Topologija Zariskog:

Topologija Zariskog na afinom ili projektivnom skupu X je topologija čiji su zatvoreni skupovi algebarski podskupovi od X.

Neka je X afin alg. skup u $\mathbb{A}^n$.

Uvjerimo se da algeb. podskupovi od X definiraju topologiju. Trebamo provjeriti:

a) $X = V(0)$

$\emptyset = V(1)$ su zatvoreni skupovi

b) Neka je $C_i = V(S_i)$, $i \in I$, familija zatvorenih podskupova (gdje su S_i podskupovi od $K[T_1, \dots, T_n]$).

Tada je

$$\bigcap_{i\in I} C_i = V\left(\bigcup S_i\right)$$

zatvoren skup.

c) Neka su $C_i = V(S_i)$ za $i=1,\dots,n$

zatvoreni skupovi. Tada je

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i = V(I_1 \cdot \ldots \cdot I_n)$$

zatvoren skup, gdje je I_i ideal u $K[T_1,\dots,T_n]$ generiran s S_i.

Za $X \subset \mathbb{A}^n$ afin, baza otvorenih skupova je dana sa skupovima

$$U_f = \{p \in X : f(p) \neq 0\}$$ gdje je

$U_f = X \setminus V(f)$ je otvoren

$f \in K[T_1, \dots, T_n]$ polinom. Skupove tog oblika zovemo istaknuti otvoreni skupovi (eng. distinguished open sets).

Ti skupovi čine bazu topologije jer se svaki otvoren skup može prikazati kao njihova unija, tj. jer

$$X \setminus V(S) = \bigcup_{f \in S} U_f \quad \forall S \subset K[T_1, \dots, T_n]$$

Za $X \subset \mathbb{P}^n$ projektivni alg. skup baza je dana skupovima oblika

$$U_F = \{p \in X : F(p) \neq 0\}$$ za homogeni polinom F.

Morfizmi afinih alg. skupova:

Kada su dva afina alg. skupa "jednaka" ili izomorfna?

Neka su $X \subseteq \mathbb{A}^n$ i $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ afini algebarski skupovi. Morfizam afinih algebarskih skupova je preslikavanje $\varphi : X \to Y$

koje je dano polinomima. Tj. postoje polinomi $f_1, \dots, f_m \in K[T_1, \dots, T_n]$

t.d. za svaku točku $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$

$$\varphi(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x)) \in Y.$$

Odnosno, za svaki $g \in I(Y)$ vrijedi

$$g(f_1(x), \dots, f_m(x)) = 0 \quad \forall x \in X$$

Po definiciji alg. skupa X to znači

da je polinom $\quad T=(T_1,\dots,T_n)$

$$g(f_1(T),\dots,f_m(T)) \in I(X)$$

Odnosno, ako definiramo

koordinatne prstenove alg. skupova X i Y

$$K[X] = K[T_1,\dots,T_n] / I(X) \quad \text{i}$$

$$K[Y] = K[W_1,\dots,W_m] / I(Y)$$

onda morfizam $\varphi : X \to Y$

inducira homomorfizam prstenova

$$\varphi^* : K[Y] \to K[X]$$

preciznije homomorfizam K-algebri.

definiran s

$$\varphi^*(g) = g \circ \varphi .$$

Obratno, ako je $\psi : K[Y] \to K[X]$ homomorfizam K-algebri onda definiramo pripadni morfizam $\varphi : X \to Y$ t.d. je $\varphi^* = \psi$ formulom:

$$\varphi(T_1, \dots, T_m) = (\varphi_1(T_1, \dots, T_m), \dots, \varphi_n(T_1, \dots, T_m))$$

gdje je $\varphi_i(T_1, \dots, T_m) = \psi(W_i)$.

$\Rightarrow$ morfizmi $X \to Y$ su u bijekciji s homomorfizmima K-algebri $K[Y] \to K[X]$.

$$\Rightarrow \quad X \simeq Y \iff K[X] \simeq K[Y].$$

Def. Dva afina alg. skupa X i Y su izomorfni ako postoje morfizmi $\varphi : X \to Y$ i $\psi : Y \to X$ t.d. $\varphi \circ \psi$ i $\psi \circ \varphi$ identitete.

Primjer:

a)

Neka je $X = V(T_1^2 + T_2^2 - 1)$.

Tada je $\varphi(T_1, T_2) = \left(\frac{T_1 + T_2}{\sqrt{2}}, \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{2}} \right)$

morfizam $\varphi : X \to X$

jer je
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}} \right)^2$$
$$= x_1^2 + x_2^2 = 1 \quad \forall (x_1, x_2) \in X.$$

Morfizam φ zovemo automorfizam od X (pronađite mu inverz).

b) Naj bo $X = V(T_1^2 + T_2^2 - 1)$

Naj bo $W_1 = 2T_1 - T_2$

$W_2 = T_1 + 1$

zamenjava vrednosti.

$\Rightarrow T_1 = W_2 - 1 \;;\; T_2 = 2T_1 - W_1$

$= 2W_2 - 2 - W_1$

$$T_1^2 + T_2^2 - 1 = (W_2 - 1)^2 + (2W_2 - 2 - W_1)^2 - 1$$

$$= W_1^2 + 5W_2^2 - 4W_1W_2 - 4W_1 - 8W_2 + 4$$

Pa smo definirali izomorfizem

$$\varphi : X \to Y = V(W_1^2 + 5W_2^2 - 4W_1W_2 - 4W_1 - 8W_2 + 4)$$

$$\varphi(T_1, T_2) = (2T_1 - T_2, T_1 + 1)$$

$$\varphi^{-1}(W_1, W_2) = (W_2 - 1, 2W_2 - 2 - W_1)$$

c) $Y = V(T_1^3 + T_2^2 + 1)$

$X = V(T_1^6 + T_2^2 + 1)$

$\varphi : X \to Y$

$\varphi(T_1, T_2) = (T_1^2, T_2)$

je morfizam koji nije izomorfizam.

d) Neka je $X = V(T_2^2 - T_1^3 - T_1^2)$.

$T_2^2 = T_1^2(T_1 + 1) \quad : T_1^2$

$\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = T_1 + 1$

Neka je $Y = V(T_2^2 - T_1 - 1)$.

Promotrimo preslikavanje

$\varphi : X \to Y$

$\varphi(T_1, T_2) = \left(\frac{T_2}{T_1}, T_1\right)$

Ako je $(x_1, x_2) \in X$ i $x_1 \neq 0$

onda je $\varphi(x_1, x_2) \in Y$, ali

preslikavanje nije definirano u slučaju

da je $x_1 = 0$ pa φ nije morfizam.

No, bez obzira na to, preslikavanje φ

je vrlo korisno jer nam "inverz"

$$\varphi^{-1} : Y \to X \quad ; \quad \varphi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_1 y_2)$$

omogućava parametrizaciju točaka na X

preko parametrizacije točaka na Y.

To preslikavanje ćemo zvati

racionalno

preslikavanje.