Kako izračunati $H^2(G,M)$?

Spektralni nizovi:

<u>Def:</u> Kohomološki spektralni niz

se sastoji od niza abelovih grupa

$$\{E_r^{p,q} : p,q,r \in \mathbb{Z}, \ r \geq 2\} \quad i$$

homomorfizama

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$$

za koji vrijedi $d_r^{p,q} \circ d_r^{p-r,q+r-1} = 0$

za sve p,q,r

izomorfizama: $E_{r+1}^{p,q} \simeq \ker(d_r^{p,q}) / \operatorname{im}(d_r^{p-r,q+r-1})$;

filtriranih Abelovih grupa

$$\{E^n : n \in \mathbb{Z}\} \ ; \ E_r = \bigoplus_{p,q\in\mathbb{Z}^2} E_r^{p,q}$$

gdje filtracija

$F^p(E^n) \supseteq F^{p+1}(E^n) \supseteq \ldots$ zadovoljavaju

$F^p(E^n) = E^n$ za $p << 0$ i

$F^p(E^n) = 0$ za $p >> 0$;

graničnih članova

$$\{ E_\infty^{p,q} : p,q \in \mathbb{Z} \} \quad i$$

izomorfizama

$$E_\infty^{p,q} \cong F^p(E^{p+q}) \big/ F^{p+1}(E^{p+q})$$

Kohomologija cikličkih grupa

Neka je $C \overset{\langle c \rangle}{=}$ ciklička grupa reda n, M C-modul.

Teorem: $H^0(C,M) \cong M^C$

$$H^{2n}(C,M) \cong M^C / N_C(M) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$H^{2n-1}(C,M) \cong \ker(N_C) / \operatorname{im}(1-c)$$

gdje je $N_C(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c^i x$; $N_C : M \to M^C$

<u>Dokaz:</u> Promotrimo (slobodnu) rezoluciju

$$\xrightarrow{N_C} \mathbb{Z}C \xrightarrow{c-1} \mathbb{Z}C \xrightarrow{N} \mathbb{Z}C \xrightarrow{c-1} \mathbb{Z}C \to \mathbb{Z} \to 0$$

zašto?

(provjerimo: za $g \in C$

1) $(c-1) \sum_{i=0}^{n-1} c^i g = 0$

2) $\sum_{i=0}^{n-1} c^i (c-1) g = 0$

the augmentation map:

$$\sum_{g \in C} a_g c \mapsto \sum a_g$$

$I :=$ jezgra

3) $(c-1)g \in I$

4) $I = \mathrm{im}\,(c-1)$

predp. $\sum_{i=0}^{m-1} a_i c^i \in I$. Tada $\sum a_i = 0$

$$\Rightarrow \sum a_i c^i = \sum a_i (c^i - 1) = (c-1)(\dots) \checkmark$$

C-modul

Tada je $H_*(C, M)$ homologija lanca

$$\dots \xrightarrow{N} M \xrightarrow{c-1} M \xrightarrow{N} M \xrightarrow{c-1} M$$

odnosno $H^*(C, M)$ je kohomologija od

zašto to slijedi iz preth.?

$$M \xrightarrow{c-1} M \xrightarrow{N_c} M \xrightarrow{c-1} M \to \dots$$

$$\Downarrow$$

$$H^0(C, M) = \ker(c-1) = M^c$$

$$H^1(C, M) \cong \ker N_c / \mathrm{im}(c-1)$$

$$H^2(C, M) = \ker(c-1) / \mathrm{im}\, N_c \cong M^c / N_c(M)$$

zašto? kako ovo povezati s definicijom izvedenog funktora?

Uočimo da je $M^C = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[C]}(\mathbb{Z}, M)$

tako da ako je $P \to \mathbb{Z} \to 0$ (kao (*))

neka projektivna rezolucija od $\mathbb{Z}$ sa

C - modulima (na $\mathbb{Z}$ gledamo kao na trivijalan C-modul), onda je

$H^i(C, M)$ i-ta kohomološka grupa

kompleksa $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[C]}(P, M)$

(funktor $\mathrm{Hom}(-, M)$ je kontravarijantan, tj. "obrće" strelice).

$0 \to M^C \to \ldots\ldots$

što je s funktorijalnošću?

Lyndon–Hochschild–Serre spektralni niz

$$E_2^{p,q} = H^p(G/N, H^q(N,A)) \Rightarrow H^{p+q}(G,A)$$

$\big(N \trianglelefteq G \Rightarrow G/N$ djeluje na $H^q(N,A)\big)$ (zašto?)

tj. $$E_\infty^{i,k-i} \simeq \frac{F^i H^k(G,A)}{F^{i+1} H^k(G,A)}$$

padajuća filtracija:

$$0 = F^{k+1}H^k \subset F^k H^k \subseteq \dots \subset F^0 H^k = H^k$$

Primjer: grupa točaka $G_0 = D_4 = \langle r, f \rangle$

grupa reda 8

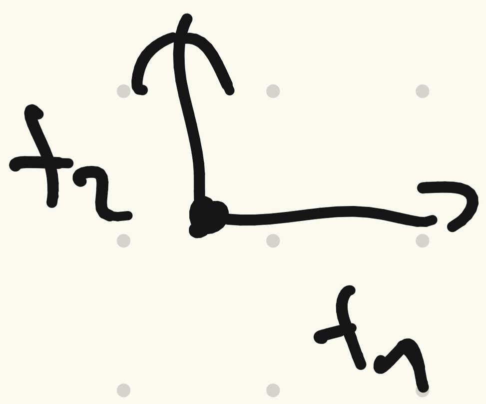
sadrži refleksiju f i rotaciju r za $\pi/2$

Kako djeluje na T?

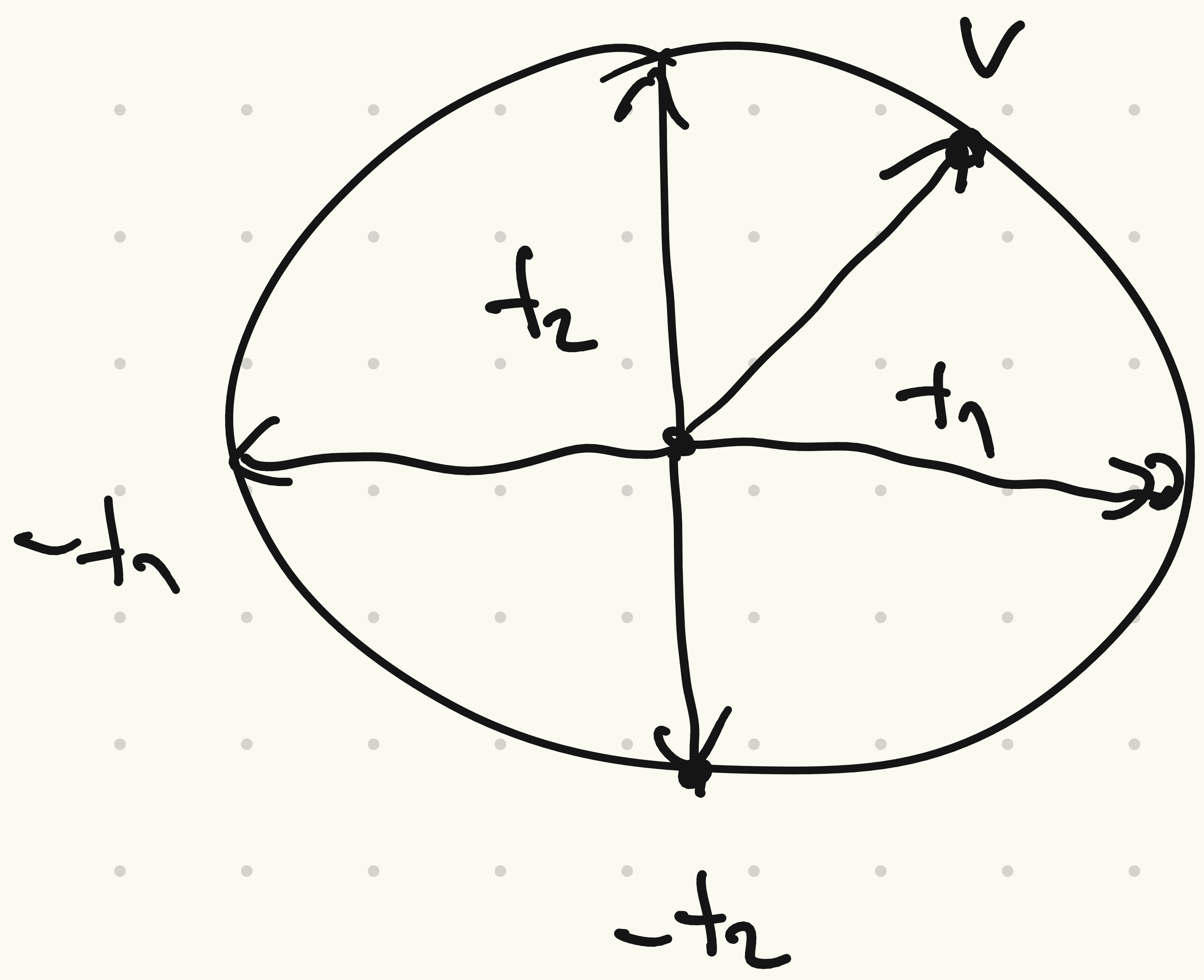
Kako izgleda T?

Neka je t_1 vektor minimalne duljine.

Neka je $t_2 = r(t_1)$.



Pokažimo da su $\pm t_1$ i $\pm t_2$ jedini minimalni vektori u T.



Kada bi postojao još neki vektor v na toj kružnici onda bi udaljenost od v do nekog od $\pm t_1, \pm t_2$ bila manja od radijusa kružnice pa odgovarajuća razlika (na slici $v - t_2$) bi bio vektor duljine manji od $\|t_1\|$.

$\Rightarrow$ T je kvadratna rešetka (jer je $\{t_1, t_2\}$ baza)

zašto?

svejedno koju odaberemo

Ako odaberemo refleksiju oko t_1 onda

za f

od r i f u $\{t_1, t_2\}$ je dano matricama.

$$D_4 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Spektralni niz u ovom slučaju je

$$H^p(D_4/C_4, H^q(C_4, T)) \Rightarrow H^{p+q}(D_4, T)$$

(ovdje $C_4 = \langle r \rangle$ i $D_4 = \langle r, f \rangle$ kao ranije)

opis djelovanja na T

$$1^\circ)\ H^{2n}(C_4, T) = T^{C_4} / N_{C_4}(T)$$

gdje je $N(t) := N_C(t) = \underbrace{t + r(t) + r^2(t) + r^3(t)}_{(=0)}$

ali $T^{C_4} = 0$ (rotacija nema fiks. točk.)

$$\Rightarrow H^{2n}(C_4, T) = 0$$

$$2^\circ)\ H^{2n+1}(C_4, T) = \ker N / \mathrm{Im}(1-r)$$

$$= T / \mathrm{Im}(1-r)$$

$$(1-r)(a,b) = (a,b) - (b,-a) = (a-b, a+b)$$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(1-r) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \cong T \ ; \ x \equiv y \ (2)\}.$$

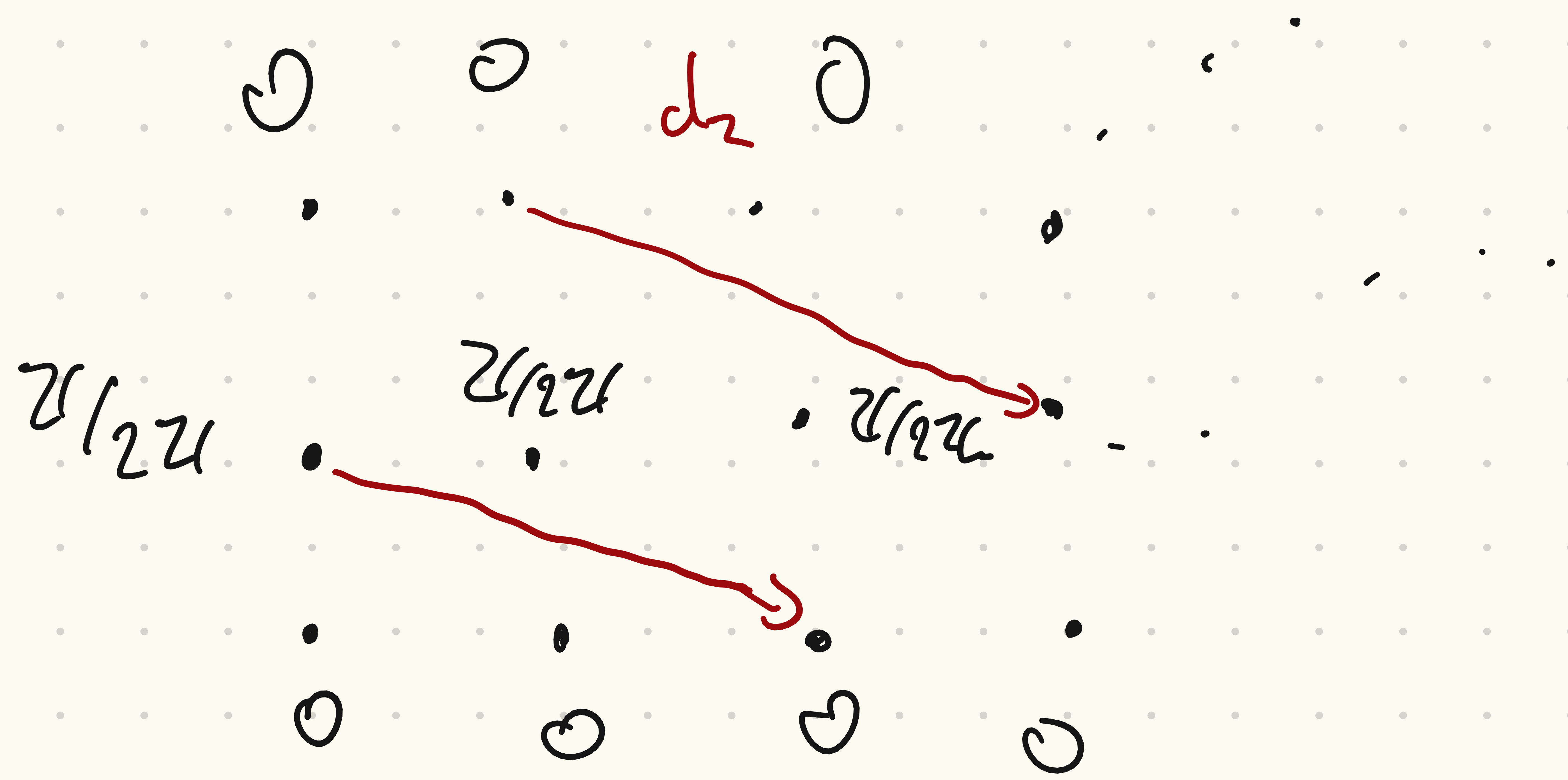
$\Rightarrow H^{2n+1}(C_4, T) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

najviše dva element.

$\Rightarrow$ djelovanje na $H^q(C_4, T)$ je trivijalno
od $D_4/C_4 \Rightarrow$ norma je trivijalna

Dakle, $E_2^{p,q} = \begin{cases} 0 & \text{ako je } q \equiv 0\,(2) \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{ako je } q \equiv 1\,(2) \end{cases}$ zašto?

E_2 strana:



$d_2 : E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$

Što možemo zaključiti iz ovoga?

1°) $E_2^{2,0} = E_2^{0,2} = 0 \Rightarrow E_\infty^{0,2} = E_\infty^{2,0} = 0$

2°) $E_\infty^{1,1} = E_3^{1,1} = E_2^{1,1} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zašto?

Što je s $H^2(G_0, T) =: H^2$?

E^∞ stranica.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \\ & & 0 \end{array}$$

i) $E_\infty^{1,1} \simeq \dfrac{F^1 H^2}{F^2 H^2} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{array}{l} 0 \subset F^2 H^2 \subset F^1 H^2 \subset F^0 H^2 = H^2 \\ \parallel \\ F^3 H^2 \end{array}$$

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

ii) $E_\infty^{2,0} \simeq F^2H^2 / F^3 H^2 \simeq 0$

iii) $E_\infty^{0,2} \simeq F^0 H^2 / F^1 H^2 \simeq 0$

$\Rightarrow H^2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$