Projektivni prostor $\mathbb{P}^n$:

Na skupu $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ definiramo relaciju

$$(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n) \overset{def}{\iff} \exists t \in K, t \neq 0$$

$$\text{t.d. } b_i = t \cdot a_i, \ 0 \leq i \leq n.$$

Klasu ekvivalencije određenu točkom $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} - \{0\}$ označimo s

$$(a_0 : a_1 : \dots : a_n).$$

Po definiciji radi se o skupu

$$(a_0 : a_1 : \dots : a_n) = \{(ta_0, \dots, ta_n) : t \in K, t \neq 0\}$$

ovo je pravac kroz ishodište

Definicija 6.8. Neka je $n \geq 1$. Projektivni n-dimenzionalni prostor $\mathbb{P}^n$ je kvocijentni skup od $\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}$ u odnosu na $\sim$. tj. skup

$$\mathbb{P}^n \overset{def}{=} \{(a_0 : a_1 : \ldots : a_n) \mid (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\}\}.$$

Klase ekvivalencije $(a_0 : a_1 : \ldots : a_n)$ nazivamo točkama projektivnog prostora. Nadalje, $\mathbb{P}^1$ nazivamo projektivni pravac, $\mathbb{P}^2$ projektivna ravnina, $\mathbb{P}^3$ projektivni prostor.

uvjerite se da su ove definicije ekv.

Projektivan prostor možemo i malo apstraktnije definirati. Neka je V vektorski prostor nad K dimenzije $n+1$. Tada je projektivan prostor

pravac kroz ishodište.

$$\underset{\mathbb{P}^n}{\underset{\cong}{\mathbb{P}(V)}} = \{\ell \subset V : \ell \text{ je vektorski potprostor dimenzije } 1\}$$

Linearni potprostor od $\mathbb{P}(V)$ je podskup oblika $\mathbb{P}(W)$ gdje je $W < V$ vektorski potprostor. Ako je $\dim W = 1$ onda je $\mathbb{P}(W)$ točka, ako je $\dim W = 2$ onda je $\mathbb{P}(W)$ pravac ...

Lema: Neka su $\mathbb{P}(V_1), \mathbb{P}(V_2) \subset \mathbb{P}(V)$ projektivni potprostori. Tada

$$\mathbb{P}(V_1) \cap \mathbb{P}(V_2) = \mathbb{P}(V_1 \cap V_2)$$

Dokaz: Po definiciji $\mathbb{P}(V_1) \cap \mathbb{P}(V_2)$ je skup pravaca $\ell \subset V_1 \cap V_2$, tj. element od $\mathbb{P}(V_1 \cap V_2)$.

$\blacksquare$

Afin pokrivač proj. prostora

Neka je $V = K^{n+1}$. Za $0 \leq i \leq n$ definiram:

$$U_i := \{[x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n] : x_i \neq 0\}$$

Propozicija:

a) Skupovi U_i pokrivaju $\mathbb{P}^n$, tj.

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

b) Postoji bijekcija $\varphi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$

$$[x_0 : \ldots : x_i : \ldots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

Inverz je dan s

$$(y_0, \ldots, y_{n-1}) \longmapsto [y_0 : \ldots : y_{i-1} : 1 : y_{i+1} : \ldots : y_{n-1}$$

Skup $H_\infty := \mathbb{P}^n - U_n$

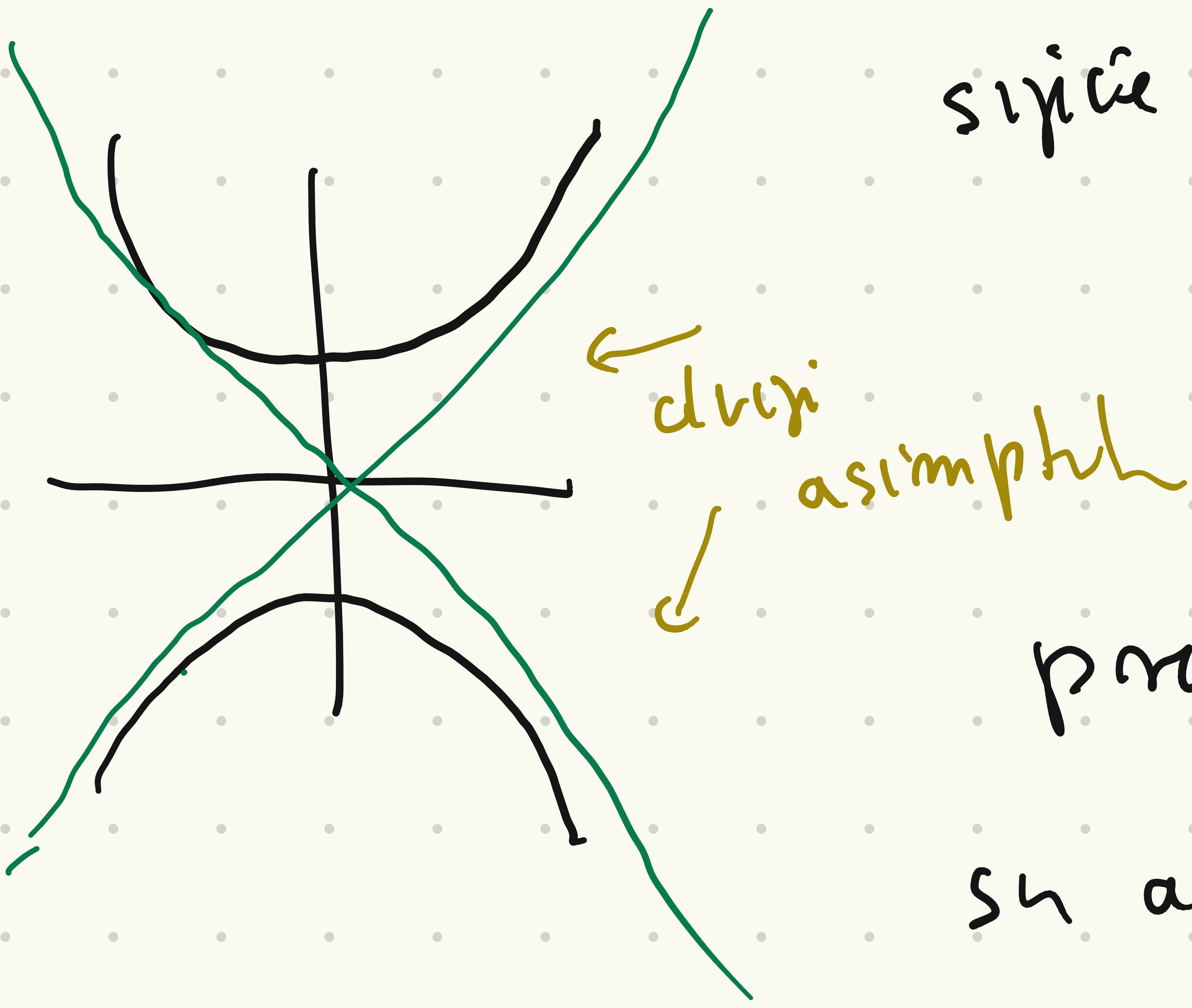
$$= \{ [x_0 : \dots : x_{n-1} : 0] \in \mathbb{P}^n \}$$

se zove hiperravnina u beskonačnosti.

Vrijedi $H_\infty \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ pa je $\mathbb{P}^n \simeq \mathbb{P}^{n-1} \cup \mathbb{A}^n$.

Primjer: Promotrimo hiperbolu C nad $k = \mathbb{C}$

$C: y^2 = x^2 + 1$ u $\mathbb{A}^2$. Svaki pravac u $\mathbb{A}^2$



siječe hiperbolu u dvije točke (računajući kratnosti) osim pravaca $y = \pm x$ koji su asimptote u beskonačnost i ne sijeku C.

To je važna iznimka koja nestane ako projektiviziramo C. Neka je

$$\tilde{C} : x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$$ gdje

su $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2$.

skup nultočaka polinoma u $\mathbb{P}^2$

ima smisla jer $x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$

$\Rightarrow (kx_0)^2 = (kx_1)^2 + (kx_2)^2$

Uočimo da je $\tilde{C} \cap U_2$ afina krivulja dana jednadžbom $x_0^2 = x_1^2 + 1$ – hiperbola od maloprije. Projektivizacijom te hiperbole krivulji smo dodali neke točke koje se nalaze u $\mathbb{P}^2 - U_2 = H_\infty = \{[x_0 : x_1 : 0]\}$

pravac u ∞

Koje su to točke? Ako uvrstimo $x_2 = 0$ dobivamo $x_0^2 = x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm x_0$ za $x_i \neq 0$

odnosno $[x_0 : x_0 : 0]$ i $[x_0 : -x_0 : 0]$

$$\begin{array}{ccc} [x_0 : x_0 : 0] & \text{i} & [x_0 : -x_0 : 0] \\ \| & & \\ [1 : 1 : 0] & \text{i} & [1 : -1 : 0] \end{array}$$

krivulja $\tilde{C}$ ima dvije točke u ∞

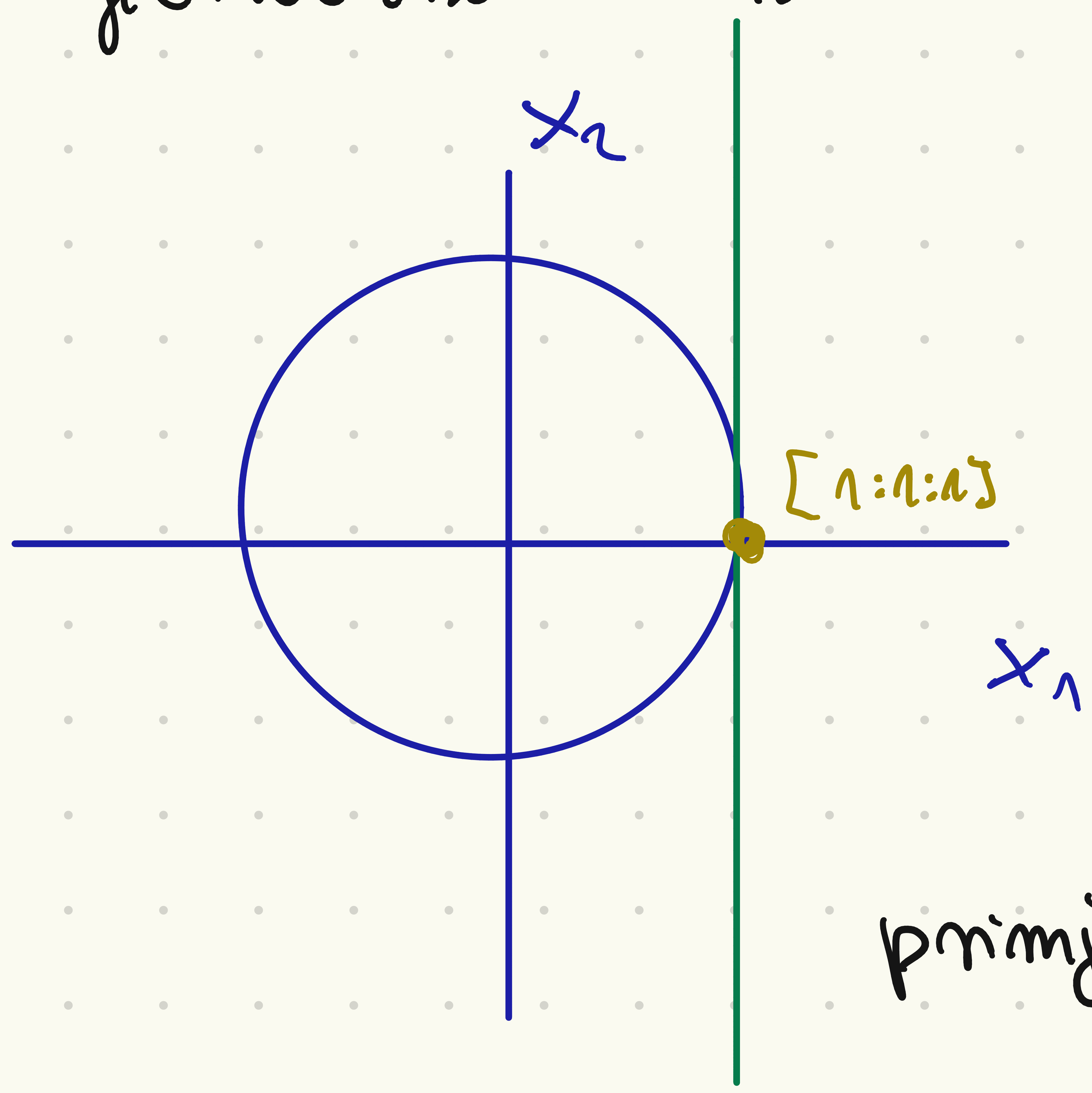
Izračunajmo sada presjek $\tilde{C}$ i (projektivizirani) pravac $x_1 = x_0$

Riješimo sustav
$$\begin{cases} x_0^2 = x_1^2 + x_2^2 \\ x_0 = x_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_0^2 = x_0^2 + x_2^2 \Rightarrow x_2 = 0$

pa je $(x_0, x_0, 0)$ rješenje $\forall x_0 \in \mathbb{C}$, odnosno u presjeku se nalazi točka u beskonačnosti $[1:1:0]$. No očekujemo dvije točke presjeka – pokažimo da je pravac tangenta na $\tilde{C}$ u $[1:1:0]$. Odaberimo sada neki otvoreni afini pokrivač koji sadrži $[1:1:0]$, npr. $U_0 = \{[1:x_1:x_2]\}$.

$\tilde{C} \cap U_0$ je dana jednadžbom $1 = x_1^2 + x_2^2$ dok je pravac $x_0 = x_1$ u U_0 dan jednadžbom $x_1 = 1$ (tj. skup točaka $[1:1:x_2]$)



Vidimo da je pravac tangenta na $\tilde{C}$. ◼

Sada ćemo ovaj primjer generalizirati.

Projektivni algebarski skupovi:

Ne-nul polinom $F \in K[T_0, \dots, T_n]$ je **homogen** ako postoji $d \in \mathbb{N}_0$ t.d.

$$F(\lambda T_0, \dots, \lambda T_n) = \lambda^d F(T_0, \dots, T_n) \quad \forall \lambda \in K^*.$$

stupanj polinoma

Primjer: $F(T_0, T_1, T_2) = T_0 T_1 T_2 + T_0^3 + T_1 T_2^2$

Svaki nenul polinom F se može prikazati kao suma homogenih polinoma $F = F_0 + \dots + F_d$ gdje je F_i homogen polinom stupnja i.

Neka je F homogeni polinom. Ako $F(x_0, \dots, x_n) = 0$ za neki $(x_0, \dots, x_n) \in K^{n+1} - \{0\}$ onda $F(kx_0, \dots, kx_n) = 0$ za sve $k \in K^*$,

želimo izbjeći $(0, \dots, 0)$

tj. skup nultočaka od F je unija pravaca kroz ishodište. Zato ima smisla reći da je $[x_0:\dots:x_n] \in \mathbb{P}^n$ nultočka od F iako F nije funkcija na $\mathbb{P}^n$ (jer vrijednost $F(x_0,\dots,x_n)$ nije neovisna o odabiru reprezentanta klase $[x_0:x_1:\dots:x_n]$)

Def. Neka je S podskup skupa homogenih polinoma u $K[T_0,\dots,T_n]$. Projektivni algebarski skup definiran sa S je

$$V(S) = \{ [x_0:\dots:x_n] \in \mathbb{P}^n : f(x_0,\dots,x_n) = 0 \ \forall f \in S \}.$$

(ili $\mathcal{Z}(S)$)

Kao i u afinom slučaju, pokazalo se je da je prirodno gledati ideal $I(S)$ u $K[T_0,\dots,T_n]$ generiran s S jer je $V(S) = V(I(S))$. Uočimo da elementi ovog ideala nisu nužno homogeni polinomi, ali je $I(S)$ generiran s homogenim polinomima. Takvi ideali se zovu homogeni ideali.

još jedna karakterizacija homog. ideala

Propozicija: Ideal $I \subset K[T_0, \dots, T_n]$ je homogen ako i samo ako $\forall F \in I$ vrijedi da su sve njegove homogene komponente iz I (tj. ako je $F = F_0 + \dots + F_n$ onda $F_i \in I$).

Dokaz: Neka je I generiran s homogenim elementima. Znamo iz algebre da je prsten $K[T_0, \dots, T_n]$ Noetherin pa je I konačno generiran. Označimo generatore s $H_1, \dots, H_r$. Neka je $F \in I$ proizvoljan. Tada postoje $f_1, \dots, f_r \in K[T_0, \dots, T_n]$ t.d. $F = \sum f_i H_i$. Da bi pokazali da su homogene komponente od F elementi iz I dovoljno je pokazati da su homogene komp. od $f_i H_i$ elementi iz I. No to je očito jer je svaka hom. komp. djeljiva s H_i.

Pretp. da su homogene komponente svakog elementa iz I elementi iz I. Tada je očito I generiran s homogenim elementima jer svaki nehomogen generator (a znamo da je po Hilbertovom teoremu o bazi prsten $K[X_0, \ldots, X_n]$ Noetherin pa I ima konačno mnogo generatora), možemo zamijeniti s njegovim homogenim komponentama (jer su iz I) i tako dobiti skup homogenih generatora.

$\blacksquare$

Slično kao i kod afinih algebarskih skupova korespodencija između projektivnih skupova i homogenih ideala. Jedino je ovdje iznimka ideal $m = \langle T_0, \ldots, T_n \rangle \subset K[T_0, \ldots, T_n]$ za koji je $V(m) = \emptyset$. Zovemo ga irelevantni ideal.

Tako da onda gledamo samo homogene ideale koji ne sadrže irelevantni ideal.

Homogenizacija afinih mnogostrukosti

Važno je razumijeti veza između afinih i projektivnih algebarskih skupova

Za $f \in K[T_1, \dots, T_n]$ definiramo njegova homogenizacija formulom

$$F(T_0, \dots, T_n) = T_0^{\deg f} f\left(\frac{T_1}{T_0}, \dots, \frac{T_n}{T_0}\right)$$

ovo je homogeni polinom.

Važno je uočiti da je $F(1, T_1, \dots, T_n) = f(T_1, \dots, T_n)$

Slično možemo homogenizirati i afin skup tako da homogeniziramo svaki generator njegovog ideala. Tako ćemo dobiti homogeni ideal odnosno projektivni skup.

Primjer: Promotrimo parabolu $P = V(T_2^2 - T_1)$ i hiperbolu $C = V(T_1T_2 - 1)$

Kao afine mnogostrukosti, vidjet ćemo kasnije, oni nisu izomorfni. Njihove homogenizacije $F_1 := T_1^2 - T_2T_0$ i $F_2 = T_1T_2 - T_0^2$ su izomorfne.

Izomorfizam s $F_1 = 0$ u $F_2 = 0$ je dan preslikavanjem

$$[T_0 : T_1 : T_2] \mapsto [T_1, T_0, T_2].$$

Dakle, projektivno su parabola i hiperbola jedan te isti objekt.