Waringov problem za forme

Neka je $f \in K[x_0,\dots,x_n]$ homogeni polinom stupnja d. Waringov rang od f je najmanji r za koji postoje linearne forme $L_1,\dots,L_r$ t.d.

$$f(x_0,\dots,x_n) = \lambda_1 L_1(x_0,\dots,x_n)^d + \dots + \lambda_r L_r(x_0,\dots,x_n)^d$$

za neke $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in K$.

Definirajmo Veroneseovu mnogostrukost $V_{n,d}$ kao sliku $v_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^N$ gdje je

$$v_d : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N, \quad [x_0:\dots:x_n] \mapsto [\dots : x_0^{d_0} x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n} : \dots]$$

gdje je $d_0+d_1+\dots+d_n = d$ i $N = \binom{n+d}{d} - 1$.

Točke od $\mathbb{P}^N$ parametriziraju homogene polinome stupnja d u varijablama $x_0,\dots,x_n$.

Točke u $V_{n,d}$ parametriziraju forme koji su oblika L^d za neku linearnu formu L.

Zašto? Točka $\nu_d([a_0 : a_1 : \ldots : a_n])$ odgovara formi $(a_0 x_0 + \ldots + a_n x_n)^d$.

Dakle, f odgovara točki u $\mathbb{P}^N$. Napisati f kao linearnu kombinaciju d-tih potencija linearnih formi je ekvivalentno prikazati "točku" $f \in \mathbb{P}^N$ kao linearnu kombinaciju točaka na Veroneseovoj mnogostrukosti.

Mnogostrukost sekanti:

Zbog toga je prirodno promotriti mnogostrukost $\sigma_r(V_{n,d})$ koja je po definiciji zaviština zatvarača od unije svih projektivnih $(r-1)$-ravnina koje su razapete s r različitih točaka na $V_{n,d}$.

Lema: f ima Waringov rang $\leq r$

ako i samo ako $f \in \mathbb{P}^N$ se nalazi

u $\sigma_r(V_{n,d})$

$\Rightarrow$ prirodno pitanje: koja je dimenzija

od $\sigma_r(V_{n,d})$? Ako

je r takav da je $\dim \sigma_r(V_{n,d}) = N$

onda je zatvarač od $\sigma_r(V_{n,d}) = \mathbb{P}^N$ pa

generički f ima Waringov rang $\leq r$.

Što na heuristiku kaže za dimenziju od $\sigma_r(V_{n,d})$?

a) $V_{n,d}$ ima dimenziju n pa za odabir

od r točaka na $V_{n,d}$ nam treba nr

parametara

b) Tih r točaka razapinju prostor dimenzije $r-1$,

tj. za specifikant točke nam treba još

$r-1$ parametar

$\Rightarrow$ očekivana dimenzija je

$$r(n+1)-1$$

$\Rightarrow$ očekivani Waringov rang je

$$r(n+1)-1 = N = \binom{n+d}{d}-1$$

$$\Rightarrow r = \frac{\binom{n+d}{d}}{n+1}$$

Teorem (Alexander–Hirschowitz teorem)

$\forall n \geq 1$ i $\forall d \geq 2$

$$\dim \sigma_r(V_{n,d}) = \min\left\{ r(n+1)-1, \binom{n+d}{d}-1 \right\}$$

uz 4 iznimke:

$n=2$,	$d=4$,	$r=5$
3	4	9
4	3	7
4	4	14

za koje je dimenzija za 1 manja od očekivane.

Literatura: 4 lectures on secant varieties

Carlini, Grieve, Oeding

(seminar)