Klasifikacija uzoraka za tapete

(Patrick J. Morandi)

↑ pogledajte Escherove primjere

$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ = grupa izometrija

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ t.d. $\|h(v)-h(w)\| = \|v-w\| \ \forall v,w$

$h(x) = g(x)+b$ gdje je g linearna izometrija oblika $g(x) = Ax$ za neki $A \in O_n(\mathbb{R})$

sve izometrije koje čuvaju ishodište su tog oblika.

Lema: Neka je $G < O_2(\mathbb{R})$ konačna grupa. Tada je G izomorfna cikličkoj grupi reda n ili diedralnoj grupi D_n reda $2n$.

generiranom rotacijom za $\frac{2\pi}{n}$ i bilo kojom refleksijom

Ako je φ izometrija $\mathbb{R}^2$ onda $\varphi(x) = \overset{\in O_2(\mathbb{R})}{A}x + \overset{\in\mathbb{R}^2}{b}$, pišemo $\varphi = (A, b)$.

Ako komponiramo dvije izometrije dobivamo formule.

$$(A,b)(C,d) = (AC, A(d)+b)$$

(*) $$(A,b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1}(b))$$

Def. Podskup $W \subset \mathbb{R}^2$ je **tapeta** ako je translacijska podgrupa T grupe simetrija

elementi su translacije

$$Sym(W) = \{g \in Isom(\mathbb{R}^2) : g(W) = W\}$$

2 dimenzionalna rešetka.

Grupa $Sym(W)$ se tada zove **grupa tapeta**.

Def. Neka je G grupa tapeta.

Grupa točaka G_0 je skup

$$G_0 = \{A \in O_2(\mathbb{R}) : (A,b) \in G\}.$$

vrijedi: $G_0 \simeq G/T$ jer

projekcija

$$0 \to T \to G \to G_0 \to 0$$

Želimo klasificirati tapete preko grupe tapeta G. Krećemo od

$$0 \to T \hookrightarrow G \to G_0 \to 0.$$

Što možemo reći o G_0?

Lema: Grupa točaka G_0 grupe tapeta G je konačna.

$A \in O_2(\mathbb{R})$ prirodno djeluje na $\mathbb{R}^2$ rotacijama

Dokaz: Pokažimo da G_0 djeluje rotacijama na T. Neka je $t \in T$ i $(A, b) \in G$.

Tada

$$(A, b)(Id, t) = (A, A(t) + b) \in G$$

$$(Id, t)(A, b) = (A, b + t) \in G.$$

Neka je $w = (A(t) + b) - (b + t) = A(t) - t$.

Tada je

$$(Id, w)(\underbrace{A, b+t}_{\in G}) = (\underbrace{A, A(t)+b}_{\in G})$$

pa $(Id, w) \in G$

$\Rightarrow w \in T \Rightarrow A(t) \in T$ pa G_0 djeluje na T. Očito je to djelovanje vjerno jer jedina rotacija koja nešto fiksira je identiteta.

Neka je $\{t_1, t_2\}$ $\mathbb{Z}$-baza za T. Tada je djelovanje elementa $g \in G_0$ određeno djelovanjem na toj bazi. Ali grupa T je diskretna pa krug oko ishodišta koji sadrži t_1 i t_2 sadrži <u>konačno</u> mnogo elemenata od T

$\Rightarrow$ grupa G_0 je konačna zbog <u>vjernog</u> djelovanja. ∎

Teorem: Neka je G_0 grupa točaka grupe tapeta G. Tada je G_0 izomorfna jednoj od sljedećih 10 grupa $C_1, C_2, C_3, C_4, C_6, D_1, D_2, D_3, D_4, D_6$.

da, $C_2 \cong D_1$, tu je 9 različitih grupa...

Dokaz. Znamo da je G_0 kao konačna podgrupa od $O_2(\mathbb{R})$ izomorfna C_n ili D_n za neki $n \in \mathbb{N}$. Ideja dokaza:

d.z.

a) $N := G_0 \cap SO_2(\mathbb{R})$ je ciklička generirana s r

b) r djeluje na $\mathbb{R}^2$ u standardnoj bazi preko matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, a u bazi

$\{t_1, t_2\}$ rešetke T (jasno $T \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$)

prelaze u matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

Te dvije matrice su konjugirane pa su im tragovi jednaki $\Rightarrow 2\cos\theta = a + d \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \pm\theta \in \{0, \pi/3, \pi/2, 2\pi/3, \pi\}$

$\Rightarrow$ red od $N = \langle r \rangle$ je $1, 2, 3, 4$ ili 6.

$\Rightarrow G_0 = N$ ili $N \rtimes \mathbb{Z}_2$

Promotrimo izomorfne grupe tapeta G i G'.

Tada su njihove

a) grupe translacija izomorfne ($\cong \mathbb{Z}^2$)

b) grupe točaka izomorfne

preciznije, ako je $\varphi : G \to G'$ izomorfizam onda je $T' = \varphi(T)$.

No, neizomorfne G i G' mogu imati izomorfne G_0 i G_0', zato trebamo biti precizniji...

Nakon što odaberemo baze za T i T', grupe G_0 i G_0' možemo identificirati s podgrupama od $GL_2(\mathbb{Z})$ (jer ti djelovanji na rešetkama vjerno).

Ako su G i G' izomorfne onda postoji matrica $U \in GL_2(\mathbb{Z})$ t.d. $G_0' = U G_0 U^{-1}$, tj. G_0' i G_0 su konjugirane unutar $GL_2(\mathbb{Z})$ jer su (vjerne) reprezentacije ekvivalent.

Vrijedi i obrat, dvije grupe tapeta su izomorfne ako i samo ako su im grupe točaka konjugirane u $GL_2(\mathbb{Z})$.

Sada možemo vidjeti zašto smo "razlikovali" C_2 od D_1 u klasifikaciji grupa točaka.

Neka su G i G' grupe tapeta s pripadnim grupama točaka G_0 i G_0'. Neka je $G_0 \simeq G_0' \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ ali, $G_0 \cap SO_2(\mathbb{R}) = \{Id\}$ dok je $G_0' \cap SO_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

U slučaju grupe G_0 matrični prikaz netrivijalnog elementa je $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

dok je kod grupe G_0' to matrica $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\in SO_2(\mathbb{R})$

Podgrupe generirane ovim matricama su izomorfne, ali nisu konjugirane (trag matrica je drugačiji) pa zaključujemo

da grupe G i G' nisu izomorfne.

Grupe kohomologija:

$0 \to T \to G \to G_0 \to 0$

T, $G/_T \simeq G_0$ i $T \circlearrowleft G_0$ kao i ranije

Kako pomoću ovog gore "sagraditi" grupu G?

Odgovor nam daje $H^2(G_0, T)$.

Općenito, neka su G_0 i T fiksne grupe (T je abelova) proširenje grupe T s G_0 je egzaktni niz $1 \to T \to G \xrightarrow{\pi} G_0 \to 1$.

T je normalna podgrupa (abelova)

Opisat ćemo taj egzaktni niz preko

a) nekog djelovanja od G_0 na T

b) 2-kociklusa $G_0 \to T$

opis djelovanja: Za $g \in G_0$ neka je $x_g \in G$ t.d. $\pi(x_g) = g$. Kako je $T \trianglelefteq G$ x_g definira unutarnji automorfizam $y \mapsto x_g y x_g^{-1}$ od T.

Definiramo djelovanje od g na T

$$g(t) = x_g t x_g^{-1} \quad \forall t \in T.$$

Provjerimo da je to djelovanje dobro definirano.

Ako je $\pi(y_g) = g$ onda je $y_g^{-1} x_g \in \ker \pi = T$

no budući da je T abelova grupa

$$y_g^{-1} x_g t (y_g^{-1} x_g)^{-1} = t \Rightarrow y_g t y_g^{-1} = x_g t x_g^{-1}.$$

$\Rightarrow T$ je G_0 - modul

Primjer: Neka je T G_0 - modul opisan

s homomorfizmom grupa $\varphi : G_0 \to \mathrm{Aut}(T)$

Možemo def. semidirektni produkt $T \times_\varphi G_0$

kao grupa čiji je pripadni skup $T \times G_0$

s operacijom $(s,g)(t,h) = (s\, g(t), gh)$.

Lako se provjeri

$$\underset{\substack{\in \\ G_0}}{(1,g)}\ \underset{\substack{\in \\ T}}{(t,1)}\ (1,g)^{-1} = (g(t), 1)$$

pa vidimo da je konjugiranje s g jednako

danom djelovanju φ! ↖ univerzalno svojstvo semidirektnog produkta

Također imamo

$$1 \to T \to T \times_\alpha G_0 \xrightarrow{\pi} G_0 \to 1$$

$t \mapsto (t,1)$ $\qquad$ $(t,g) \mapsto g$

Neka nam je sada dano proširenje grupa

$$1 \to T \to G \xrightarrow{\pi} G_0 \to 1 \quad \text{koje}$$

opisano ranije

induciraju dano (prethodno fiksirano) djelovanje od G_0 na T.

Radi jednostavnosti odaberemo $x_1 = 1$.

Funkcija $g \mapsto x_g$ nije nužno homomorf. $G_0 \to G$

Def. $c(g,h) = x_g x_h x_{gh}^{-1} \in T < G$

fja c "mjeri" odstupanje preslikavanja $g \mapsto x_g$ od homomorfizma – $g \mapsto x_g$ je homom. $\Leftrightarrow$ $c \equiv 1$

Neka su g, h i $k \in G_0$. Tada

$(x_g x_h) x_k = x_g (x_h x_k)$ zbog $x_g x_h = c(g,h) x_{gh}$

implicira

$c(g,h) c(gh,k) x_{ghk}$

$x_g c(h,k) x_g^{-1} x_g x_{hk}$

$g(c(h,k)) c(g,hk) x_{ghk}$

malo zbunjujuće jer
T pišem multiplikativno

$\Longrightarrow c(g,h)c(gh,k) = g(c(h,k))\, c(g,hk)$

za sve $g,h,k \in G_0$.

kasnije ćemo ovo ljepše definirati

ovo je definicija 2-kociklusa

$x_1 = 1 \Rightarrow c(1,g) = c(g,1) = 1 \quad \forall g \in G_0$

normalizirani 2-kociklus

$Z^2(G_0, T)$ = abelova grupa 2-kociklusa
$G_0 \times G_0 \longrightarrow T$.

Što ako odaberem neko drugo $g \mapsto y_g$?
(s $\pi(y_g) = g$)

Tada $c'(g,h) = y_g y_h y_{gh}^{-1}$.

Kako $\pi(y_g) = \pi(x_g)$ postoji $t_g \in T$

t.d. $y_g = t_g x_g$

$$\Rightarrow c'(g,h) = (t_g x_g)(t_h x_h)(t_{gh} x_{gh})^{-1}$$

$$= \dots = \left(t_g\, g(t_h)\, t_{gh}^{-1}\right) c(g,h)$$

Funkcija $b(g,h) = t_g\, g(t_h)\, t_{gh}^{-1}$ je

isto 2-kociklus

definicija 2-koruba

oznaka: $B^2(G_0, T)$

zašto je 2-korub kociklus?

Def: $H^2(G_0, T) = Z^2(G_0,T) / B^2(G_0,T)$

druga kohomologija od G_0 s koef. u T.

Zaključak: klasa 2-kociklusa c u $H^2(G_0, T)$ ne ovisi o odabiru $g \mapsto x_g$ pa djelovanju od G_0 na T koji je induciran s

$$1 \to T \to G \to G_0 \to 1 \quad (*)$$

možemo pridružiti klasu u $H^2(G_0, T)$

tj. proširenju $(*)$ je pridružena klasa u $H^2(G, T)$.