u općem položaju). To smo zadnji put dokazali.

Neka je f reducirani polinom hiperplohe X (tj. generator od ideala $I(X)$). Tada je $2 \leq \deg f = \deg X =: e$. Napišimo polinom f kao polinom u varijabli T_n nad $K[T_0, \dots, T_{n-1}]$

tj.
$$f = \sum_{i=0}^{e} f_i T_n^i \,, \quad \text{gdje su } f_i \in K[T_0, \dots, T_{n-1}]$$
homogeni polinom stupnja $e-i$

Uočimo da je $\underset{\substack{\neq \\ 0}}{f(0,\dots,0,1)} = f_e(0,\dots,0) \cdot 1$

$\Rightarrow f_e \neq 0$.

Pokazat ćemo da tvrdnja vrijedi za
$$Y_{X,H,A} := Z\left(\operatorname{Res}_{T_n}\left(f, \frac{\partial f}{\partial T_n}\right)\right) \subset \mathbb{P}^n$$

definicija ima smisla jer je $\operatorname{Res}_{T_n}\left(f, \frac{\partial f}{\partial T_n}\right)$ homogen polinom. Sjetimo se definicije preko determinante:

$$\operatorname{Res}_{T_n}\left(f, \frac{\partial f}{\partial T_n}\right) = \begin{vmatrix} f_0 & f_1 & \dots & f_l & & & \\ & f_0 & f_1 & \dots & f_l & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_0 & f_1 & \dots & f_l \\ f_1 & 2f_2 & 3f_3 & \dots & l f_l & & \\ & f_1 & 2f_2 & \dots & l f_l & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_1 & \dots & & l f_l \end{vmatrix}$$

Budući da je $\deg f_i = l - i$ stupanj $(d=1)$

uz malo kombinatorike se vidi da je determinanta homogeni polinom stupnja $l \cdot l + l = l(l+1)$.

Prema Teoremu 5.3. (o rezultantama)

svaka točka $(x_0 : \dots : x_n) \in Y_{X, H, A}$ ima

svojstvo da

$$f(x_0, \dots, x_{n-1}, T_n) = \sum_{i=0}^{l} f_i(x_0, \dots, x_{n-1}) \cdot T_n^i$$

ima dvostruku nultočku i obratno.

Pretp. da pravac AB siječe X u manje od $\deg X = l$ točaka gdje je $B = (b_0 : \ldots : b_{n-1} : 0)$ proizvoljna točka na H.

Pravac AB ima parametrizaciju

$$t \longmapsto (b_0 \cdot t : b_1 \cdot t : \ldots : b_{n-1} \cdot t : 1 - t)$$

odnosno projektivno

za $t \in K$

$$[t : s] \mapsto (b_0 \cdot t : b_1 \cdot t : \ldots : s - t) \quad \text{za } [t:s] \in \mathbb{P}^1$$

Parametri točaka presjeka pravca AB s $f = 0$ su nultočke polinoma stupnja l

$$\underset{\in \mathbb{P}^1}{[t : s]} \mapsto f(b_0 \cdot t, b_1 \cdot t, \ldots, b_{n-1} \cdot t, s - t)$$

pa ako AB siječe X u manje od l nultočaka onda polinom ima dvostruku nultočku pa je njegova diskriminanta 0.

Trebamo pokazati da je $(b_0 : b_1 : \ldots : b_{n-1} : 0) \in Y_{X,H,A}$ odnosno da $f(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}, T_n)$ ima dvostruke nultočke (kao polinom u T_m),

odnosno manji od ℓ različitih nultočki.

Neka su $\{[t_i : s_i]\}_i$ različite nultočke prvog polinoma, tj. $f(b_0 \cdot t_i, b_1 \cdot t_i, \ldots, b_{m-1} \cdot t_i, s_i - t_i) = 0$

$t_i \neq 0$ jer $A \notin X$

$$\Updownarrow \text{ako } t_i \neq 0$$

$$t_i^{\ell} f\left(b_0, b_1, \ldots, \frac{s_i - t_i}{t_i}\right) = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{s_i - t_i}{t_i}$ su nultočke polinoma

$$f(b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, T_m)$$

Obratno, svaka nultočka $z^{\neq -1}$ polinoma $f(b_0, \ldots, T_m)$ je oblika $[1-t : t]$ nultočka $z = -1$ odgovara točki $t = \infty$ tj. točki $[1:0] \in \mathbb{P}^1$.

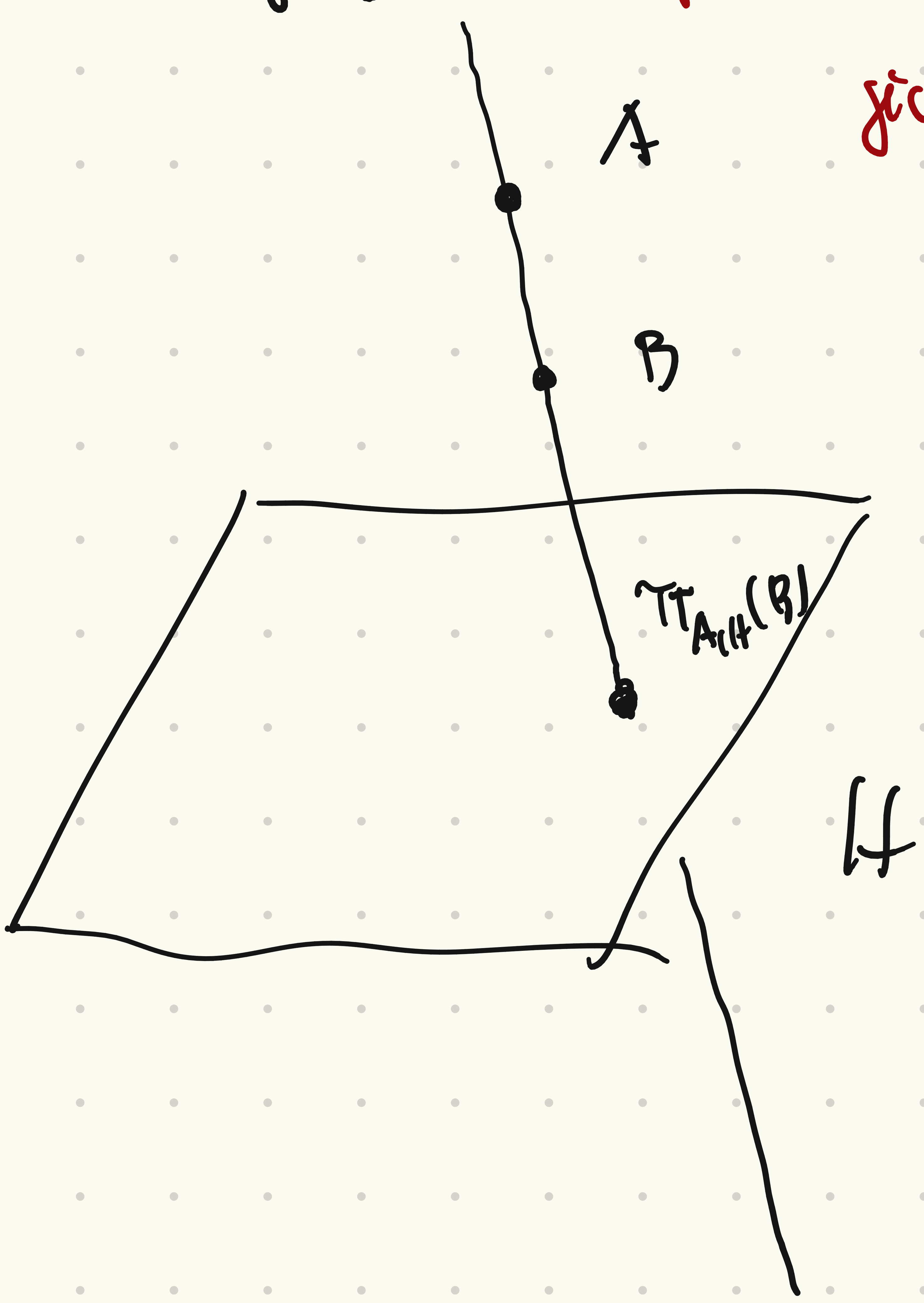
$$\left(\frac{1-t}{t} = z \Rightarrow 1 - t - zt = 0 \quad t = \frac{1}{z+1}\right)$$

odnosno imamo bijekciju između različitih nultočaka ovih polinoma pa tvrdnja slijedi.

$\blacksquare$

Primjer (centralna projekcija):

Centralna projekcija iz točke $A \in \mathbb{P}^n$ $(n \geq 2)$ na hiperravninu $H \subset \mathbb{P}^n$ $(A \notin H)$ je preslikavanje $\pi_{A,H} : \mathbb{P}^n - \{A\} \to H$ koje točki $B \in \mathbb{P}^n - \{A\}$ pridruži točku u kojoj pravac AB siječe H. ← takva je točka jedinstvena



Ako je $A=(a_0:\dots:a_n)$ i $H=Z(c_0T_0+\dots+c_nT_n)$
$$=Z(f)$$

Onda za svaku točku $B=(x_0:\dots:x_n)\neq A$

vrijedi:

$$\pi_{A,H}(x_0:\dots:x_n)=\big(f(x_0,\dots,x_n)a_0-f(a_0,\dots,a_n)x_0:$$
$$\dots:f(x_0,\dots,x_n)a_n-f(a_0,\dots,a_n)x_n\big)$$

zašto?

- $\sum c_i\left[f(x_0,\dots,x_n)a_i-f(a_0,\dots,a_n)x_i\right]$
$$=f(x_0,\dots,x_n)\cdot f(a_0,\dots,a_n)-f(a_0,\dots,a_n)\cdot f(x_0,\dots,x_n)$$
$$=0.$$
$$\Rightarrow \pi_{A,H}(x_0:\dots:x_n)\in H$$

- $\pi_{A,H}(x_0:\dots:x_n)=f(x_0,\dots,x_n)\cdot(a_0:\dots:a_n)$
$$-f(a_0,\dots,a_n)\cdot(x_0:\dots:x_n)$$
$$\Downarrow$$

$\pi_{A,H}(x_0:\dots:x_n)$ se nalazi na pravcu

kroz A i B $\quad [\lambda:\mu]\mapsto\lambda(a_0:\dots:a_n)+\mu(x_0:\dots:x_n)$

$[1:0]$ $\quad$ $[0:1]$