Vratimo se natrag na problem 27 pravaca.

Sljedeća propozicija povezuje klasu Fanove sheme s Chernovim klasama.

Propozicija: Neka je V $n+1$-dim vektorski prostor, $S \subset V \otimes \mathcal{O}_G$ tautološki podsvežanj ranga $k+1$ na Grassmannianu $G = G(k, \mathbb{P}V)$ k-ravnina gdje je $\mathbb{P}V \cong \mathbb{P}^n$.

Homogeni polinom stupnja d na $\mathbb{P}V$ definira globalni prerez σ_g od $\mathrm{Sym}^d S^*$ čiji je skup nultočaka $F_k(X)$ gdje je X hiperploha $g=0$.

Ako $F_k(X)$ ima očekivanu kodimenziju $\binom{k+d}{k} = \mathrm{rank}(\mathrm{Sym}^d S^*)$ onda

$$[F_k(X)] = c_{\binom{k+d}{k}}(\mathrm{Sym}^d S^*) \in A(G).$$

Dokaz: Vlakno od S nad točkom $[L] \in \mathbb{G}$ je odgovarajući $(k+1)$-dim potprostor $\tilde{L}$ od V. Zato je vlakno dualnog svežnja S^* nad $[L]$ prostor linearnih formi na L, tj. $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}\tilde{L}}(1))$.

$$\mathbb{G} = \mathbb{G}(k, \mathbb{P}V)$$

preciznije: vlakno je $\mathrm{Hom}(\tilde{L}, K)$; svaki $\varphi \in \mathrm{Hom}(\tilde{L}, K)$ inducira presjek iz $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}L}(1))$ ...

Dualno preslikavanje $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \to S^*$ evaluirano u točki $[L]$ linearnu formu $\varphi \in V^*$ (na koju gledamo kao na konstantni presjek trivijalnog svežnja $V^* \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}}$) preslikava u restrikciju od φ na L (preciznije na $\tilde{L}$).

Induciramo preslikavanje na simetričnim potencijama

forme stupnja d na $\mathbb{P}V = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}V}(d))$

$$\mathrm{Sym}^d V^* \to \mathrm{Sym}^d S^*$$

evaluiram u $[L]$ preslikam formu g u svoju restrikciju $g|_L$.

Sada je $\sigma_g \in H^0(\mathrm{Sym}^d S^*)$ globalni prerez koji je slika od g po tom preslikavanju.

Tvrdimo da je $F_k(X) \subset G(k, \mathbb{P}V)$ lokus nultočaka tog prereza. Prelaskom na osnovni afin pokrivač $\{U\}$ od G lako se vidi da vrijednost od σ_g u točki iz U koja odgovara k-ravnini L je restrikcija od G na L. $\Rightarrow \sigma_g([L]) = 0$
$\Leftrightarrow g|_L = 0$
$\Leftrightarrow$
$L \subset X$

U iz tog pokrivača trivijaliziramo S:

$$S|_U = \mathcal{O}_U^{k+1} \hookrightarrow V \otimes \mathcal{O}_U$$

ima smisla jer kad se σ_g restringira na U postaje funkcija

Pravci na kubici

X = glatka kubika $G = G(1,3)$

Želimo izračunati $[F_1(X)] \in A(G)$.

Trebat će nam:

Propozicija 1: $c(S^*) = 1 + \sigma_1 + \sigma_{1,1}$

Također, koristit ćemo princip cijepanja
(splitting principle)

v. svežanj ranga 2

koji kaže da se možemo "pretvarati"
da se S^* može prikazati kao direktna
suma linijskih svežnjeva $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$,
$S^* = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$.

Neka je $c(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L}) = 1 + \alpha$
i $c(\mathcal{M}) = 1 + \beta$

Iz Whitneyjeve formule slijedi

$$c(S^*) = (1+\alpha)(1+\beta) = 1 + \sigma_1 + \sigma_{1,1}$$

$\Rightarrow \quad \alpha+\beta = \sigma_1 \quad$ i $\quad \alpha\beta = \sigma_{1,1}$.

Računamo:

$$\mathrm{Sym}^3 S^* = \mathcal{L}^3 \oplus (\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^2) \oplus \mathcal{M}^3$$

ovo slijedi iz analogne tvrdnje za vektorske prostore.

pa

$$c(\mathrm{Sym}^3 S^*) = c(\mathcal{L}^3)\, c(\mathcal{L}^2 \otimes \mathcal{M})\, c(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}^2)\, c(\mathcal{M}^3)$$

$$= (1+3\alpha)(1+2\alpha+\beta)(1+\alpha+2\beta)(1+3\beta)$$

ovdje smo koristili:

$$c_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = c_1(\mathcal{A}) + c_1(\mathcal{B})$$

za linearne svežnjeve $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

slijedi iz definicije: ako su a i b racionalni presjeci od $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ onda je $a \otimes b$ rac. presjek od $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ i $\operatorname{div} a\otimes b = \operatorname{div} a + \operatorname{div} b$

Posebno $c_4(\mathrm{Sym}^3 S^*) = 3\alpha(2\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)3\beta$

$$= 9\alpha\beta(2\alpha^2+5\alpha\beta+2\beta^2)$$

$$= 9\alpha\beta(2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta)$$

$$\Rightarrow c_4(\mathrm{Sym}^3 S^*) = 9\sigma_{1,1}(2\sigma_1^2+\sigma_{1,1})$$

$$= 9\sigma_{1,1}(2\sigma_2+2\sigma_{1,1}+\sigma_{1,1})$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\sigma_1^2=\sigma_2+\sigma_{1,1}\\ \sigma_{1,1}\cdot\sigma_2=0\\ \sigma_{1,1}^2=\sigma_{2,2}\end{array}} \qquad = 27\cdot\sigma_{2,2}$$

$$\Rightarrow \deg(c_4(\mathrm{Sym}^3 S^*)) = 27$$

Što iz ovoga možemo zaključiti?

ako kubika $X \subset \mathbb{P}^3$ sadrži konačno mnogo pravaca, onda je broj pravaca (uzimajući u obzir multiplicitete) 27

Može se pokazati da je $F_1(X)$ za glatku kubiku X nužno 0-dimenz. i reduciran iz čega će slijediti da sadrži 27 različitih pravaca.

$c(S^*) = ?$

Neka je $G = G(k, V) = G(k, n)$ i

neka su S i Q univerzalni pod i kvocijent svežnjevi.

Izračunajmo $c(Q)$. Q je globalno generiran – $v \in V$ daje globalni prerez na Q

t. d. za svaki k-ravninu $\Lambda \subset V$ vrijedi

$$\sigma(\Lambda) = \bar{v} \in V/\Lambda$$ ← to je vlakno od Q nad Λ

linearno nezavisni

Skup $v_1, \dots, v_m \in V$ će dati prereze koji su zavisni u točki $\Lambda \in G$ ako i samo ako su $\bar{v}_i \in V/\Lambda$ zavisni, tj. onda kada se $W = \langle v_1 \dots v_m \rangle$ i Λ netrivijalno sijeku, tj. kada $\mathbb{P}\Lambda \cap \mathbb{P}W \neq \emptyset$

Ovaj lokus Λ-di je Schubertov ciklus

$$\Sigma_{n-k-m+1}(W)$$ ← nismo općenito definirali

tj. $c_i(Q) = \sigma_i$

pa je totalna Chernova klasa jednaka

$$c(Q) = 1 + \sigma_1 + \dots + \sigma_{n-k}$$

Izračunajmo $c(S)$: S nema ne-nul globalnih prereza ali dualni svežanj S^* ima.

Ako je $l \in V^*$ linearna forma, možemo definirati prerez τ od S^* tako da restringiramo l na svaku k-ravninu $\Lambda \subset V$ tj. $\tau(\Lambda) = l|_\Lambda$.

Neka su $l_1, \dots, l_m \in V^*$ linearno nezavisne linearne forme i neka je $U < V$ presjek njihovih jezgri, $U = \bigcap_{i=1}^{m} \ker l_i$.

Pretp. da su pripadni prerezi od S^* zavisni u točki $\Lambda \in G$. Tj. da postoji linearna kombinacija koja poništava Λ.

Definirajmo potpunu zastavu

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n = V$$

gdje je $F_{n-r} = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(l_i)$ za $r = 1, \dots, m$

(tj. $V \supset \ker l_1 \supset \ker l_1 \cap \ker l_2 \supset \dots$)

$$\boxed{\begin{gathered} \dim(\Lambda \cap F_{n-m}) \geq k - m \\ \Updownarrow \\ \exists \lambda_i \in K \text{ t.d. } \sum \lambda_i l_i |_{\Lambda} = 0 \end{gathered}}$$

pretp. da je $m \leq k$ jer je inače tvrdnja trivijal.

Što se dešava kada vektorski prostor $W < V$ presiječemo s hiperplohom H ($= \ker l_i$)?

Općenito $\dim(W + H) = \dim(W) + \dim(H) - \dim(W \cap H)$

tj. ako je $W \subset H$ onda $\dim W = \dim(W \cap H)$

ako $W \not\subset H$ onda $\dim(W \cap H) = \dim W - 1$

Uvjet $\dim(\Lambda \cap F_{n-m}) > k-m$ se onda može interpretirati tako da se kaže da među prvih m presjeka s $\ker l_i$ za $i=1,..,m$ se je barem jednom desilo da dimenzija nije pala.

Zašto su ova dva uvjeta ekvivalentna? $\square$

Zanima nas kada je

anihilator od Λ u V

$$\langle l_1,..,l_m \rangle \cap \mathrm{Ann}(\Lambda) = W \neq \{0\}$$

$$\iff \mathrm{Ann}(\langle l_1,...,l_m\rangle) + \mathrm{Ann}(\mathrm{Ann}(\Lambda)) = \mathrm{Ann} W$$

Ako identificiramo V i $(V^*)^*$ imamo

$$\bigcap_{i=1}^{m} \ker l_i + \Lambda = \mathrm{Ann} W \quad / \dim$$

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{n} \ker l_i\right) + \dim(\Lambda) - \dim\left(\bigcap \ker l_i \cap \Lambda\right)$$

$$= \dim \mathrm{Ann} W \quad \text{odnosno}$$

$$n-m+k-\dim(\cap) = \dim \mathrm{Ann} W$$

$\dim(U \cap \Lambda) = n - m + k - \dim \Lambda \cap W$

$\geq k - m$ ✓

Pitanje: Što možemo reći o klasi

$\{ \Lambda \in G(k, V) : \dim(\Lambda \cap U) \geq k - m \}$?

genericki dimenzije
$\checkmark$ presjek je $k-m$

Ako je $m = k$, onda je ovo Schubertov ciklus Σ_1, općenito je to $\Sigma_{1,1,1,\ldots,1}$

m jedinica.

pa je totalna Chernova klasa jednaka

$c(S^*) = 1 + \sigma_1 + \sigma_{1,1} + \ldots + \sigma_{1,1,1,\ldots,1}$

k jedinica.

$\dim V_i = i$

zastava V

Schubertovi ciklusi općenito:

Neka je $0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n = V$ potpuna zastava u V. Schubertovi ciklusi su indeksirani nizovima $\underline{a} = (a_1, \dots, a_k)$ cijelih brojeva t.d.

$$n-k \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k \geq 0$$

$$\Sigma_{\underline{a}}(V) = \{\Lambda \in G \mid \dim(V_{n-k+i-a_i} \cap \Lambda) \geq i \text{ za sve } i\}$$

Primjer:

- $\Sigma_{1,\dots,1} = \{\Lambda \in G \mid \dim V_{n-k+i-1} \cap \Lambda \geq i\}$
- $\Sigma_r = \{\Lambda \in G \mid \dim V_{n-k+1-r} \cap \Lambda \geq 1\}$

tj. Λ i $V_{n-k+1-r}$ se netriv. sijeku.

$$\Rightarrow c(S) = 1 - \sigma_1 + \sigma_{11} - \ldots + (-1)^k \sigma_{1\ldots 1}$$ k jedin...

zašto?

$$c_i(\mathcal{E}^*) = (-1)^i c_i(\mathcal{E})$$ vrijedi

za svaki vektorski svežanj $\mathcal{E}$

dokaz: Pretp. $\mathcal{E} = \bigoplus \mathcal{L}_i$ gdje su $\mathcal{L}_i$ linijski svežnjevi. Prema Whitney'evoj formuli

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} (1 + c_1(\mathcal{L}_i)).$$

Za linijski svežanj po vrijedi

$c_1(\mathcal{E}^*) = -c_1(\mathcal{E})$ jer

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^* \simeq \mathcal{O}_G$$

$$\Rightarrow \underbrace{c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*)}_{= c_1(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{E}^*)} = c_1(\mathcal{O}_G) = 0$$

$$\Rightarrow c(\mathcal{E}^*) = c(\bigoplus \mathcal{L}_i^*) = \prod_{i=1}^{r} (1 - c_1(\mathcal{L}_i))$$

pa tvrdnja slijedi množenjem

Princip cijepanja kaže da tvrdnja vrijedi za sve svežnjeve ∎

Još malo računanja.

Propozicija: Neka je $\mathcal{E}$ vektorski svežanj ranga r i $\mathcal{L}$ linijski svežanj. Tada

$$c_k(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{r-\ell}{k-\ell} c_1(\mathcal{L})^{k-\ell} c_\ell(\mathcal{E})$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \binom{r-k+i}{i} c_1(\mathcal{L})^i c_{k-i}(\mathcal{E})$$

linijski svežnji

Dokaz: Pretp. $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i$

i neka je $\alpha_i = c_1(\mathcal{M}_i) \in A^1(X)$ pa vrijedi:

$$c(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i)$$

$\Rightarrow$

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = c_1(\mathcal{E})$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{r-1}\alpha_r = c_2(\mathcal{E})$$

$$\vdots$$

$$\alpha_1 \ldots \alpha_r = c_r(\mathcal{E})$$

Neka je $\beta = c_1(\mathcal{L})$. Kako vrijedi

$$\mathcal{E} \otimes \mathcal{L} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathcal{M}_i \otimes \mathcal{L}$$ po Whitneyevoj formuli

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \alpha_i + \beta)$$

$c_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) = c_1(\mathcal{A}) + c_1(\mathcal{B})$ za linijske svežnjeve.

$$\Rightarrow c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta) = c_1(\mathcal{E}) + r \cdot c_1(\beta)$$

$$c_2(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) = \sum_{1 \le i < j \le r} (\alpha_i + \beta)(\alpha_j + \beta)$$

$$= \dots = c_2(\mathcal{E}) + (r-1) c_1(\mathcal{E}) c_1(\mathcal{L}) + \binom{r}{2} c_1(\mathcal{L})^2$$

$\vdots$

tvrdnja slijedi. ∎

Za vježbu dokažite:

Propozicija: Ako su $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ vektorski svežnjevi ranga e i f onda
$$c_1(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = f \cdot c_1(\mathcal{E}) + e \cdot c_1(\mathcal{F})$$

Usput: Kanonska klasa (the canonical class)

Neka je X glatka n-dim. mnogostrukost. Kanonski svežanj ω_X od X definiramo kao $\Lambda^n \Omega_X$ gdje je Ω_X kotangenski svežanj od X $\to$ to je linijski svežanj čiji su presjeci regularne n-forme.

Kanonska klasa je prva Chernova klasa $c_1(\omega_X) \in A^1(X)$ tog linijskog svežnja. Često se označava s K_X.

Znamo za glatku projektivnu krivulju X

$$\deg K_X = 2g-2$$

Primjer: (Projektivni prostor)

Neka su $X_0, \ldots, X_n$ homog. koordinate na $\mathbb{P}^n$ i $x_i := \frac{X_i}{X_0}$ za $i = 1, \ldots, n$ afine koordinate na $U \simeq \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$ gdje je $X_0 \neq 0$.

Neka je $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ racionalna n-forma na U. Ona je regularna i $\neq 0$ na U pa treba odrediti njen divizor na hiper-ravnini $V(X_0) = H$ u beskonačnosti.

Neka je $U' \subset \mathbb{P}^n$, $X_n \neq 0$ i uzmimo afine koordinate $y_0, \dots, y_{n-1}$ na U' gdje je $y_i := X_i / X_n$. Imamo

$$x_i = \begin{cases} \dfrac{y_i}{y_0} & \text{za } i = 1, \dots, n-1 \\ 1/y_0 & \text{za } i = n \end{cases}$$

pa

$$dx_i = \begin{cases} \dfrac{1}{y_0} dy_i - \dfrac{y_i}{y_0^2} dy_0 & \text{za } i = 1, \dots, n-1 \\ -\dfrac{1}{y_0^2} dy_0 & \text{za } i = n \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \frac{(-1)^n}{y_0^{n+1}} dy_0 \wedge \dots \wedge dy_{n-1}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Div}(\omega) = -(n+1) H$$

$\Rightarrow K_{\mathbb{P}^n} = -(n+1)\xi$ gdje je $\xi \in A^1(\mathbb{P}^n)$ klasa hiperravnine. ∎

Svežanj Kählerovih diferencijala.

Neka je $f: X \to S$ morfizam shema.

Svežanj K. difer. $\Omega^1_{X/S}$ se definira ovako:

1. Lokalna konstrukcija na otvorenim afinim skup.

Ako je $U = \operatorname{Spec} B \subset X$ i $V = \operatorname{Spec}(A) \subset S$ i $f(U) \subset V$, onda je restrikcija od $\Omega^1_{X/S}$ na U je modul Kählerovih diferencijala $\Omega_{B/A}$

B-modul generiran simbolima db $\forall b \in B$ s relacijama

- $\forall a \in A, \forall b \in B$

$$d(ab) = a\,db$$

- $\forall b, b' \in B$, $d(b+b') = db + db'$
- Leibnizovo pravilo $d(bb') = b\,db' + b'\,db$.

2. Ljepljenje

"Svežanj" definiran na otvorenim afinim podskupovima se može proširiti do svežnja na X.

3. Karakterizacija preko univerzalnog svojstva

$\Omega^1_{X/S}$ je jedinstveno određen ovim svojstvom:

Postoji $\mathcal{O}_S$-linearna derivacija $\mathcal{O}_X$- modul

$$d : \mathcal{O}_X \to \Omega^1_{X/S} \quad \text{t.d.}$$

a) Za svaki $\mathcal{O}_X$-modul $\mathcal{M}$ i svaku

S-linearnu derivaciju

$$D : \mathcal{O}_X \to \mathcal{M} \quad \text{koja zadovoljava}$$

Leibnizovo pravilo $D(fg) = f D(g) + g D(f)$

postoji jedinstveno $\mathcal{O}_X$-linearno preslikavanje

$$\phi : \Omega^1_{X/S} \to \mathcal{M} \quad \text{t.d.} \quad D = \phi \circ d.$$