Za kraj kolegija, cilj nam je dokazati Bezoutov teorem.

Neka su $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}^2$ projektivne krivulje (opisane homogenim polinomima $C_1 = Z(\tilde{f}_1)$ i $C_2 = Z(\tilde{f}_2)$) koje nemaju zajedničkih komponenti (tj. polinomi $\tilde{f}_1$ i $\tilde{f}_2$ nemaju zajedničkih faktora).

Za formulaciju Bezoutovog teorema ključan je pojam multipliciteta presjeka krivulja u točki $P \in \mathbb{P}^2$, $I(C_1 \cap C_2, P)$.
Taj pojam ćemo kasnije precizno definirati. Za sada ćemo navesti neka njegova svojstva..

(i) ako $P \notin C_1 \cap C_2$ onda $I(C_1 \cap C_2, P) = 0$.

(ii) ako $P \in C_1 \cap C_2$ i P je nesingularna točka i na C_1 i na C_2 i ako su tangente na C_1 i C_2 u točki P različite, onda $I(C_1 \cap C_2, P) = 1$

kažemo da se C_1 i C_2 sijeku transferzalno

(iii) Ako je $P \in C_1 \cap C_2$ i ako se C_1 i C_2 ne sijeku transferzalno u P onda

$$I(C_1 \cap C_2, P) \geq 2.$$

definirano nad $k = \bar{k}$

Teorem (Bezout): Neka su C_1 i C_2 projektivne krivulje bez zajedničkih komponenti. Tada

$$\sum_{P \in C_1 \cap C_2} I(C_1 \cap C_2, P) = \deg C_1 \cdot \deg C_2$$

Posebno, $\#(C_1 \cap C_2) \leq \deg C_1 \cdot \deg C_2$

Dokaz: Neka je $\deg C_1 = n_1$ i $\deg C_2 = n_2$.

Neka su $f_1(x,y)=0$ i $f_2(x,y)=0$ $[f_i(x,y) \in k[x,y]]$ afini modeli krivulja C_1 i C_2 redom, $k = \bar{k}$.

Pretp. za početak a pravac u beskonačnosti nije komponenta niti krivulje C_1 niti C_2.

Iz pretp. teorema slijedi $\deg f_i = n_i$ i f_1 i f_2 nemaju zajedničkih faktora.

Označimo $R = k[x,y]$, i neka je $(f_1, f_2) = f_1R + f_2R \subset R$ ideal generiran s f_1 i f_2.

Dokaz ćemo podijeliti na sljedećih 6 koraka. Pokazat ćemo:

1.

$$\#(C_1 \cap C_2 \cap \mathbb{A}^2) \overset{(A)}{\leq} \dim_k \left(R/(f_1,f_2) \right) \overset{(B)}{\leq} n_1 n_2$$

(2.) [B] je jednakost

ako se C_1 i C_2 ne sijeku u beskonačnosti.

(3.) Vrijedi jača nejednakost od (A)

$$\sum_{P \in C_1 \cap C_2 \cap \mathbb{A}^2} I(C_1 \cap C_2, P) \overset{(A^*)}{\leq} \dim_k R/(f_1, f_2)$$

(4.) A^* je jednakost

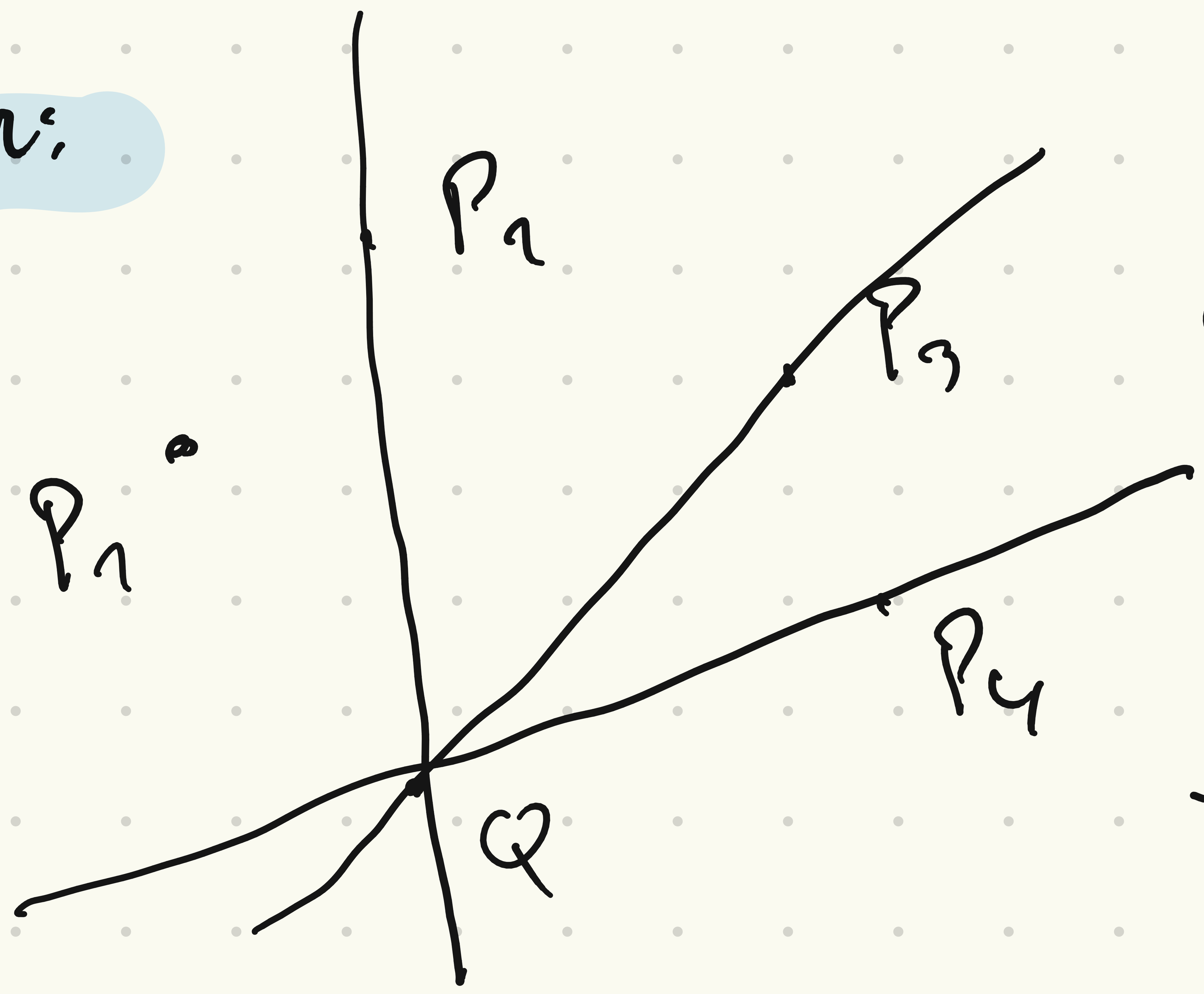
(1)-(4) impliciraju dokaz Bezoutovog teorema u slučaju kada se C_1 i C_2 ne sijeku u beskonačnosti.

(5.) Definicija multipliciteta se ne promijeni ako napravimo projektivnu transformaciju. Postoji pravac $L \subset \mathbb{P}^2$ koji ne siječe niti jednu točku iz $C_1 \cap C_2$. Projektivnom transformacijom taj pravac prebacimo u pravac u ∞ i tako reduciramo argument na (1)–(1).

1. korak

1.1. Neka su $P_1, \ldots, P_m$ različite točke u (x,y)-ravnini. Pokažimo da za svaki i postoji polinom h_i, t.d. $h_i(P_i)=0$ i $h_i(P_j) \neq 0 \ \forall j \neq i$.

Dokaz:



h_1 odaberem tako da je $V(h_1)$ unija pravaca kroz neki Q i P_i, $i \neq 1$ t.d. $\overline{QP_i}$ ne sadrži P_1.

1.2. Pretp. da su m točaka P_i iz 1.1. leže u presjeku $C_1 \cap C_2$. Pokažimo da su polinomi h_i linearno nezavisni modulo (f_1, f_2) što implicira

$$m \leq \dim_{\mathbb{R}} R/(f_1, f_2)$$

Dokaz: Pretp. suprotno

$c_1 h_1 + \ldots + c_m h_m = g_1 f_1 + g_2 \cdot f_2 \in (f_1, f_2)$ za

neke $c_i \in k$ i $g_1, g_2 \in R$. Uvrštavanjem

točke P_i dobivamo $c_i = 0$, $\forall i$ $\Rightarrow$ E

$\Rightarrow$ nezavisnost A sada slijedi.

Definiramo:

- $\phi(d) := \binom{d+2}{2} = \frac{1}{2}(d+2)(d+1)$
- $R_d :=$ vektorski prostor polinoma $f(x,y)$ stupnja $\leq d$
- $W_d := R_{d-n_1} f_1 + R_{d-n_2} \cdot f_2$

vektorski prostor nad k

$W_d \subset (f_1, f_2)$

1.3 $\dim R_d = \phi(d)$

Dokaz: Kako je broj monoma $x^i y^j$ stupnja d jednak $d+1 = \phi(d) - \phi(d-1)$

slijedi: $\dim R_d = \sum_{k=0}^{d} (\phi(k) - \phi(k-1)) = \phi(d)$

1.4. Za $d \geq m_1 + m_2$ vrijedi

$$R_{d-m_1} \cdot f_1 \cap R_{d-m_2} \cdot f_2 = R_{d-m_1-m_2} f_1 f_2$$

Dokaz: $\Rightarrow$ Neka je $g = g_1 \cdot f_1 = g_2 \cdot f_2$

gdje je $\deg g_1 \leq d - m_1$ i $\deg g_2 \leq d - m_2$

Budući da f_1 i f_2 nemaju zajedničkih faktora slijedi $f_2 \mid g_1$ gdje je

$\deg \frac{g_1}{f_2} \leq d - m_1 - m_2 \Rightarrow \frac{g_1}{f_2} \in R_{d-m_1-m_2}$.

$\Leftarrow$

d.z.

1.5. Za $d \geq m_1 + m_2$

$$\dim R_d - \dim W_d = \phi(d) - \phi(d-m_1)$$
$$- \phi(d-m_2) + \phi(d-m_1-m_2) = m_1 m_2.$$

Dokaz: $W_d = R_{d-m_1} f_1 + R_{d-m_2} f_2$

$$\Rightarrow \dim W_d = \dim R_{d-m_1} f_1 + \dim R_{d-m_2} f_2$$
$$- \dim (R_{d-m_1} f_1 \cap R_{d-m_2} f_2)$$
$$= \phi(d-m_1) + \phi(d-m_2) - \phi(d-m_1-m_2)$$

Pa tvrdnja slijedi.

1.6. Ako su $g_1, g_2, \ldots, g_{m_1 m_2 + 1} \in R$ onda su oni linearno zavisni modulo (f_1, f_2).

Dokaz: Neka je $d \geq m_1 + m_2$ odabran tako da $g_i \in R_d$ $\forall i = 1, \ldots, m_1 m_2 + 1$.

Tada zbog 1.5. postoji linearna kombinacija $g = \sum c_i g_i \in W_d \subset (f_1, f_2)$ i g_i $c_i \ne 0$.

Sada nejednakost (B) slijedi.

2. korak

Za $0 \neq f(x,y)$ s f^* označavamo homogeni dio od f najvišeg stupnja.

Npr. za $f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + 3x^3 + xy^2 + 2y^3 + 3$

imamo $f^*(x,y) = x^4 - x^2y^2$.

Uočimo da $f^*(x,y)$ možemo faktorizirati (jer je $k = \bar{k}$) kao

$$f^*(x,y) = \prod_{i=1}^{n} (a_i x + b_i y)$$; gdje su $a_i, b_i \in k$ i $n = \deg f$.

npr. $x^4 - x^2y^2 = x^2(x-y)(x+y)$

$f^*(x,y)$ nama daje informaciju o točkama u beskonačnosti projektivizacije krivulje $f(x,y) = 0$

npr. $\hat{f}(x,y,z) = x^4 - x^2y^2 + 3x^3z + xy^2z + 2y^3z + 3z^4$

Pa $\tilde{f}(x,y,0) = f^*(x,y) = x^4(x-y)(x+y)$

$\rightsquigarrow$ $[0:1:0]$ tri su točke
$[1:1:0]$ u beskonačnosti
$[1:-1:0]$

Općenito:

2.1. Točke $[b_i : -a_i : 0]$ $i=1,\ldots,m$ su (sve) točke u beskonačnosti (projektivizacije) krivulje $f(x,y)=0$.

Dokaz: d.z.

2.2. Ako se C_1 i C_2 ne sijeku u ∞ onda f_1^* i f_2^* nemaju zajedničkih faktora

Dokaz: Slijedi iz 2.1.

2.3. Ako f_1^* i f_2^* nemaju zajedničkih faktora onda $(f_1, f_2) \cap R_d = W_d$ za sve $d \geq n_1 + n_2$.

Dokaz. $W_d \subseteq (f_1, f_2) \cap R_d$ pa dokazujemo drugu inkluziju. Zapišimo $f \in (f_1, f_2) \cap R_d$ kao $f = g_1 \cdot f_1 + g_2 \cdot f_2$ gdje su g_1 i g_2 odabrani tako da budu najmanjeg stupnja (u pomijekom uvrstimo na $IN \times IN$) . . .