Transferzalnost:

Da bi pokazali da se ciklusi $Z_{C_i} \subset X$ sijeku transferzalno za generičke konike Z_{C_i} u točkama presjeka $\bigcap Z_{C_i}$ treba nam opis tangencijalnih prostora. Kako se točke presjeka nalaze u U-lokusu glatkih konika tangencijalne prostore možemo opisati preko geometrije od $\mathbb{P}^5$.

↳ U je isto gdje god ga uložili

Lema: Neka je $D \subset \mathbb{P}^2$ glatka konika i $Z_D^\circ \subset \mathbb{P}^5$ mnogostrukost glatkih konika C koje tangiraju D.

(a) Ako C ima točku p dodira minimalnog multipliciteta s D i u drugim točkama presjeka je transferzalna na D, onda je Z_D° nesingularna u točki $[C]$.

b) U tom slučaju projektivna tang. ravnina $T_{[C]} Z_D^\circ$ na Z_D° u $[C]$ je hiperravnina $H_p \subset \mathbb{P}^5$ konika koje sadrže točku p.

Dokaz: Ako D identificiram s $\mathbb{P}^1$ onda imamo surjektivnu restrikciju

$$H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \to H^0(\mathcal{O}_D(2)) = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4))$$

čija je jezgra generirana s jednadžbom od D.

možemo zamisliti da u homogeni polinom f stupnja 2 na $\mathbb{P}^2$ uvrstimo parametrizaciju od D s $\mathbb{P}^1$. Nultočke dobivenog polinoma stupnja 4 na $\mathbb{P}^1$ su točke presjeka $f=0$ s D

$\Rightarrow$ $f=0$ dira D ako i samo ako je dobivena restrikcija $f|_D = 0$ singularna (tj. ima višestruke nultočke).

Promotrimo inducirano preslikavanje

$$\pi_D : \mathbb{P}^5 = \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) \to \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) = \mathbb{P}^4$$

To je projekcija iz točke $D \in \mathbb{P}^5$ na $\mathbb{P}^4$.

Iz prethodno rečenog vidimo da će $f=0$ dirati D ako $f \in \mathbb{P}H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)) = \mathbb{P}^5$ se preslika u hiperplohu $\mathcal{D} \subset \mathbb{P}^4$ singularnih divizora linearnog sustava $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)|$.

Linearni sustav na shemi X je uređeni par $(\mathcal{L}, V)$ gdje je $\mathcal{L}$ linijski svežanj i $V \subset H^0(\mathcal{L})$ vekt. potprostor prereza. Svakom prerezu $\sigma \in V$ pridružimo lokus nultočaka $V(\sigma)$ – pa na linearni sustav možemo gledati kao na familiju $\{V(\sigma) : \sigma \in V\}$ divizora koji su parametrizirani projektivnim prostorom $\mathbb{P}V$.

Dakle, zatvarač od Z_D^0 u $\mathbb{P}^5$ je

stožac s vrhom u $D \notin \mathbb{P}^5$ nad hiperplohom

$D \subset \mathbb{P}^4$ singularnih divizora u linearnom

sustavu $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)|$.

Sada lema slijedi iz sljedeće propozicije.

Propozicija: Neka je $\mathbb{P}^d = \mathbb{P} H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$

prostor homog. polinoma stupnja d na $\mathbb{P}^1$

i $D \subset \mathbb{P}^d$ diskriminantna hiperploha

(= lokus polinoma s višestrukim nultočkama)

Ako je $F \in D$ točka koja odgovara

polinomu s točno jednom dvostrukom nultočkom

p i s $d-2$ nultočke multipliciteta 1,

onda je D glatka u točki F s tangenc.

prostorom koji je jednak polinomima koji

se poništavaju u p.

Dokaz: Promotrimo incidentnu korespodenciju

$$\Psi = \{ (F, p) \in \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1 \mid \mathrm{ord}_p(F) \geq 2 \}$$

U lokalnim koordinatama $(a, x) \in \mathbb{P}^d \times \mathbb{P}^1$

Ψ je skup zajedničkih nultočaka polinoma

$$R(a, t) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad i$$

$$S(a, t) = d a_d x^{d-1} + \dots + a_1$$

Ako parcijalne derivacije evaluiramo u

generičkoj točki (a, x) za koju je $a_1 = a_0 = x = 0$

dobivamo da su sve parc. derivacije 0 osim

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial a_1} & \frac{\partial R}{\partial a_0} & \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} & \frac{\partial S}{\partial a_0} & \frac{\partial S}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2a_2 \end{pmatrix}$$

Što iz toga možemo zaključiti?

Rang matrice je 2 pa je Ψ glatka u toj točki.

Ako je $a_2 \neq 0$ (budući da pretp. char $K \neq 2$)

onda je diferencijal

$d\pi : T_{(a,0)}\mathcal{Y} \to T_a \mathbb{P}^d$ projekcija

$\pi : D \to \mathbb{P}^d$ je injektivna. Njegova slika

je ravnina $a_0 = 0$. Budući da je π 1=1

do takve točke $\Rightarrow D = \pi(\mathcal{Y})$ je glatka

u slici takve točke.

zašto ovo vrijedi?

∎

Trebat će nam i sljedeća lema.

Lema: Neka su $C_1, \dots, C_5 \subset \mathbb{P}^2$ generičke konike

i $C \subset \mathbb{P}^2$ glatka konika koja tangira svih 5.

Svaka konika C_i jednostavno dira C u

točki p_i, a u preostalim točkama je presjek

transferzalan i točke $p_i \in C$ su različite.

Dokaz: Slijedi iz generičnosti od $C_1, \dots, C_5$.

q.e.d.

Natrag na argument transferzalnosti.

Neka je $[C] \in \bigcap Z_{C_i}$ točka koja je pridružena konici $C \subset \mathbb{P}^2$. Po preth. lemi točke dodira $p_i \in C \cap C_i$ su različite na C.

Budući da je C jedinstvena konika koja prolazi kroz tih 5 točaka presjek tang. prostora na Z_{C_i} u $[C]$ je

$$\bigcap T_{[C]} Z_{C_i} = \bigcap H_{p_i} = \{[C]\}$$

nula dimenzionalan što implicira transferzalnost. ✓

zašto.

Chowov prsten prostora potpunih konika:

Preostaje još izračunati klase od
$\cap Z_{ci}$ u Chowovom prstenu $A(X)$.

Neka su $\alpha, \beta \in A^1(X)$ pullbackovi na $X \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$ klasa hiperravnina na $\mathbb{P}^5$ i $\mathbb{P}^{5*}$.

Oni su redom reprezentirani divizorima:

$$A_p = \{(C, C^*) \mid p \in C\}$$ (za bilo koju točku $p \in \mathbb{P}^2$)

i s $$B_L = \{(C, C^*) \mid L \in C^*\}$$ (za bilo koju točku $L \in \mathbb{P}^{5*}$)

Također, neka su $\gamma, \varphi \in A^4(X)$ klase krivulja Γ i Φ koji su pullbackovi na X generičkih pravaca u $\mathbb{P}^5$ i $\mathbb{P}^{5*}$. To su redom klase lokusa potpunih konika (C, C^*) t.d. C sadrži 4 generičke točke u ravnini i takvih da C^* sadrži 4 točke $L_i \in \mathbb{P}^{2*}$ (tj. 4 pravca tangira C u $\mathbb{P}^2$)

Lema: Grupa $A^1(X)$ klasa divizora na X ima rang 2 i generirana je nad $\mathbb{Q}$ s α i β. Presječni brojevi ovih klasa s γ i φ su dani sljedećom tablicom.

$$\begin{array}{c|cc} & \alpha & \beta \\ \hline \gamma & 1 & 2 \\ \varphi & 2 & 1 \end{array}$$

Dokaz: .... kasnije

Klasa konika koji tangiraju D:

Iz prethodne leme slijedi da je

$$\xi = p\alpha + q\beta \in A^2(X) \otimes \mathbb{Q} \quad \text{za}$$

klasa $[Z_D]$

neke $p, q \in \mathbb{Q}$.

Kad smo naivno pokušavali riješiti ovaj problem vidjeli smo da je restrikcija divizora Z_D na U hiperploha stupnja 6

$$\Rightarrow \deg \xi\gamma = p + 2q = 6$$

Budući da je ξ simetričan u α i β slijedi da je $\xi = 2\alpha + 2\beta \in A^2(X) \otimes \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \deg(\xi^5) = 32 \deg(\alpha+\beta)^5$$

Trebamo još izračunati $\deg \alpha^{5-i}\beta^i \in A^5(X)$ za $i = 0, \dots, 5$. Zbog simetrije ($\deg \alpha^i\beta^j = \deg \alpha^j \beta^i$)

dovoljno je to izračunati za $i=0,1$ i 2.

Trik je u tome da računanje presjeka divizora na X možemo reducirati do računanja presjeka na $\mathbb{P}^5$. Već od ranije znamo da projekcija $X \longrightarrow \mathbb{P}^5$ na prvi faktor restringirana na glatke konike (ranga 3) daje izomorfizam. Isto vrijedi i ako se restringiramo na potpune konike (C, C') gdje je rang $C \geq 2$ - jer se preslikavanje $U \to \mathbb{P}^{5*}$ koje glatku koniku C preslikava u njen dual proširuje do regularnog preslikavanja na $U_1 = \{(C, C') : \text{rang } C \geq 2\}$ tako da koniku $C = L \cup M$ ranga 2 preslika na dvostruki pravac $2p^* \in \mathbb{P}^{5*}$ gdje je $p = L \cap M$.

Budući da sve konike koji prolaze kroz

tri generičke točke imaju rang ≥ 2

presjeci koji razmatram se nalaze u U_1.

$\alpha^5, \alpha^4\beta, \alpha^3\beta^2$.

$\alpha = [A_p]$ ... konike kroz p

α^3 ... konike kroz 3 generičke točke

1°) $i=0 \rightsquigarrow \alpha^5$

postoji jedinstvena kvadrika koja prolazi kroz 5 generičkih točaka.

$\Rightarrow \deg(\alpha^5) = 1$

$\alpha = [A_p] = \{(C, C') : p \in C\}$

α^5 ... konike kroz 5 generičke točaka.

2°) $i=1 \rightsquigarrow \alpha^4\beta$

β ... $B_L = \{(C, C^*) : L \in C^*\} \rightsquigarrow$ pravac L tangira koniku C

$\alpha^4\beta$ ... konike kroz 4 točke koji tangiraju L

1 dim prostor.

Koliko ih ima?

Promotomo preslikavanje koje točki p pravca $L \simeq \mathbb{P}^1$ pridruži element iz $\mathbb{P}^1$ koji odgovara konici iz familije konika koje prolaze kroz 4 generičke točke i još kroz točku p.

To je preslikavanje stupnja 2 s $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ pa prema Riemann-Hurwit. formuli mora imati dvije točke ramifikacije — te točke odgovaraju elementu familije koji tangiraju L

$\Rightarrow \deg \alpha^4 \beta = 2$

30) $i=2$ ... $\alpha^3 \beta^2$ ... koliko ima konika kroz 3 generičke točke koje tangiraju dva generička pravca?

Promotrimo jednodimenzionalnu familiju konika koje prolaze kroz tri generičke točke i tangiraju prvi generički pravac. ⇝ to je konika u $\mathbb{P}^5$

d.z. ↗

Konike koje tangiraju drugi pravac ⇝ hiperploha stupnja 2

$$\Rightarrow \deg(\alpha^3\beta^2) = 4$$

Sada računamo:

$$\deg((\alpha+\beta)^5) = \binom{5}{0} + 2\cdot\binom{5}{1} + 4\binom{5}{2} + 4\binom{5}{3} + 2\binom{5}{4} + \binom{5}{5}$$

$$= 102$$

$$\Rightarrow \deg \xi^5 = 2^5 \cdot 102 = 3264$$

Teorem Postoji 3264 ravninskih konika koji tangiraju pet generičkih ravninskih konika..