# Algebarski skupovi u afinom prostoru

$K$ = alg. zatvoreno polje $(= \mathbb{C})$

**Def. 3.1.** afin $n$-dim prostor

$$\mathbb{A}^n = K^n = \{ (x_1, \dots, x_n) \in K^n \}$$

**Def. 3.2.** Algebarski skup $X \subseteq \mathbb{A}^n$ je skup oblika

$$X = Z(f_1, \dots, f_t) := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, t \}$$

gdje su $f_1, \dots, f_t \in K[T_1, \dots, T_n]$ polinomi

**Primjeri:**

afin prostor

a) $\mathbb{A}^n = Z(0)$

točka

b) $P = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$

$$\{P\} = Z(T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$$

c) svaki vektorski potprostor $W \subset K^n$ je alg. skup u $\mathbb{A}^n$

✓

dokaz: neka je $W^\perp$ ortg. komplement (u odnosu na stand. skalarni produkt) i neka je $\{w_1,\dots,w_r\}$ baza za $W^\perp$. Tada je $W$ lokus nultočaka linearnih polinoma

$$\underline{T} = (T_1,\dots,T_n) \mapsto w_i \cdot \underline{T}$$

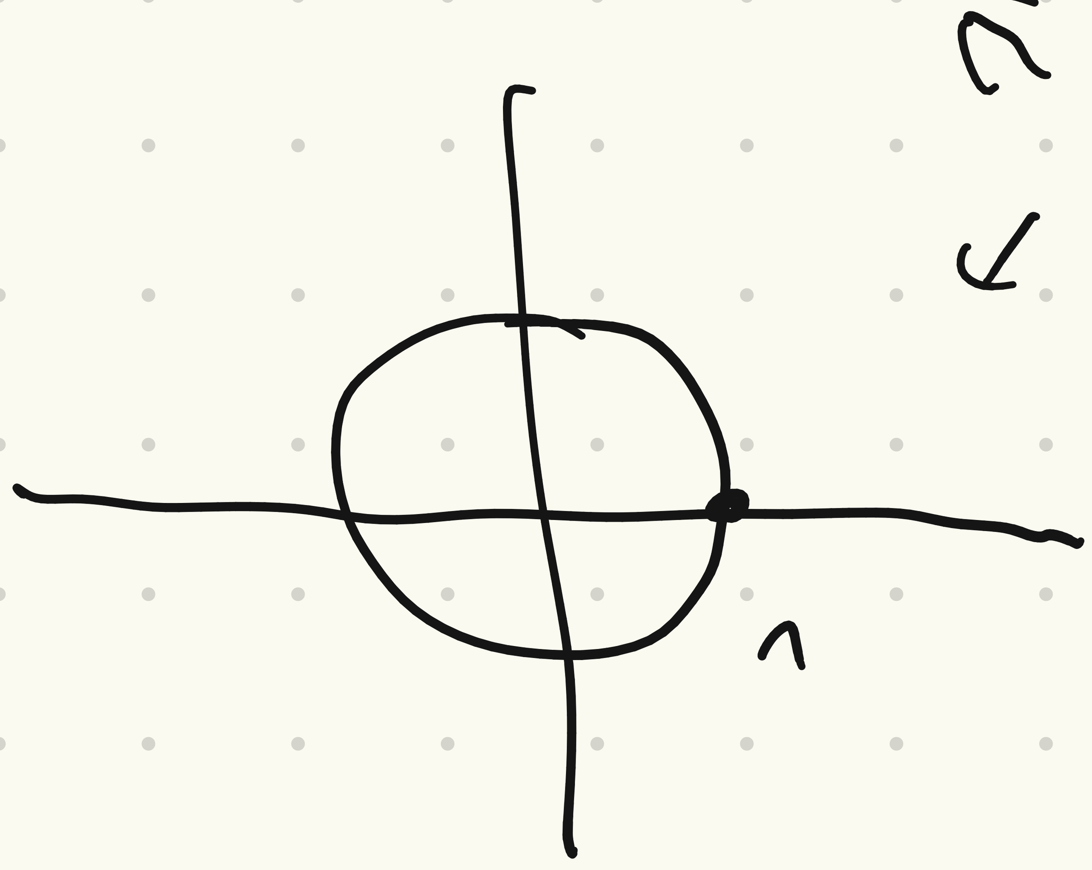
**Definicija 3.5.** Alg. skup oblika $Z(f)$ gdje je $f \in K[T_1,\dots,T_n]$ nekonstantan polinom naziva se hiperploha u $\mathbb{A}^n$.

Ukoliko je $n=2$ govorimo o afinoj planarnoj krivulji.

**Primjeri:**

- $f(T_1,T_2) = T_1^2 + T_2^2 - 1$

jedinična kružnica.




- $f(T_1,T_2) = (T_1+T_2-1) \cdot (T_1-T_2+2)$

unija dva pravca

**Zadatak 1:** (Cayley-Bacharach teorem)

Neka su $C_1 : f_1(T_1,T_2)=0$ i $C_2 : f_2(T_1,T_2)=0$ dvije kubične ($\deg f_i = 3$) krivulje koje se sijeku u 9 različitih točaka $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\dots,9}$.

Dokažite da svaka kubika $C: f(T_1,T_2)=0$ koja prolazi kroz 8 od tih 9 točaka nužno prolazi i kroz devetu.

**Rješenje:** Neka je

$$f(T_1,T_2) = a_1 \cdot T_1^3 + a_2 \cdot T_1^2 + a_3 \cdot T_1^2 \cdot T_2 + a_4 \cdot T_1 + a_5 \cdot T_1 T_2 + a_6 T_1 T_2^2 + a_7 T_2^3 + a_8 \cdot T_2^2 + a_9 \cdot T_2 + a_{10}.$$

Tada je $f \in V_{\leq 3}$ = prostor polinoma st $\leq 3$

Vidimo $\dim V_{\leq 3} = 10$. Neka su $\{P_1,\dots,P_9\}$ točke u kojima se poništavaju $f_1$ i $f_2$ i neka je $f(P_i)=0$ $\forall i=1,..8$. Pokažimo da je $f(P_9)=0$. Označimo s

$$V_8 = \{ F \in V \mid F(P_i)=0 \ \forall i=1,..,8 \}$$

potprostor od $V$.

Ideja: $V_8$ je dan s 8 linearnih uvjeta.

Kad bi ti uvjeti bili nezavisni, onda bi $\dim V_8 = 2$ i $V_8 = \langle f_1, f_2 \rangle$. No $f \in V_8$ $\Rightarrow f = \lambda f_1 + \mu f_2 \Rightarrow f(P_9) = \lambda f_1(P_9) + \mu f_2(P_9) = 0$.

No kako dokazati nezavisnost?

Jedan sasvim drugačiji dokaz: Pretp. da tražimo $f_1$ nezavisan s $f_1$ i $f_2$ posebno. Promotrimo točke $P_1,..,P_9$. Uočimo prvo da se nikoje 4 točke ne mogu nalaziti na pravcu jer prema Bezoutovom teoremu u tom slučaju bi $C_1$ i $C_2$ sadržavale isti pravac pa bi imale $\infty$-mnogo točaka u presjeku.

Zbog istog razloga nikojih 7 točaka ne može ležati na kvadrici (krivulji stupnja 2) jer je $7 > 3 \cdot 2$.

Iz toga slijedi da svakih 5 točaka određuje jedinstvenu kvadriku — jer kad bi postojale dvije kvadrike A i B koje sadrže 5 točaka onda bi njihov presjek sadržavao 5 točaka odnosno prema Bezoutovom teorem cijeli pravac. Ali nikoji 4 točke nisu na tom pravcu pa preostale dvije određuju drugi pravac $\Rightarrow$ kvadrika je time jednoznačno određena kao unija ta dva pravca.

Pretp. sada da su točke $P_1, P_2$ i $P_3$ kolinearne i leže na pravcu $l$. Tada preostale točke $P_4 \ldots P_8$ nisu na $l$ i određuju jedinstvenu kvadriku $\sigma$.

Neka je $B$ još jedna točka na $l$ i neka je $C$ točka $C \notin l$ i $C \notin \sigma$.

Postoji netrivijalna linearna kombinacija

$Q = af + bf_1 + cf_2$ koja iščezava na $B$ i $C$

Tada je $Q$ kubični polinom koji iščezava na

4 kolinearne točke $P_1, P_2, P_3$ i $B$.

$\Rightarrow$ iščezava na pravcu $\ell$

$\Rightarrow$ $Q$ je unija pravca $\ell$ i kvadrike $\sigma$

(jer prolazi kroz $P_4, \dots, P_8$)

ali $C$ se nalazi na $Q$, a ne nalazi se u $\ell \cup \sigma$ $\Rightarrow \Leftarrow$

$\Rightarrow$ nikoje 3 točke nisu kolinearne.

Slično, pretp. da 6 od 8 točaka, npr. $P_1, \dots, P_6$ leže na kvadrici $\sigma$. Kako nikoje tri točke nisu kolinearne, kvadrika nije unija dva pravca pa je konika. Preostale 2 točke $P_7$ i $P_8$ određuju pravac $\ell = \overline{P_7 P_8}$.

Neka je B nova točka na $\sigma$ i C točka koja nije ni na $l$ ni na $\sigma$. Opet postoji netrivijalna kubika $Q = af + bf_1 + cf_2$ koja iščezava na B i C. Kako Q iščezava na 7 točaka konike $\sigma$, iščezava na cijeloj $\sigma$ (ovdje je bitno da je $\sigma$ ireducibilna).

$\Rightarrow$ Q je unija kvadrike $\sigma$ i pravca $l$ kroz $P_7$ i $P_8$. Ali C se ne nalazi na $l \cup \sigma$! $\Rightarrow\Leftarrow$

Konačno, neka je $l$ pravac kroz $P_1, P_2$ i $\sigma$ kvadrika kroz pet točaka $P_3, P_4, \dots, P_7$

$\Rightarrow$ $\sigma$ je konika jer nikoje tri točke nisu kolinearne.

Ali $P_8 \notin l \cup \sigma = Q$

Odaberimo druge točke B i C koje su na $l$ ali nisu na $\sigma$ te postoji

$Q = af + bf_1 + cf_2$ koja iščezava na B i C

$\Rightarrow$

$Q$ iščezava na pravcu $\ell$

$\Rightarrow Q = \ell \cup$ kvadrika

Ali kvadrika prolazi kroz $P_3, \ldots, P_7$ pa je jednaka $\sigma$. No onda $P_8 \notin Q$.

$\Rightarrow\Leftarrow$

∎

Natrag na alg. skupove. Vrijedi:

**Prop. 3.9.** Unija konačnog broja alg. skupova u $\mathbb{A}^n$ je opet alg. skup u $\mathbb{A}^n$.

Zašto? Primijetimo da ako su $Y_1 = Z(f_1)$ i $Y_2 = Z(f_2)$ hiperplohe u $\mathbb{A}^n$, da je onda $Y = Z(f_1 \cdot f_2)$ jednak uniji $Y_1 \cup Y_2$.

alg. skup = presjek hiperploha.

S druge strane presjek hiperploha je dan s $\tilde{Y} = Z(f_1, f_2) = Y_1 \cap Y_2$.

Slična formula vrijedi i za konačne unije i presjeke.

Uočimo da za skupove vrijedi:

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

i onda $(A \cap B) \cup (C \cap D)$

$$= (A \cup (C \cap D)) \cap (B \cup (C \cap D))$$

$$= (A \cup C) \cap (A \cup D) \cap (C \cup B) \cap (D \cup B)$$

Pa ako su $Y_1 = Z(f_{1,1}, f_{1,2})$ i $Y_2 = Z(f_{2,1}, f_{2,2})$

alg. skupovi koji su presjeci dviju hiperploha

onda je

$$Y_1 \cup Y_2 = Z(f_{1,1} \cdot f_{2,1}, f_{1,1} \cdot f_{2,2}, f_{1,2} \cdot f_{2,1}, f_{1,2} \cdot f_{2,2})$$

ponovno alg. skup.

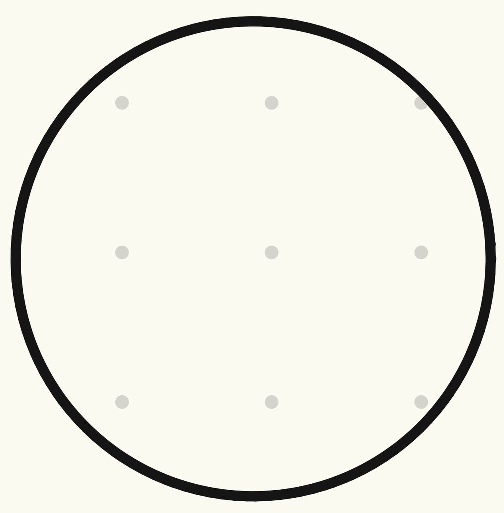
D.Z. Generalizirajte ovaj argument na presjek proizvoljnih alg. skupova.

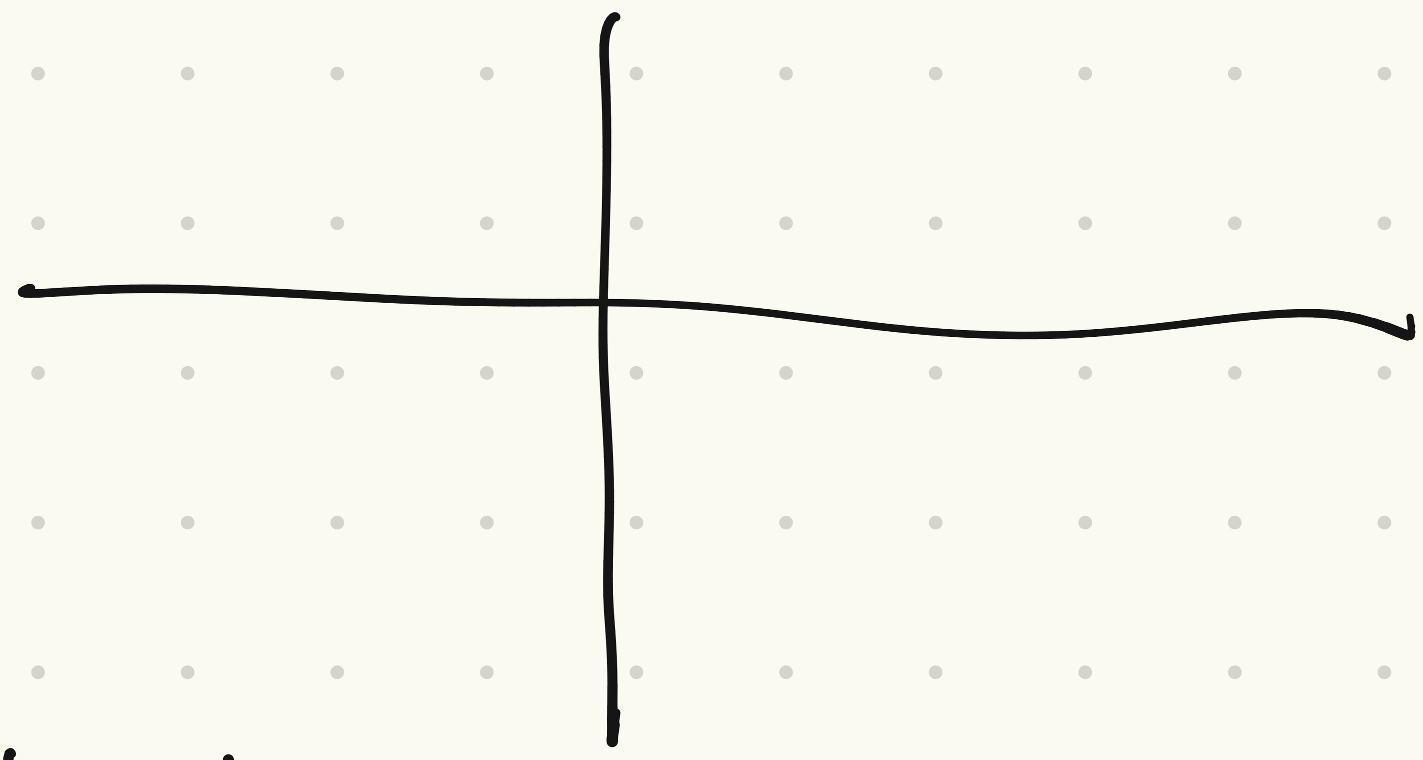
Uočimo da je konačan presjek alg. skupova alg. skup.

**Korolar 3.10.** Svaki konačan skup u $\mathbb{A}^n$ je alg. skup.

**Ireducibilnost:** Promotrimo dva alg. skupa

$A = Z(x^2+y^2-1)$ $\quad$ $B = Z((x-1)(y-1))$





Kružnicu $A$ ne možemo prikazati kao uniju alg. skupova dok vidimo da je $B$ unija dvaju pravaca. Reći ćemo da je alg. skup $A$ ireducibilan, dok je $B$ reducibilan.

Kako to vidjeti iz jednadžbi? Za hiperplohe, alg. skupom opisan jednom jednadžbom, jasno je da će skup biti reducibilan ako se polinom može faktorizirati, no kako alg. opisati ovaj fenomen ako je alg. skup opisan s više polinoma? Uvodimo pojam ideala alg. skupa.

**Def. 3.13.** Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$ bilo koji skup.

Onda definiramo

$$I(X) := \{ f \in K[T_1, \dots, T_n] : f(P) = 0 \ \forall P \in X \}$$

**Propozicija 3.14.** Neka je $X \subseteq \mathbb{A}^n$. Tada je $I(X)$ radikalni ideal. Nadalje $I(\emptyset) = K[T_1, \dots, T_n]$ i ako je $X \neq \emptyset$ onda je $I(X)$ pravi ideal u $K[T_1, \dots, T_n]$.

tj. $I(X) = \mathrm{Rad}(I(X))$ gdje radikal ideala $I$ definiramo kao $\{ f \in K[T_1, \dots, T_n] : f^k \in I$ za neki $k \in \mathbb{N} \}$.

očito vrijedi $I \subseteq \mathrm{Rad}(I)$

**Primjer:**

a) $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$

b) Neka je $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^n$ točka.

Tada $I(\{A\}) = (T_1 - a_1, \dots, T_n - a_n)$

je maksimalan ideal u $k[T_1, \dots, T_n]$.

**Def. 3.19.** Neka je $X$ neprazan alg. skup u $\mathbb{A}^n$. Kažemo da je $X$ ireducibilan ako je $I(X)$ prost ideal. Ako $X$ nije ireduc. kažemo da je reducibilan. Ireducibilan alg. skup se naziva

**algebarska mnogostrukost**