Opišimo sada K, $\mathcal{O}_P$, $\mathcal{M}_P$ i $C(f_1, f_2)_P$ preko homogenih koordinata tako da ih možemo definirati i za točke P u beskon.

Neka je $x = \frac{X}{Z}$, $y = \frac{Y}{Z}$

$$\Rightarrow \quad R = k[x,y] = k\left[\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right] \subset k(X,Y,Z).$$

$$K = k(x,y) \quad \longleftrightarrow \quad \Phi = \frac{F}{G}(X,Y,Z)$$

homogene stupnja 0

(tj. F i G su homogeni istog stupnja).

jer

$$\phi(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{Z^n f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)}{Z^n g\left(\frac{X}{Z}, Y/Z\right)} = \frac{F(X,Y,Z)}{G(X,Y,Z)}$$

$$= \Phi(X,Y,Z).$$

Ako je $P = [A,B,C]$ točka u $\mathbb{P}^2$ i $\Phi = \frac{F}{G} \in K$

kažemo da je Φ definiran u P ako

$G(A,B,C) \neq 0$.

Definiramo:

$$\mathcal{O}_P = \{\Phi \in K : \Phi \text{ je definirana u } P\}$$

$$\mathcal{M}_P = \{\Phi \in \mathcal{O}_P : \Phi(P) = 0\}.$$

5.1. Lako se provjeri da ako je $P = (a,b) \in \mathbb{A}^2$
$= [a,b,1] \in \mathbb{P}^2$

onda definicije od $\mathcal{O}_P$, $\Phi(P)$ i $\mathcal{M}_P$ se poklapaju s prethodnim definicijama.

Neka su sada

$$C_1 : F_1 = 0 \quad \text{i} \quad C_2 : F_2 = 0$$

dvije krivulje u $\mathbb{P}^2$ bez zajedničke komponente.

Neka su $f_1(x,y) = F_1(x,y,1)$ i $f_2(x,y) = F_2(x,y,1)$ polinomi koji definiraju njihove afine dijelove.

Definirajmo

$$(F_1, F_2)_P = \left\{ \frac{F}{G} \in \mathcal{O}_P : F \text{ je oblika } F = H_1F_1 + H_2F_2 \right\}.$$

zašto ovo nismo def. kao ideal u $\mathcal{O}_P$ gener. s F_1 i F_2?

5.2. Ako je $P \in \mathbb{A}^2$ onda se lako vidi da je $(F_1, F_2)_P$ jednak $(f_1, f_2)_P$ idealu u $\mathcal{O}_P$ generiranom s f_1 i f_2.

Sada za $P \in \mathbb{P}^2$ definiramo multiplicitet presjeka krivulji C_1 i C_2 u točki P kao

$$I(C_1 \cap C_2, P) = \dim_k \left(\mathcal{O}_P / (F_1, F_2)_P \right).$$

Zbog 5.2. znamo da se ova definicija poklapa s ranijom za $P \in \mathbb{A}^2$.

5.3. Lako se vidi da $\mathcal{O}_P$ i $(F_1, F_2)_P$ ne ovisi o odabiru homogenih koordinata na $\mathbb{P}^2$ pa onda i $I(C_1 \cap C_2, P)$ ne ovisi.

Sada nam je cilj pronaći pravac $L \subset \mathbb{P}^2$ koji ne siječe $C_1 \cap C_2$. Onda ćemo odabrati homogene koordinate na $\mathbb{P}^2$ za koji je L pravac u beskonačnosti te tako reducirati Bezoutov teorem na prethodno dokazani slučaj.

5.4. Neka je S konačan skup u $\mathbb{P}^2$. Budući da je polje $k=\bar{k}$ beskonačno postoji pravac koji ne siječe S.
(npr. gledamo pravce kroz neku fiksnu točku...)

Pokažimo još da je $C_1 \cap C_2$ konačan. To slijedi iz prvog koraka gdje smo pokazali da je $C_1 \cap C_2 \cap \mathbb{A}^2$ konačan (za pravac u beskonačnosti možemo odabrati bilo koji pravac koji nije komponenta od C_1 i C_2 – tada znamo da je presjek C_1 odnosno C_2 s tim pravcem konačan.).
direktno provjera.

Bezoutov tm. sada slijedi.

■.