Afine sheme (affine schemes)

kroz sva predavanja

pretpostavljamo $\bar{K} = K$, $\operatorname{char} K = 0$

afina mnogostrukost u $\mathbb{A}^n$

skup rješenja u K

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_k(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

gdje su $f_i \in K[x_1,\dots,x_n]$

oznaka $V(S)$: $=\{x \in \mathbb{A}^n : f(x)=0 \ \forall f \in S\}$ gdje je $S=\{f_1,\dots,f_k\}$

vanishing set

Neka je I ideal u $K[x_1,\dots,x_n]$ generiran s $f_1,\dots,f_k$. Tada je $V(S)=V(I)$.

Također $V(I) = V(\sqrt{I})$

radikal $\sqrt{I} = \{f \in K[x_1,\dots,x_n] : f^s \in I$ za neki $s \in \mathbb{N}\}$

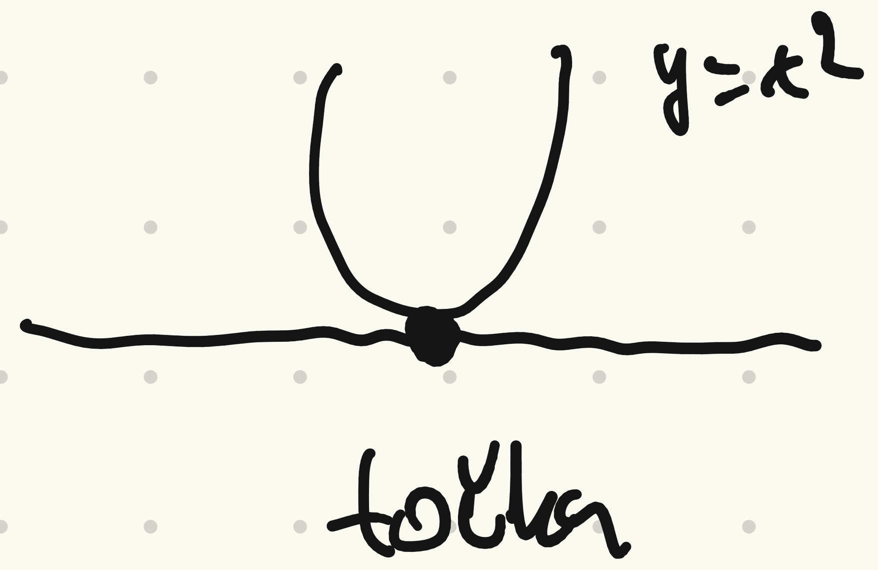
U definiciji afine mnogostrukosti ne zahtjevamo da je skup $V(S)$ ireducibilan u Zariski topologiji.

zatvoreni skupovi su oblika $V(\tilde{S})$ za neki $\tilde{S} \subset K[x_1,\dots,x_n]$

Afinoj mnogostrukosti $V(S)$ pridružujemo njenu algebru funkcija $K[x_1,\dots,x_n]/\sqrt{I}$ → oznaka $K[V(S)]$
(koordinatni prsten)

(reducirana)
preciznije: konačno generirana, bez nilpotentnih (nilpotent free) elemenata, K-algebra
+ integralna domena ako je $V(S)$ ireducib.

Primjer:



$$\begin{cases} y-x^2=0 \\ y=0 \end{cases} \quad \dots \; S=\{y-x^2, y\} \dots \; I=(x^2,y)$$

$$\sqrt{I}=(x,y)$$

algebra $K[x,y]/(x,y) \simeq K$

$V(S)=\{(0,0)\}$ (no $K[x,y]/I \simeq K[x]/(x^2)$)

$x^2=0$

Pridruživanje

$V(S) \longrightarrow K[x_1,\dots,x_n]/\sqrt{I}$ je

afina mnogostrukost

funktorijalno fj.

Ako je $f: V_1 \to V_2$ morfizam afinih mnogostrukosti onda on inducira morfizam K-algebri

$f = (f_1, \dots, f_m)$

f_i su polinomi

$$K[V_2] \to K[V_1]$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f$$

ako su $Y_1, \dots, Y_m$ koord. funk. na V_2 onda morfizam preslik. $Y_i \mapsto f_i \in K[V_1]$

Primjer: $V_1 : y^2 - x^4 - 1 = 0$

$V_2 : Y^2 - X^2 - 1 = 0$

$$V_1 \to V_2$$

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = (x^2, y)$$

$$\rightsquigarrow k[V_2] \to k[V_1]$$

$$k[V_2] = K[X, Y] / (Y^2 - X^2 - 1) \to K[x, y] / (y^2 - x^4 - 1)$$

$$X \mapsto x^2$$

$$Y \mapsto y$$

Ovako definiran funktor inducira
ekvivalenciju kategorija:

(ireducibilne) afine mnogostrukosti nad K + morfizmi $\longleftrightarrow$ konačno generirane reducirane K-algebre (integralne domene) gdje je $\bar{K}=K$ + morfizmi algebri

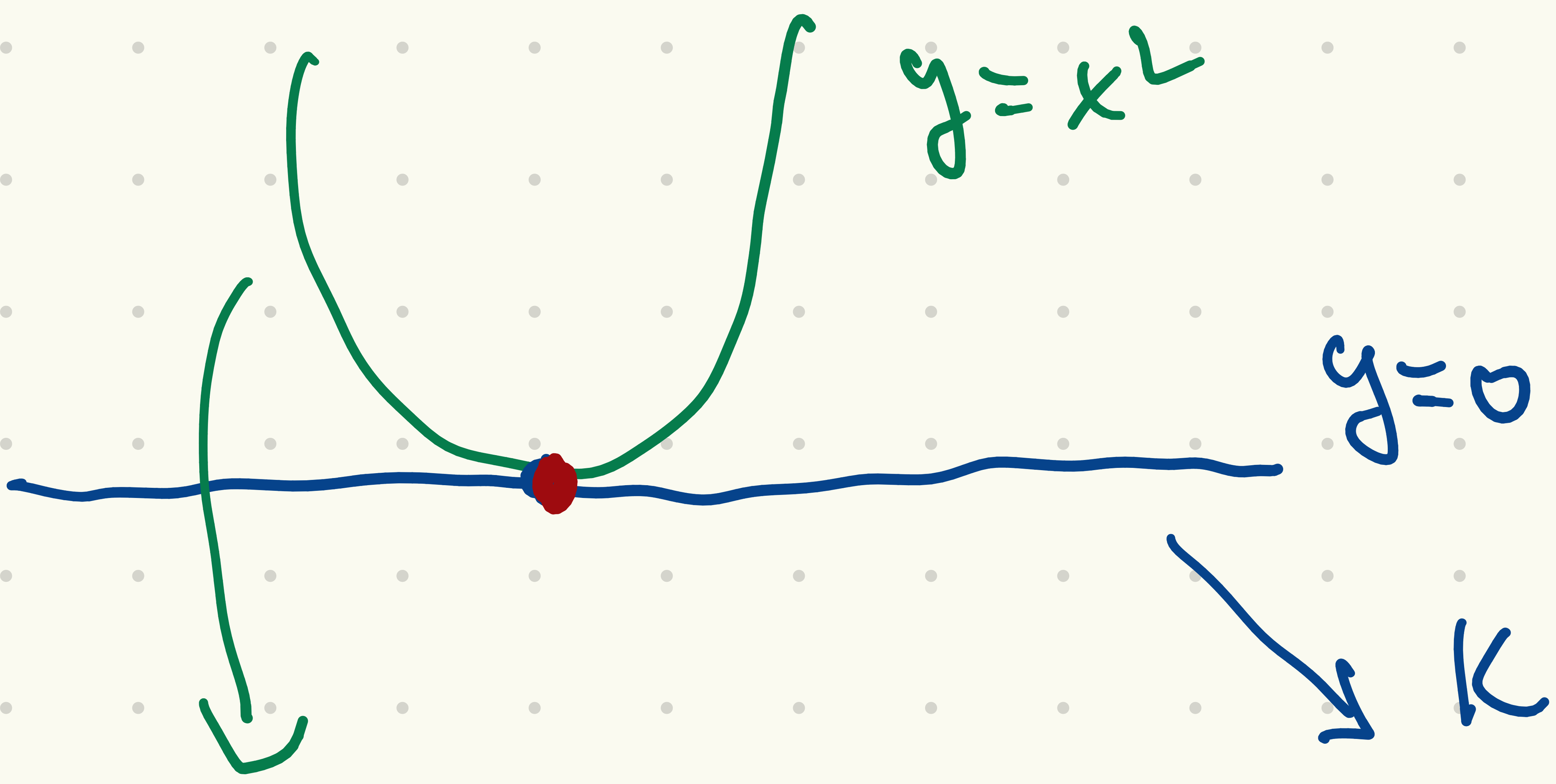
Ako želimo proširiti ovu korespondenciju na sve komutativne prstenove s 1, geometrijski objekt s lijeve strane će biti afina shema

afine sheme + morfizmi shema $\longleftrightarrow$ komutativni prstenovi s jedinicom + homom. prstena

Zašto bi to željeli napraviti?

d.z. progooglajte svoju omiljenu primjenu teorije shema

Iz perspektive teorije presjeka, presjek shema (za razliku od presjeka mnogostrukosti) nosi informaciju o multiplicitetu (kratnosti) presjeka i prirodniji je za računati. Npr.



$K[x,y]/I_1$ $\qquad$ $K[x,y]/I_2$

$I_1=(y-x^2)$ $\qquad$ $I_2=(y)$

presjek mnogostrukosti

$$K[x,y]/\sqrt{I_1+I_2} \cong K[x,y]/(x,y) \simeq K$$

presjek shema

$$K[x,y]/(I_1+I_2) \cong K[x]/(x^2)$$

sadrži infor. o kratnosti

Definicija afine sheme pridružene prstenu R.

Za afina mnogostrukost V nad $K = \bar{K}$,

točke $V(K)$ odgovaraju maksimalnim idealima koordinatnog prstena $R = K[V]$

$$(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \in K^n \in V(K) \quad \longleftrightarrow \quad (x_1 - \tilde{x}_1, x_2 - \tilde{x}_2, \ldots, x_n - \tilde{x}_n) \subset R$$

U definiciji afinih shema skup točaka ćemo proširiti s prostim idealima:

def. kasnije

(topološki) prostor sheme je skup

$$\operatorname{Spec} R = \{ P \subset R \,;\, P \text{ je prost ideal} \}.$$

Zašto kompliciramo? Vratimo se na mnogostrukosti.

Preslikavanja između mnogostrukosti $V_1 \xrightarrow{f} V_2$ možemo rekonstruirati iz homomorfizma

$$K[V_2] \xrightarrow{\varphi} K[V_1]:$$

Neka je $P \in V_1$ i neka je $\mathfrak{P}$ maksimalni ideal od $k[V_1]$ pridružen toj točki.

Tada je $f(P)$ jednako točki na V_2 koja odgovara idealu $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$.

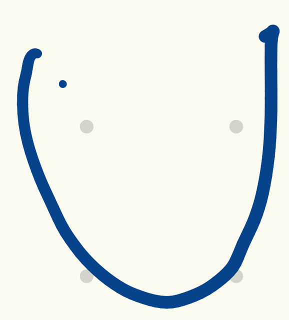
Svojstvo prstena pridruženih mnogostr. je to da je praslika maksimalnog ideala uvijek maksimalni ideal, no to ne vrijedi za sve prstenove – sve što možemo općenito reći je da će praslika biti prost ideal. Zato proširujemo skup točaka na proste ideale.

Primjer: Spec $K[x,y]$

maksimalni ideali $(x-x_0, y-y_0)$ odgovaraju zatvorenim točkama (x_0, y_0)

prosti ideali odgovaraju krivuljama.

e.g. $I = (y - x^2)$



$y = x^2$

nul ideal (0) $\leftrightarrow$ $\mathbb{A}^2$

(0) je ideal ako je R integralna domena

Za mnogostrukost V, $k[V]$ su funkcije na V.

Slično gledamo na prsten R - njegovi elementi su "funkcije" na Spec R.

Preciznije, neka je $f \in R$ i $x = [\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} R$.

Tada je $f(x)$ slika od f po homomorfizmu

$$R \to R/\mathfrak{p} \to \kappa(x)$$

fraction field

integralna domena

polje razlomaka od $R/\mathfrak{p}$

(residue field)

Dakle, $f(x) \in \kappa(x)$

domena općenito ovisi o x

(nije prava funkcija)

u slučaju mnogostrukosti $\kappa(x) = K$ je f normalna funkcija

d.z. dokažite.

Uočimo $f(x) = 0 \iff f \in \mathfrak{p}$ gdje je $x = [\mathfrak{p}]$.

pa ima smisla govoriti o nultočkama "funkcije"

Primjer: Neka je $R = \mathbb{Z}$. Uzmimo funkciju $15 \in \mathbb{Z}$ i točku $7 \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Tada

$$15(7) = 15 \bmod 7 = 1 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$$

vrijednost funkcije u točki 7

Sheme kao topološki prostori:

Definirat ćemo Zariski topologiju na $\operatorname{Spec} R$. Slično kao i kod mnogostrukosti zatvoreni skupovi će biti skupovi oblika

$$V(S) = \{x \in \operatorname{Spec} R : f(x) = 0 \ \forall f \in S\}$$
$$= \{[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Spec} R : \mathfrak{p} \supset S\}.$$

gdje je $S \subset R$ proizvoljan.

Da bi ovi skupovi bili baza za topologiju moraju biti zatvoreni na proizvoljne presjeke, tj.

$$\bigcap_\alpha V(S_\alpha) = V\Big(\bigcup_\alpha S_\alpha\Big) \quad ✓$$

provjeri

Što se tiče otvorenih skupova, nama će biti posebno važni skupovi oblika za $f \in R$

$$X_f = \operatorname{Spec} R \setminus V(f)$$

bazični
zovemo ih osnovni (basic or distinguish) otvoreni skupovi od $X = \operatorname{Spec} f$ pridruženi $f \in R$.

prosti ideali koji ne sadrže f

$\updownarrow$

u 1:1 korespondenciji s prostim idealima u lokalizaciji R_f (dopuštamo nazivnike oblika f^s)

Tako da ćemo ubuduće identificirati X_f s točkama iz skupa $\operatorname{Spec} R_f$

Pišemo, za proizvoljan otvoren $U \subset \operatorname{Spec} R$

$$U = \operatorname{Spec} R \setminus V(S) = \operatorname{Spec} R \setminus \bigcap_{f \in S} V(f)$$

$$= \bigcup_{f \in S} \operatorname{Spec} R_f$$

Slično

bazični otvoreni skupovi su zatvoreni na konačne presjeke.

$$\bigcap_{i=1,\dots,n} \operatorname{Spec} R_{f_i} = \operatorname{Spec} R_g \quad \text{gdje je}$$

$$g = f_1 \cdot \dots \cdot f_n .$$

- Spec R nije skoro nikad Hausdorffov prostor – jedine zatvorene točke su one pridružene maksimalnim idealima

- najmanji zatvoren skup koji sadrži danu točku $[\mathfrak{p}]$ je $V(\mathfrak{p})$, tj. zatvorenje točke $[\mathfrak{p}]$ se sastoji od svih točaka $[\mathfrak{q}]$ za koje je $\mathfrak{q} > \mathfrak{p}$