# Kohomologija grupa

kasnije ćemo pokazati konceptualniji definiciju

Krenimo s eksplicitnom definicijom:

Neka je $G$ grupa, $M$ $G$-modul i $n \geq 0$.

Neka je $C^n(G,M)$ grupa svih funkcija $G^n \longrightarrow M$

grupa $n$-kolanaca

Definiramo:

$$d^{n+1} : C^n(G,M) \longrightarrow C^{n+1}(G,M)$$

$$(d^{n+1}\varphi)(g_1, \dots, g_{n+1}) = g_1 \varphi(g_2, \dots, g_{n+1})$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \varphi(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_{n+1})$$
$$+ (-1)^{n+1} \varphi(g_1, \dots, g_n)$$

$\boxed{\text{Vrijedi: } d^{n+1} \circ d^n = 0}$

definirali kompleks kolanaca

Definiramo $H^n(G,M) = Z^n(G,M) \big/ B^n(G,M)$

gdje je $Z^n(G,M) = \ker(d^{n+1})$ i

$$B^n(G,M) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \operatorname{im}(d^n) & n \geq 1 \end{cases}$$

kociklusi

korubovi

**Primjer:** $H^2(G,M)$

$Z^2(G,M) = \ker(d^3) = \{\varphi : G^2 \to M :$

$g_1\varphi(g_2,g_3) - \varphi(g_1g_2,g_3) + \varphi(g_1,g_2g_3) - \varphi(g_1,g_2) = 0\}$

$B^2(G,M) = \operatorname{im}(d^2) = \{\varphi : G^2 \to M :$

$\varphi(g_1,g_2) = g_1\Theta(g_2) - \Theta(g_1g_2) + \Theta(g_1)$ za neki $\Theta \in C^1(G,M)\}$

Kako "bolje" definirati kohomologiju?

Preko izvedenih funktora (derived functor)

Za definirajuće svojstvo kohomologije (grupa) uzet ćemo činjenica da kohomologija "preslikava" kratki egzaktni niz G-modula $0 \to A \to B \to C \to 0$ u dugi egzaktni niz

$$0 \to H^0(G,A) \to H^0(G,B) \to H^0(G,C) \to H^1(G,A) \to \dots$$

Ovdje je $H^0(G,A) = A^G$ pa je kohomologija grupa odgovor na problem:

za dani lijevo egzaktni functor $\mathcal{F}: A \to A^G$ $(0 \to A \to B \to C \to 0 \rightsquigarrow 0 \to A^G \to B^G \to C^G)$ kako konstruirati funktore $R^i F$ koji nastavljaju niz, tj.

$$0 \to \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(C) \to R^1\mathcal{F}(A) \to R^1\mathcal{F}(B) \to R^1\mathcal{F}(C) \to R^2\mathcal{F}(A) \to \dots$$

?

Funktori $R^i\mathcal{F}$ se zovu desni izvedeni funktori od $\mathcal{F}$.
(right derived functors).

R - mod

↓

## Izvedeni funktori

Neka je $R$ prsten. Radit ćemo u kategoriji (lijevih) $R$-modula ($G$-moduli su zapravo $\mathbb{Z}[G]$-moduli gdje je $\mathbb{Z}[G]$ prsten čiji su elementi oblika $\sum_{g\in G} \alpha_g g$ ; $\alpha_g \in \mathbb{Z}$ gdje je $\alpha_g = 0$ za sve osim konačno mnogo $g$-a. Množenje i zbrajanje se prirodno definira.)

**Definicija:** Neka su $R$ i $S$ prsteni i $\mathcal{F}: R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ lijevo egzaktni kovarijantan funktor. Za svaki $j \geq 0$ definiramo funktor $R^j\mathcal{F}: R\text{-mod} \to S\text{-mod}$ na sljedeći način:

Za svaki $R$-modul $M$ fiksiramo injektivnu rezoluciju $M \xrightarrow{\varepsilon^M} E_M^\bullet$ i za svaki hom. $R$-modula $f: M \to N$ fiksiramo preslikavanje lanaca $\tilde{f}: E_M^\bullet \to E_N^\bullet$

koji podiže $f$.

- za R-modul $M$ definiramo

$$\mathbb{R}^j F(M) := H^j(F(E_M^\bullet))$$

- za morfizam $f: M \to N$ definiramo

$$\mathbb{R}^j F(f) := H^j(F(\tilde{f}))$$

$\mathbb{R}^j F$ zovemo $j$-ti desni izvedeni funktor.

---

Što sve ovo znači? Idemo redom:

što je to injektivna rezolucija $M \xrightarrow{\varepsilon_M} E_M^\bullet$?

**Def.** Za lijevi R-modul $M$ injektivna rezolucija od $M$ je kompleks (chain complex) oblika

$$\dots \to 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \dots$$

gdje su $E^i$ injektivni moduli zajedno s $M \xrightarrow{i} E^0$ takvim da je kompleks

$$0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \to \dots \quad \text{egzaktan.}$$

Što je kompleks (lanaca)? (chain complex)

$$\cdots \to M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0 \xrightarrow{d_0} M_{-1} \to \cdots$$

∞ mnogo elemenata može biti 0

t.d. $d_{i-1} \circ d_i = 0 \quad \forall i \quad$ ("$d^2 = 0$")

primer: $(M_\bullet, d)$, $(M_\bullet, d_\bullet)$ ili $M_\bullet$

definicija kategorije

ili ekvivalentno, ako definiramo

$$N^i := M_{-i} \quad i \quad d^i = d_{-i}$$

kompleks možemo zapisati kao $(N^\bullet, d^\bullet)$ ili $N^\bullet$

$$\cdots \to N^{-2} \xrightarrow{d^{-2}} N^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} N^0 \xrightarrow{d^0} N^1 \to \cdots$$

Što su morfizmi u ovoj kategoriji?

R-comp je ime kategorije

**Def.** (a chain map) preslikavanje lanaca s kompleksa $(M_\bullet, d^M)$ u $(N_\bullet, d^N)$ je familija hom. lijevih R-modula $f_i : M_i \to N_i$

t.d. $d_i^N \circ f_i = f_{i-1} \circ d_i^M \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \to & M_{i+1} & \to & M_i & \to & M_{i-1} & \to & \cdots \\
 & & \downarrow f_{i+1} & = & \downarrow f_i & = & \downarrow f_{i-1} & & \\
\cdots & \to & N_{i+1} & \to & N_i & \to & N_{i-1} & \to & \cdots
\end{array}$$

Napomena: Kategorija R-Comp ima sljedeća očita, ali važna svojstva

- za svaka dva $f, g : (M_\bullet, d^M) \to (N_\bullet, d^N)$ $(f+g)_i = f_i + g_i$ je preslikavanje lanaca, tj.

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-}comp}\left((M_\bullet, d^M), (N_\bullet, d^N)\right)$$

je abelova grupa

- za svaka dva elementa u R-Comp postoji njihov produkt i koprodukt

kako se def. u općoj teoriji kategorija?

- postoji jezgra i kojezgra preslikavanja lanaca

kažemo da je R-Comp abelova kategorija

def: (homologija)

$$H_i(M_\bullet) = H_i(M_\bullet, d) = \frac{\overset{i\text{-ciklusi}}{\ker(d_i : M_i \to M_{i-1})}}{\underset{i\text{-rubovi}}{\operatorname{im}(d_{i+1} : M_{i+1} \to M_i)}}$$

Def: (preslikavanje inducirano na homologiji)

Za svako preslikavanje lanaca $f : (M_\bullet, d) \to (N_\bullet, d)$

za svaki $i \in \mathbb{Z}$ imamo preslikavanje

$H_i(f) : H_i(M_\bullet) \to H_i(N_\bullet)$ inducirano s $f$

definirano: za $z \in \ker d_i$, $H_i(f)(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

gdje je $\bar{z}$ je slika od $z$ u $\ker d_i / \operatorname{im} d_{i+1}$.

provjerit da je preslikavanje dobro definirano

· Kažemo da je $f$ kvazi-izomorf. ako je $H_i(f)$ izom. za svaki $i \in \mathbb{Z}$.

· Snake lema (ponoviti)

Primjenom Snake leme dobivamo

**Teorem** (dugački egzaktni niz u homologiji)

Ako je $0 \to M'_\bullet \xrightarrow{j} M_\bullet \xrightarrow{p} M''_\bullet \to 0$

kratki egzaktni niz lančanih R-modula, tada

postoji dugi egzaktni niz lančanih R-modula

$$\cdots \to H_i(M'_\bullet) \xrightarrow{H_i(j)} H_i(M_\bullet) \xrightarrow{H_i(p)} H_i(M''_\bullet) \xrightarrow{\partial_i} H_{i-1}(M'_\bullet) \xrightarrow{H_{i-1}(j)} H_{i-1}(M_\bullet) \to H_{i-1}(M''_\bullet) \to \cdots$$

to je ono što nam treba!

# Projektivna i injektivna rezolucija

**Def.** Neka je $M$ $R$-modul. Slobodna rezolucija od $M$ je kompleks lanaca $F_\bullet$ slobodnih $R$-modula
$$\cdots F_3 \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to 0$$

nije nužno egzaktan

za jedno s preslikavanjem $\pi : F_0 \to M$ takvim da je kompleks
$$\cdots F_3 \xrightarrow{d_3} \cdots \to F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$$
egzaktan.

$\operatorname{im} d_i = \ker d_{i-1}$ i $\ker \pi = \operatorname{im} d_1$

$$\Downarrow$$

$$H_0(F_\bullet) = M \quad \text{i}$$
$$H_i(F_\bullet) = 0 \quad \text{za } i > 0$$

ovo je definicija homološke rezolucije modula $M$, tj. je lanac $F_\bullet$ t.d. vrijedi

**Lema:** Svaki $R$-modul dopušta slobodnu rezoluciju.

aproksimacija modula slobodnim modulima

Napomena: ako slobodne module zamijenimo projektivnima dobivamo projektivnu rezoluciju

Def: Injektivna rezolucija $R$-modula $M$ je kompleks $\dots \to 0 \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \dots$ injektivnih modula zajedno s preslikavanjem $M \xrightarrow{i} E_0$ t.d. je niz

$$0 \to M \xrightarrow{i} E^0 \xrightarrow{d^0} E_1 \xrightarrow{d^1} E_2 \to \dots$$

egzaktan.

**Lema:** Svaki $R$-modul dopušta injektivnu rezoluciju.

Zašto nam je bitna injektivnost i projektivnost modula u rezoluciji? (svaki slobodan modul je projektivan)

Prvo definicija.

(projective)

**Def.** $R$-modul $P$ je projektivan ako za svaki surjektivni homomorfizam modula $N \xrightarrow{p} N'' \to 0$ i homomorfizam $f: P \to N''$ postoji homomorfizam $g$, $p \circ g = h$, tj.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists g"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dl, phantom, shift right=3ex, "="] & \\ N \arrow[r, "p"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Slično, R-modul $E$ je injektivan ako za svaki $i$ (desno)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & N \arrow[dl, "\exists g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

$i$ $f$ postoji $g$ t.d. dijagram komut.

Važan nam je koncept podizanja preslikavanja

**Def.** Neka su $M$ i $N$ R-moduli i $P_\bullet$ i $Q_\bullet$ dva kompleksa t.d. $P_i = Q_i = 0$ za $i<0$. Pretp. da su dana preslikavanja $P_0 \xrightarrow{p} M$ i $Q_0 \xrightarrow{q} N$. Kažemo da preslikavanje lanaca $\tilde{f} : P_\bullet \to Q_\bullet$ podiže preslikavanje R-modula $f : M \to N$ ako dijagram kompleksa

$$\begin{tikzcd} P_\bullet \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & Q_\bullet \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

komutira.

Ekviv. ako dijagram

pretp. da su preslikavanja surjektivna

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & P_2 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_2"] & P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{f}_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \arrow[r] & \dots \\
\arrow[r] & Q_2 \arrow[r] & Q_1 \arrow[r] & Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

komutira.

$$\begin{tikzcd}
 & P_0 \arrow[d] \arrow[dl, dashed, "\exists f_0"'] & \\
 & M \arrow[d] & \\
Q_0 \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Projektivnost (injektivnost) modula nam osigurava "podizanje" preslikavanja.

**Teorem:** Neka su $M$ i $N$ $R$-moduli, $f: M \to N$ hom. Promotrimo dva kompleksa

$$P_\bullet = \dots \to P_2 \to P_1 \to P_0 \to 0 \to 0 \dots$$

$$Q_\bullet = \dots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_0 \to 0 \to 0 \dots$$

zajedno s preslikavanjima $P_0 \xrightarrow{p} M$ i $Q_0 \xrightarrow{q} N$.

Pretp. da su $P_i$ projektivni za sve $i$ i da je kompleks $\dots \to Q_2 \to Q_1 \to Q_2 \to M \to 0 \dots$ egzaktan.

Tada postoji lift $\tilde{f}: P_\bullet \to Q_\bullet$ od $f$.

Nadalje, $\tilde{f}$ je jedinstven do na homotopiju.

?

homotopiji

**def:** $M_\bullet, N_\bullet$, $f, g : M_\bullet \to N_\bullet$

Kažemo da su $f$ i $g$ homotopni (pišemo $f \simeq_{htpc} g$) ako postoji familija hom. R-mod. $h_i : M_i \to N_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, t.d.

$$d^N_{i+1} \circ h_i + h_{i-1} \circ d^M_i = f_i - g_i \quad \forall i$$

(pišemo $dh + hd = f - g$).

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M_{i+1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & M_i \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & M_{i-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & \cdots \\
\arrow[r] & N_{i+1} \arrow[r] & N_i \arrow[r] & M_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Homotopna preslikavanja su važna jer

homotopna preslikavanja induciraju ista preslik. na homologiji

**Prop.** Ako su $f$ i $g$ preslikavanja lanaca s $(M_\bullet, d^M)$ u $(N_\bullet, d^N)$ homotopna onda $H_i(f) = H_i(g)$ $\forall i$, tj. $f$ i $g$.

$(H_i(f), H_i(g) : H_i(M_\bullet) \to H_i(N_\bullet))$.

Slično vrijedi i u dualnoj situaciji.

**Teorem:** Neka su $M$ i $N$ $R$-moduli, $f: M \to N$ i $i: M \xrightarrow{\sim} E^\cdot$ i $j: N \xrightarrow{\sim} F^\cdot$ injektivne rezolucije. Tada postoji $\hat{f}: E^\cdot \to F^\cdot$ lift od $f$ koji je jedinstven do na homotopiju.

**Korolar:** Svake dvije injektivne rezolucije istog modula su homotopno ekvivalentne.

$$0 \to M \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \to \cdots$$

je egzaktan

hom. $R$-modula inducira preslikavanje na kohomologiji (injektivnih rezolucija)

# Natrag na izvedene funktore...

Neka je $f: M \to N$ presl. $R$-modula i neka su

$$(*)\quad \begin{array}{l} 0 \to M \to E_M^0 \to E_M^1 \to \dots \\ 0 \to N \to E_N^0 \to E_N^1 \to \dots \end{array}$$

egzaktni nizovi

injektivne rezolucije.

Znamo: a) $H^0(E_M^\bullet) = M$

$H^i(E_M^\bullet) = 0$ za $i > 0$

(isto i za $N$)

b) $f: M \to N$ se podiže na preslikavanje lanaca $\tilde{f}: E_M^\bullet \to E_N^\bullet$ jedinstveno do na homotopiju $\Rightarrow$ preslikavanje inducirano na cohomologiji, $H^i(f)$, je jedinstveno

tu smo koristili egzaktnost od $(*)$

Sad želimo primijeniti lijevo egzaktan kovarij. funktor $\mathcal{F}$ ... zbog funktorijalnosti imam

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & \mathcal{F}(M) & \to & \mathcal{F}(E_M^0) & \to & \mathcal{F}(E_M^1) & \to & \dots \\ & \downarrow \mathcal{F}(f) & & \downarrow \mathcal{F}(\tilde{f}_0) & & \downarrow \mathcal{F}(\tilde{f}_1) & & \downarrow \dots \\ 0 \to & \mathcal{F}(N) & \to & \mathcal{F}(E_N^0) & \to & \mathcal{F}(E_N^1) & \to & \dots \end{array}$$

(koji više nije egzaktan) pa definiram.

- $R^j\mathcal{F}(M) := H^j(\mathcal{F}(E_M^\bullet))$
- $R^j\mathcal{F}(f) := H^j(\mathcal{F}(\tilde{f}))$

Je li ovo dobro definirano, odnosno ovisi li o izboru injektivnih rezolucija i izboru preslikavanja $\tilde{f}$?

Niji, ali kao da ji jer su funktori $R^j$ koji dobijemo prirodno izomorfni.

izomorfizmi između pripadnih kohomologiji su usklađeni s morfizmima

kako se definira prirodni izomorfizam funktora?

definirajte sami ... Primjer: $V \to V^{**}$

d.z.