Teorija snopova (sheaf theory)

Snopovi nam omogućavaju da definiramo "funkcije" na otvorenim podskupovima (afine) sheme.

(structure sheaf)
definicija strukturalnog snopa ili snopa regularnih fja. je sastavni dio definicije sheme

Neka je X top. prostor. Predsnop (presheaf) $\mathcal{F}$ na X pridružuje svakom otvorenom skupu $U \subset X$ skup $\mathcal{F}(U)$ i svakom paru otvorenih skupova $U \subset V \subset X$ preslikavanje

$$\mathrm{res}_{V,U} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$$

res ima slična svojstva kao restrikcija fja.

koji zovemo restrikcija. t.d. vrijedi

- $\mathrm{res}_{U,U} = $ identiteta

$U \subset V \subset W \subset X$

- $\mathrm{res}_{V,U} \circ \mathrm{res}_{W,V} = \mathrm{res}_{W,U}$ za sve otvorene.

Elementi od $\mathcal{F}(U)$ se zovu prerezi (sekcije) (sections) od $\mathcal{F}$ nad U.

Elementi od $\mathcal{F}(X)$ su globalni prerezi

U jeziku teorije kategorija predsnopovi su kontravarijantni funktori iz kategorije otvorenih podskupova od X u kategoriju skupova.

kako se definiraju morfizmi u ovim kategorijama?

Ako kategoriju skupova zamijenimo s npr. kategorijom abelovih grupa dobivamo predsnopove abelovih grupa i slično za druge kategorije.

Predsnop zovemo snop ako zadovoljava aksiom snopa:

- Za svaki otvoreni pokrivač $U = \bigcup_{a \in A} U_a$ otvorenog skupa $U \subset X$ i za svaku familiju elemenata $f_a \in \mathcal{F}(U_a)$ $\forall a \in A$ sa svojstvom da su restrikcije elemenata f_a i f_b na $U_a \cap U_b$ jednake $\forall a, b \in A$, postoji jedinstveni $f \in \mathcal{F}(U)$ čija restrikcija na svaki U_α je jednaka f_α.

osnovni

Primjer: Neka su X i K topološki prostori. Za $U \subset X$ otvoren definiramo

$\mathcal{F}(U) =$ skup neprekidnih funkcija s $U \to K$

$\mathcal{F}$ je snop neprekidnih fja.

Primjer*: Neka je $\pi : E \to X$ preslikavanje topoloških prostora. Možemo definirati snop (sekcija) prereza od π:

za svaki $U \subset X$ otvoren

$$\mathcal{F}(U) = \{\underbrace{\sigma : U \to \pi^{-1}U}_{\text{neprekidni}} : \pi \circ \sigma = id\}$$

više o ovom primjeru kasnije

Vlat

Stabiljka snopa

(stalk of sheaf)

Neka je $\mathcal{F}$ predsnop i $x \in X$.

Definiramo stabiljku $\mathcal{F}_x$ od $\mathcal{F}$
(ili vlakno)

kao direktan limes skupova $\mathcal{F}(U)$ gdje U

ide po svim otvorenim skupovima koji sadrže x

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim \mathcal{F}(U)$$

klase ekvivalencije "funkcija" na okolinama od x

gdje su dvije funkcije $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ i $\tau \in \mathcal{F}(V)$ $(x \in U \cap V)$

ekvivalentne ako postoji otvorena okolina

$x \in W \subset U \cap V$ t.d.

$$\mathrm{res}_{U,W}\, \sigma = \mathrm{res}_{V,W}\, \tau .$$

osnovni

Primjer: Neka je X analitička mnogostrukost i $\mathcal{O}_X^{an}$ snop analitičkih funkcija na X.

Tada je stabiljka od $\mathcal{O}_x^{an}$ u $x \in X$ prsten konvergentnih redova potencija (Taylorovi redovi funkcija definiranih u x)

Morfizmi snopova:

Morfizam snopova $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je familija preslikavanja $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$

morfizam odgovarajuće kategorije ovisno o tipu snopa

koja se dobro ponaša u odnosu na restrikcije:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\varphi(V)"] \arrow[d, "res_{V,U}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "res_{V,U}"] \\ \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\varphi(U)"'] & \mathcal{G}(U) \end{tikzcd}$$

treba pokazati da je aksiom snopa zadovoljen.

Jezgra morfizma snopova abelovih grupa φ je snop $\ker \varphi$ definiran

$$(\ker \varphi)(U) = \ker \varphi(U) \subset \mathcal{F}(U).$$

Napomena: Analogno se definiraju predsnopovi slike morfizma snopova abel. grupa ($\operatorname{Im}\varphi$) i kojezgra morfizma ($\operatorname{coker}\varphi$), ali za razliku od $\ker\varphi$ oni općenito nisu snopovi.

Tako da kad kažemo **slika morfizma** mislimo na snop pridružen predsnopu $\operatorname{Im}\varphi$ postupkom koji zovemo **snopifikacija** (sheafification).

Snopifikacija:

Neka je $\mathcal{F}$ predsnop na X. Definiramo snopifikaciju od $\mathcal{F}$ kao jedinstven snop $\mathcal{F}'$ zajedno s morfizmom predsnopova $\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ takvim da je $\forall x \in X$ inducirano preslikavanje $\varphi_x: \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}'_x$ izomorfizam.

Kako konstruiramo taj snop?

Definiramo topologiju na disjunktnoj uniji $\bar{\mathcal{F}} = \bigcup \mathcal{F}_x$ tako da za bazu otvorenih skupova uzmemo sve skupove oblika:

$$V(U, s) := \{(x, s_x) : x \in U\}$$

s_x je slika od s u $\mathcal{F}_x$

- projekcija $\bar{\mathcal{F}} \xrightarrow{\pi} X$ je neprekidna preslikava
- definiramo $\mathcal{F}'(U) =$ prerezi projekcije π nad U

$$= \{\sigma : U \to \pi^{-1}(U) : \pi \circ \sigma = \mathrm{id}\}$$

neprekidni

svaki σ s ovim svojstvom je oblika $\sigma : x \mapsto s_x$ za neki $s \in \mathcal{F}(U)$

Napomena: Morfizam snopova $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ je injektivan, surjektivan ili bijektivan ako i samo ako inducirana preslikavanja na stabiljkama (vlaknima) su redom injekt., surjekt. ili bijektivna.

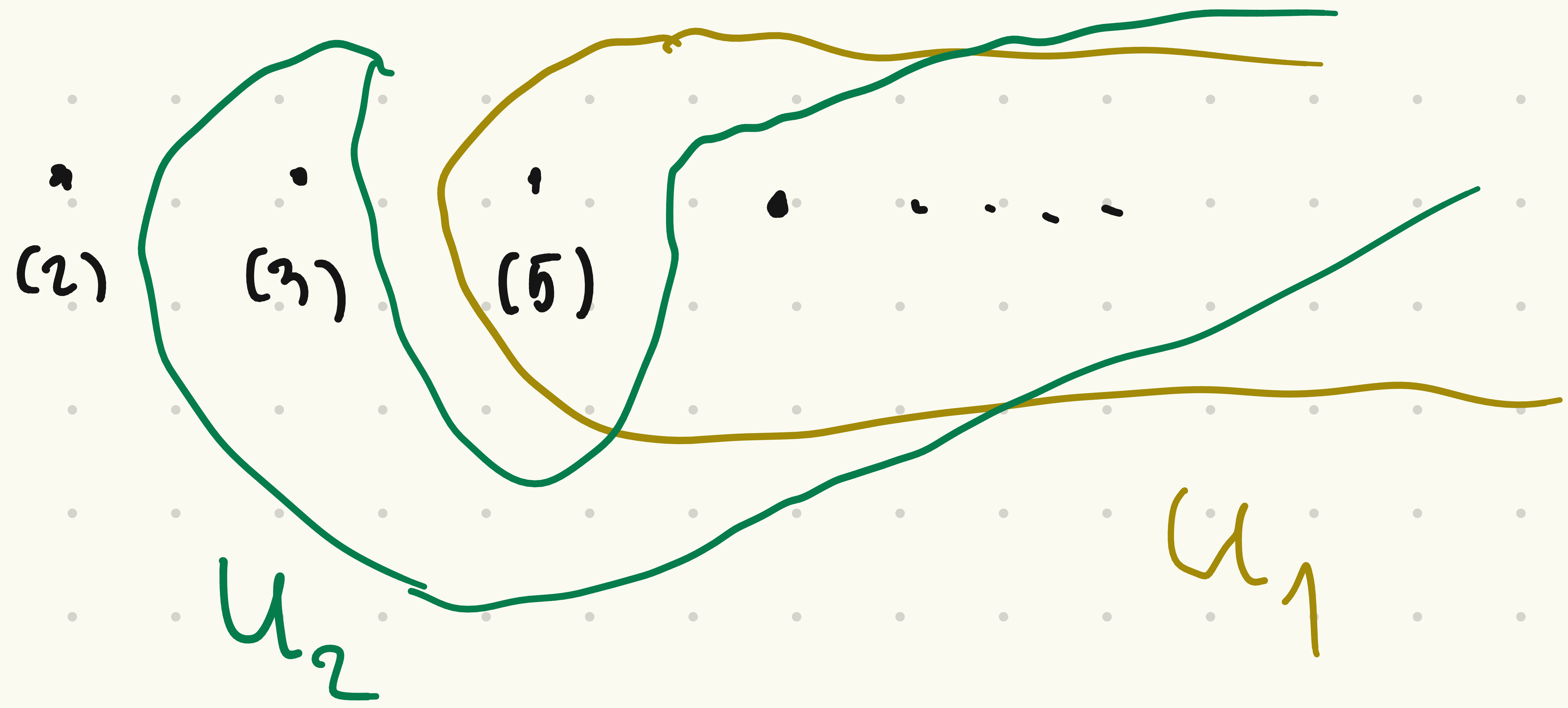
važno: dakle, · surjektivan morfizam ne inducira nužno surjektivno preslikavanje $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ za svaki otvoreni U

(za injektivan morfizam $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ je injekt. $\forall U \subset X$).

Zašto aksiom snopova? Natrag na Spec $\mathbb{Z}$,

$\mathbb{C}[x]$ afin pravac	$\Leftrightarrow$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{C} \Leftrightarrow$ max ideali		maks. ideali $(2), (3), (5), \ldots$
$\alpha \Leftrightarrow (x-\alpha)$	$\Leftrightarrow$	otvoreni skupovi D_f, $f \in \mathbb{Z}$ $= \{p : f \notin p\}$
Zariski otvoreni skupovi $D_f : f \neq 0$		$\mathcal{F}(D_f) = \left\{ \frac{g}{f^m} : g \in \mathbb{Z} \right\}$
Regularne fj. $\mathcal{F}(D_f) = \left\{ \frac{g}{f^m} : g \in \mathbb{C}[x] \right\}$	$\Leftrightarrow$ "funkcije"	$\frac{g}{f^m}(p) = \frac{g}{f^m} \mod p \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Primjer:



$$\mathcal{F}(U_1) = \left\{ \frac{a}{2^{\alpha} \cdot 3^{\beta}} : a \in \mathbb{Z},\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

$$\mathcal{F}(U_2) = \left\{ \frac{b}{2^{\alpha} 5^{\beta}} : b \in \mathbb{Z} : \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

$$U = U_1 \cup U_2$$

$$\mathcal{F}(U) = \left\{ \frac{c}{2^{\alpha}} : \dots \right\}$$

Osnovni teorem aritmetike.

$$\downarrow$$

$$\beta = \beta' = 0$$

Aksiom snopova: Neka je

$$\mathrm{res}_{U_2, U_1 \cap U_2} \frac{b}{2^{\alpha} 5^{\beta}} = \mathrm{res}_{U_1, U_1 \cap U_2} \frac{a}{2^{\alpha'} 3^{\beta'}}$$

Tada (aksiom snopa vrijedi) postoji $\frac{c}{2^{\alpha''}} \in \mathcal{F}(U)$

t.d. $\mathrm{res}_{U, U_2} \frac{c}{2^{\alpha'}} = \frac{b}{2^{\alpha} 5^{\beta}}$

Pristup snopovima preko etale prostora

razumijevanje (surjektivnosti) morfizama snopova

Kao i u Primjeru* neka je $A \to X$ neprekidno preslikavanje top. prostora, te $\mathcal{F}$ snop neprekidnih prereza tog preslikavanja.

Slično neka je $\mathcal{G}$ snop neprekidnih prereza od $B \to X$. Ako postoji $\pi : A \to B$ neprekidno t.d.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

komutira

onda π inducira morfizam između $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Za $U \subseteq X$ komponiranjem prereza od $A \to U$ s π dobivamo podskup prereza od $B \to U$.

tj. imamo preslikavanje $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ $\forall\, U \subseteq X$ otvoren.

Kako definirati surjektivnost pripadnog morfizma?

ili

$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ surjekt. $\forall U \subseteq X$ otvor.

$A \overset{\pi}{\to} B$ surjektivan

ovo odgovara našoj definiciji preko snopifikacije predsnopa slike morfizma.

Ovdje smo reprezentirali snopove na X preslikavanjima $\begin{matrix} A \\ \downarrow \\ X \end{matrix}$. Koliko to općenito ima smisla.

što je s morfizmima snopova? odgovaraju li preslikavanjima natkrivanja?

Q: Dobivamo li svaki snop $\mathcal{F}$ od nekog takvog $A \to X$?

Da, kasnije.

Da, to smo vidjeli kod procesa snopifikacije. Tamo smo A označili s $\overline{\mathcal{F}}$.

$\overline{\mathcal{F}}$ se zove **etalé prostor** snopa $\mathcal{F}$
(natkrivanje)

lokalni izomorfizam s X

etalé znači sljedeće: $\forall x \in A$ postoji okolina V od a t.d. je restrikcija $U \to X$ homeomorfizam na sliku preslikavanja
$U \subseteq A$

Pogledajmo malo detaljnije def. surjektivnosti morfizama $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ odnosno proces snopifikacije.

slika morfizma je (izomorfn. s) $\mathcal{G}$

Kako izgledaju prerezi snopifikacije $\mathcal{F}'$ nad $U \subseteq X$? Neka je $U \xrightarrow{\tilde{s}} \tilde{\mathcal{F}}$ jedan prerez. Tada postoji otvoren pokrivač $\{U_i\}$ od U t.d. je slika od restrikcije $\tilde{s}|_{U_i}$ sadržana u nekom baznom otvorenom skupu $V(\underbrace{V_i}_{\supseteq U_i}, s_i)$ odnosno u $V(U_i, s_i)$.

Onda i na $\tilde{s}|_{U_i}$ i na s_i možemo gledati kao na prereze od $\tilde{\mathcal{F}} \to X$ nad U_i.

pa gornji uvjet kaže da je $\tilde{s}|_{U_i} = s_i$.

Odnosno prerezi snopifikacije lokalno "odgovaraju" prerezima polaznog (pred)snopa.

Iz toga slijedi da je $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ surjektivno ako za svaki $U \subseteq X$ otv. i preslikavanje

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U)$$ imamo da

za svaki $\tilde{s} \in \mathcal{G}(U)$ postoji natkrivanje $\{U_i\}$ od U t.d. se $\tilde{s}|_{U_i}$ nalazi

$\tilde{s}|_{U_i} = \mathrm{res}_{U,U_i}(\tilde{s})$

tj. $\exists s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ t.d. $\varphi_U(s_i) = \tilde{s}|_{U_i}$

u slici $\varphi_U(\mathcal{F}(U_i))$. U jeziku natkrivanja

postoji $A \to B$ koji inducira morfizam $\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$. Kako?

$A = \bar{\mathcal{F}} \to B = \bar{\mathcal{G}}$

$(x, s_x) \mapsto (x, \varphi(s_x))$

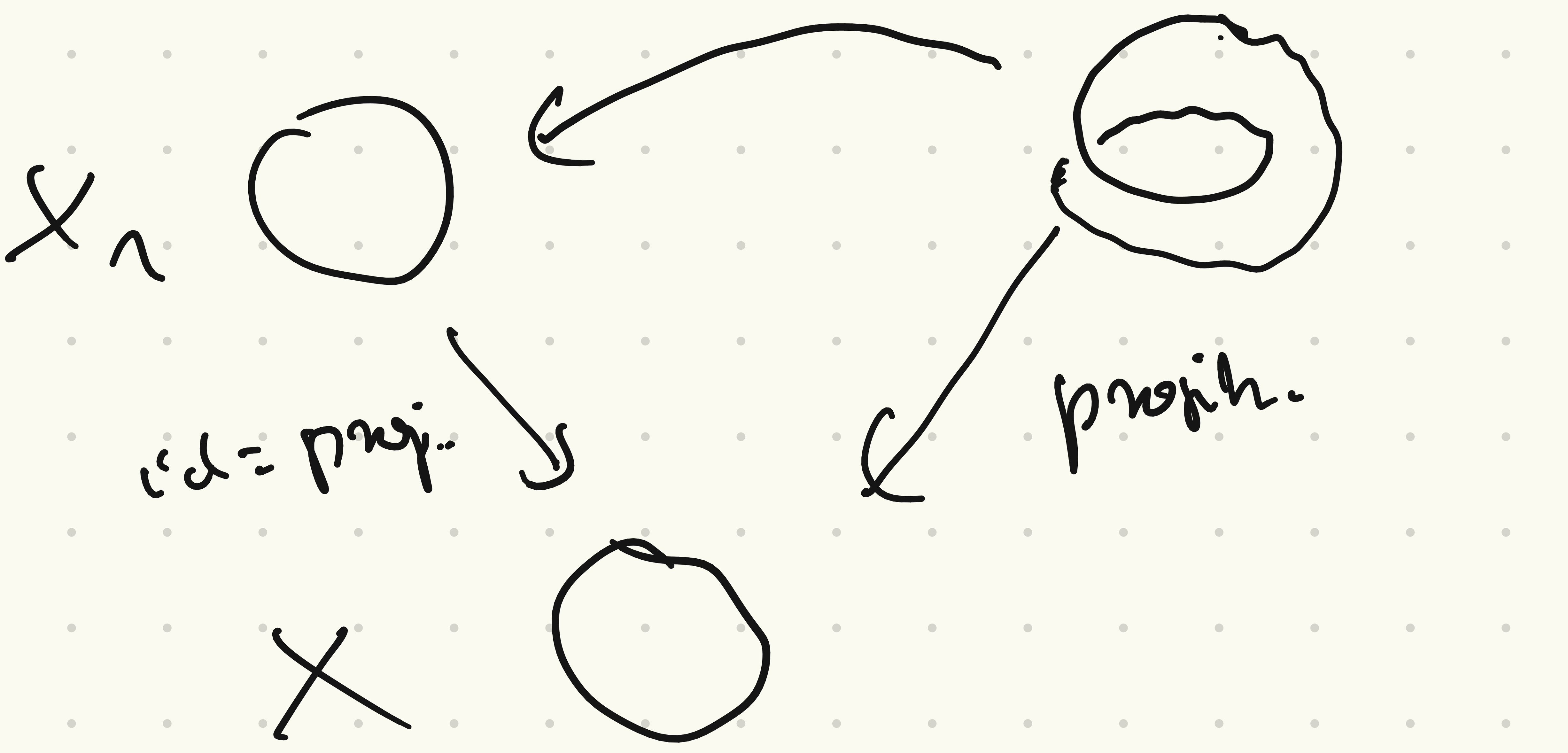
$\pi = \bar{\varphi}$, $A = \tilde{\mathcal{F}}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& X \arrow[ul, bend left, "s_i"] \arrow[ur, bend right, "\tilde{s}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\forall i \quad \tilde{s}|_{U_i} = \pi \circ s_i} \Rightarrow \pi \text{ je surjekcija}$$

φ inducira preslik. na vlaknima

Primjer:



Snop $\mathcal{F}_1$ ... prerezi $X_1 \to X$

Snop $\mathcal{F}_2$ ... prerezi $X_2 \to X$

Preslikavanje $X_2 \to X_1$ definira morfizam $\mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ koji je surjektivan (d.z.!)

ali $\mathcal{F}_2(X) \to \mathcal{F}_1(X)$ nije surjekcija

jer je $\mathcal{F}_2(X)$ prazan dok $\mathcal{F}_1(X)$ nije (ident.)