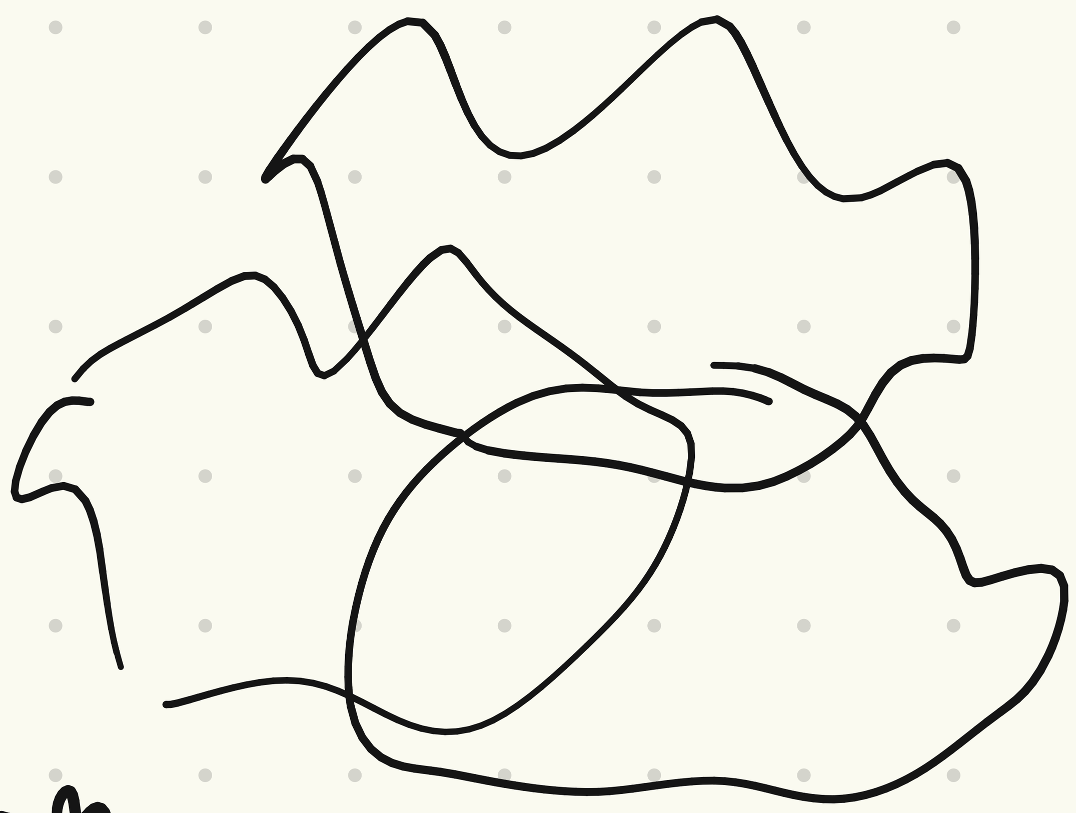
Ljepljenje shema

Glatka mnogostrukost



dobivamo lijepljenjem
otvorenih podskupova od $\mathbb{R}^n$

Sheme = lijepljenje kopija otvorenih afinih shema

Primjer: dvije kopije afinog pravca nad poljem k ... $k[x]$ (ili općenito nad R)

otvoren podskup = odbaci ishodište.

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k[y] & & \operatorname{Spec} k[x] \\
& \operatorname{Spec} k[x, x^{-1}] \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k[x] \arrow[dr] & & k[x] \arrow[dl] \\
& k[x, x^{-1}] &
\end{tikzcd}$$

Morfizmi:

diferenc. mnogostrukosti

neprekidno preslikavanje $\varphi: M \to N$ dif. mnog. je diferenc. ako i samo ako za svaku dif. fju. f na otvorenom $U \subset N$ pullback $\varphi^{\#} f := f \circ \varphi$ je dif. fja na $\varphi^{-1} U \subset M$.

U jeziku snopova, nepr. $\varphi: M \to N$ inducira preslikavanje snopova na N

$$\varphi^{\#}: \mathcal{C}(N) \to \varphi_* \mathcal{C}(M)$$

koje nepr. fju. $f \in \mathcal{C}(N)(U)$ preslika u

$$f \circ \varphi \in \mathcal{C}(M)(\varphi^{-1}(U)) = (\varphi_* \mathcal{C}(M))(U)$$

Tj. diferenc. preslikavanje $\varphi: M \to N$ se može definirati kao neprek. preslikavanje t.d. inducirano preslikavanje

$\varphi^\#$ preslikava podsnop $\mathcal{C}^\infty(N) \subset \mathcal{C}(N)$ u podsnop $\varphi_*\mathcal{C}^\infty(M) \subset \varphi_*\mathcal{C}(M)$, tj. zahtijevamo komutativni dijagram

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(N) \arrow[r, "\varphi^\#"] & \varphi_*\mathcal{C}(M) \\
\mathcal{C}^\infty(N) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\varphi^\#"] & \varphi_*\mathcal{C}^\infty(M) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Ovu ideju želimo generalizirati na sheme (gdje ćemo $\mathcal{C}^\infty(N)$ i $\mathcal{C}^\infty(M)$ zamijeniti s $\mathcal{O}_X$ i $\mathcal{O}_Y$).

Da bi to funkcioniralo moramo specificirati i neprekidno presl. $\varphi : X \to Y$ na top. prost. kao i pullback $\varphi^\# : \mathcal{O}_X \to \varphi_* \mathcal{O}_Y$.

moraju biti usklađeni; kako?

Prirodno je zahtijevati da vrijednost od $f \in \mathcal{O}_Y(U)$ u $q \in U \subset Y$ je ista kao i vrijednost od $\varphi^\# f \in \varphi_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X[\varphi^{-1} U)$ u točki $p \in \varphi^{-1} U \subset X$ koja se preslika u q (tako je definicija funkcoriala za dif. mnogostr.) no ovdje to nema smisla jer te dvije vrijednosti ne leže u istom polju. No sljedeće ima smisla

Definicija: Morfizam između shema X i Y je par $(\varphi, \varphi^\#)$ gdje je $\varphi : X \to Y$ neprekidno presl. top. prostor. i

$$\varphi^\# : \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X \quad \text{je preslik.}$$

snopova na Y za koji vrijedi:

$\forall p \in X$ i $\forall$ otvorena okolin. U od $q = \varphi(p)$ u Y

$f \in \mathcal{O}_Y(U)$ se poništava u q

ako i samo ako $\varphi^\# f \in \varphi_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}U)$

se poništava u p.

Posljednji uvjet se može ovako reformulirati u terminima lokalnih prstenova.

Preslikavanje snopova $\varphi^\#: \mathcal{O}_Y \to \varphi_* \mathcal{O}_X$

inducira preslikavanje vlati

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{Y,q} = \varinjlim\limits_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_Y(U) \arrow[r] & \varinjlim\limits_{q \in U \subset Y} \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}U) \arrow[dl] \\
\varinjlim\limits_{p \in V \subset X} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,p} &
\end{tikzcd}
$$

$f \in \mathcal{O}_Y(U)$ se poništava u q ako i samo ako

$\varphi^\# f$ se poništava u p je ekvivalentno

tome da $\varphi^\#: \mathcal{O}_{Y,q} \to \mathcal{O}_{X,p}$ preslikava

maksimalni ideal $m_{Y,q}$ u $m_{X,p}$, tj.

$\varphi^\#$ je lokalni homomorfizam lokalnih

prstenova.

Imamo sljedeće karakterizaciju morfizma

u afine sheme:

Teorem: Za bilo koju shemu X i prsten R

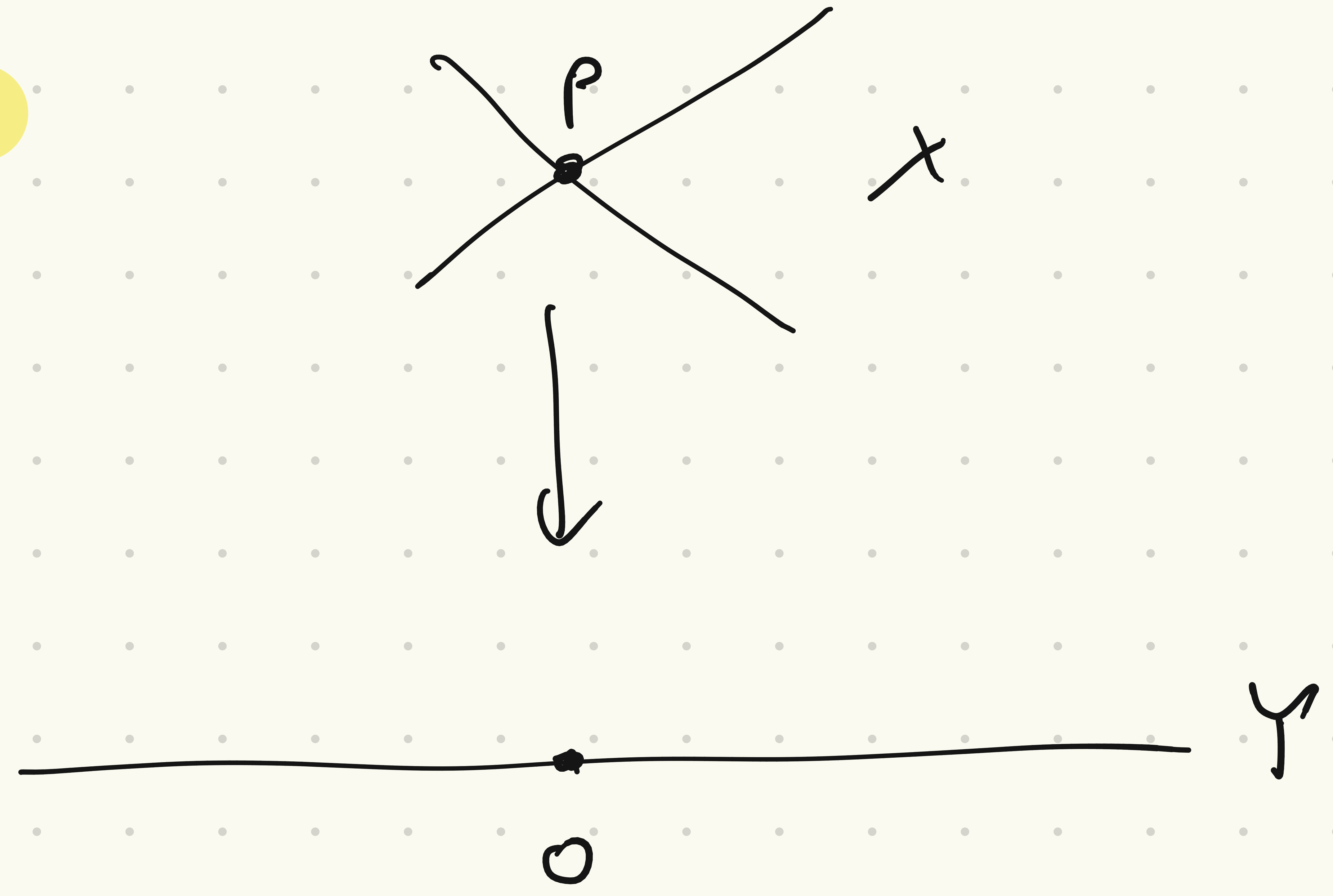
morfizmi $(\varphi, \varphi^\#): X \to \operatorname{Spec} R$

su u 1:1 korespodenciji s homom.

prstenova $\varphi: R \to \mathcal{O}_X(X)$ preko preslikavanja

$$\varphi = \varphi^\#(\operatorname{Spec} R): R = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R}(\operatorname{Spec} R)$$
$$\to \varphi_*(\mathcal{O}_X)(\operatorname{Spec} R) = \mathcal{O}_X(X)$$

Primjer 1:



Neka je $\varphi : X \to Y$ preslikavanje afinih shema kao na slici. Precizније

$X = \operatorname{Spec} K[x,u]/(xu)$ je unija dva pravca koji se sijeku u točki $p = (x,u)$

dok je $Y = \operatorname{Spec} K[t]$ pravac. Preslikavanje je dano s

$$K[t] \to K[x,u]/(xu)$$
$$t \mapsto x + u$$

—

Općenito, ako je $\psi : Y \to X$ morf. afinih shema $X = \operatorname{Spec} R$ i $Y = \operatorname{Spec} T$ i ako je X' zatvorena podshema od X def. s idealom $I \subset R$, tada definiramo praslika $\varphi^{-1}X'$ od φ

nad X' kao zatvorenu podshemu od Y

definiranu s idealom $\varphi(I)T$ u T

Ako je X' zatvorena točka p od X onda

$\varphi^{-1}p$ zovemo vlakno nad X'.

—

U primjeru 1. neka je $q_a = (t-a)$, $a \neq 0$

točka. Tada je vlakno definirano idealom

$$(x+u-a)\, K[x,u]/(xu)$$

odnosno prstenom $K[x]/(x(x-a)) \cong K \times K$

Dok je vlakno nad q_0 dano s

$$\operatorname{Spec} K[x]/(x^2).$$

Lijepljenje shema

Pretp. da je dana familija shema

$\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ i otvoren skup $X_{\alpha\beta} \subset X_\alpha$

$\forall \beta \neq \alpha$ iz I. Pretp. da je dana

familija izom. shema.

$$\varphi_{\alpha\beta} : X_{\alpha\beta} \to X_{\beta\alpha} \quad \forall \alpha \neq \beta \text{ u } I$$

t.d. $\varphi_{\beta\alpha} = \varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ $\forall \alpha, \beta$ i

$$\varphi_{\alpha\beta}(X_{\alpha\beta} \cap X_{\alpha\gamma}) = X_{\beta\alpha} \cap X_{\beta\gamma}$$

$\forall \alpha, \beta$ i γ i

$$\varphi_{\beta\gamma} \circ \varphi_{\alpha\beta}|_{(X_{\alpha\beta} \cap X_{\alpha\gamma})} = \varphi_{\alpha\gamma}|_{(X_{\alpha\beta} \cap X_{\alpha\gamma})}$$

Tada možemo definirati shemu X

lijepljenjem X_α duž $\varphi_{\alpha\beta}$ — postoji jedinstvena shema X pokrivena otvorenim podshemama izomorfnim s X_α t.d. identifik. na presjek. $X_\alpha \cap X_\beta \subset X$ odgovara izomorfizmu $\varphi_{\alpha,\beta}$.

Primjer ljepljenja duž otvorenog skupa

Neka su X_1, X_2 sheme i $U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$ otvoreni podskupovi. Neka je

$$\varphi : (U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \to (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$$

izomorfizam lokalnih oprstenjenih prostora. Tada možemo "zalijepiti" sheme X_1 i X_2 duž φ. **Definirajmo**

$$X := X_1 \sqcup X_2 / \sim \quad \text{gdje}$$

disj. unija

identificiramo $x_1 \sim \varphi(x_1)$ $\forall x_1 \in U_1$

Topologija na X: Neka su

$i_1 : X_1 \hookrightarrow X$ i $i_2 : X_2 \hookrightarrow X$ ulaganja.

Tada je $V \subseteq X$ otvoren ako i samo ako su $i_1^{-1}(V)$ i $i_2^{-1}(V)$ otvoreni.

Strukturni snop $\mathcal{O}_X$:

za $V \subset X$ otvoren

$$\mathcal{O}_X(V) := \Big\{ (s_1, s_2) : s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)),\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)) \text{ t.d. } s_1|_{i_1^{-1}(V) \cap U_1} = \varphi^{\#}\big(s_2|_{i_2^{-1}(V) \cap U_2}\big) \Big\}$$

Primjeri: $\mathbb{P}^1$ i afina pravac s dvostrukim ishodištem

$X_1 = \operatorname{Spec}(k[t])$

$X_2 = \operatorname{Spec}(k[u])$

afini pravci

$U_1 \subset X_1$, $U_2 \subset X_2$

$U_1 = \operatorname{Spec}(k[t, t^{-1}])$, $U_2 = \operatorname{Spec} k[u, u^{-1}]$

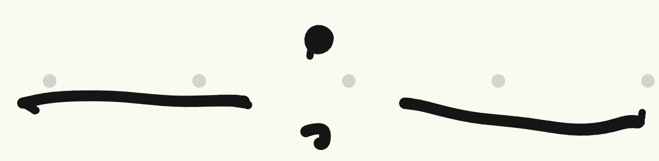
pravci bez ishodišta

izomorfizmi ljepljenja: $U_1 \to U_2$

a) slučaj $\mathbb{P}^1$; $k[u,u^{-1}] \to k[t,t^{-1}]$

$u \mapsto t^{-1}$

b) slučaj dvostruka ishodišta:

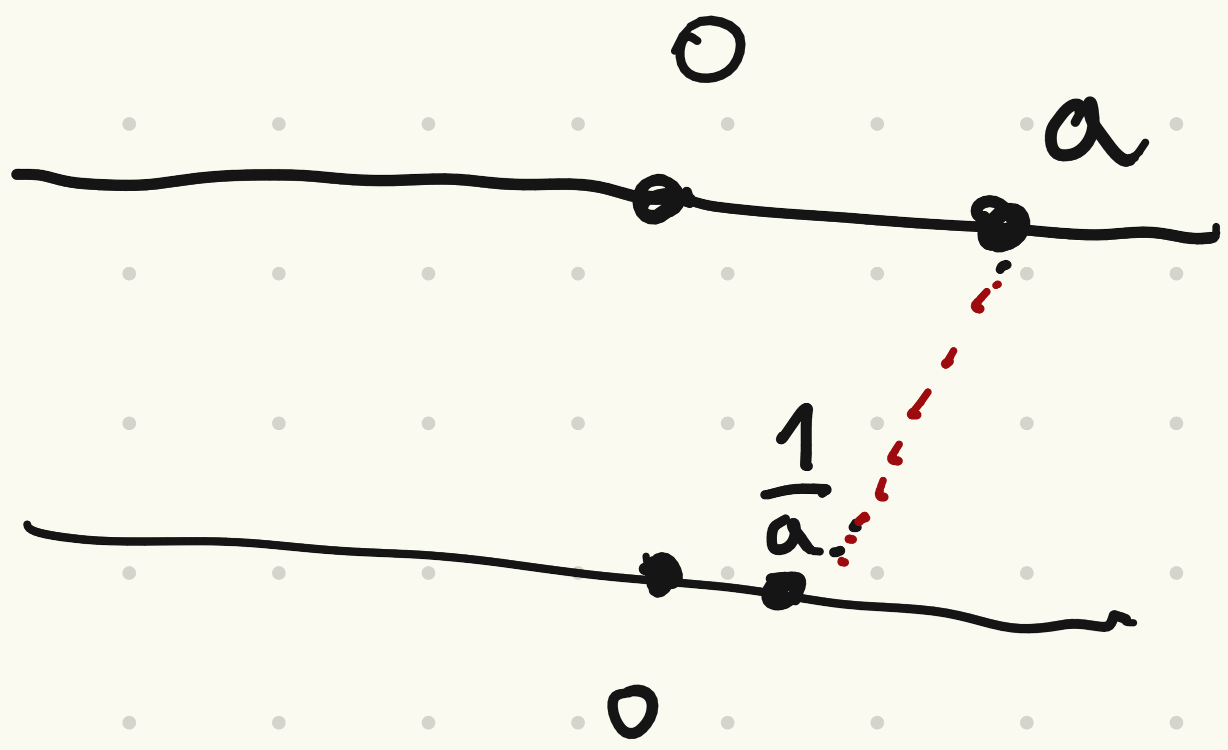


$k[u,u^{-1}] \to k[t,t^{-1}]$

$u \mapsto t$

(zatvorene)

a) točke od $\mathbb{P}^1$; $X = X_1 \sqcup X_2 /\sim$



- kao skup, $\mathbb{P}^1$ je jedan afin pravac + ishodište drugog pravca (koju zovemo točka u ∞)

jer zbog gornje identifikacije okolina $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$ drugog pravca odgovara okolini

ishodišta

$\langle -\infty, -\frac{1}{\varepsilon} \rangle \cup \langle \frac{1}{\varepsilon}, +\infty \rangle$

"točke u ∞".

Strukturalni snop od $\mathbb{P}^1$

Neka je $V \subset X$ otvoren. Def. $V_1 = V \cap X_1 = i_1^{-1}(V)$ i $V_2 = V \cap X_2 = i_2^{-1}(V)$.

Tada je po def. lijepljenja

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(V) = \{ (f(t), g(u)) \text{ gdje su } f(t) \in \mathcal{O}_{X_1}(V_1) \text{ i } g(u) \in \mathcal{O}_{X_2}(V_2) \text{ t.d. } f(t) = g(t^{-1}) \text{ na } V_1 \cap V_2 \}$$

Posebno, globalni presjeci snopa $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1)$ su parovi $(\underset{k[t]}{\underset{\in}{f(t)}}, \underset{k[u]}{\underset{\in}{g(u)}})$ t.d. $f(t) = g(t^{-1})$

$\Downarrow$

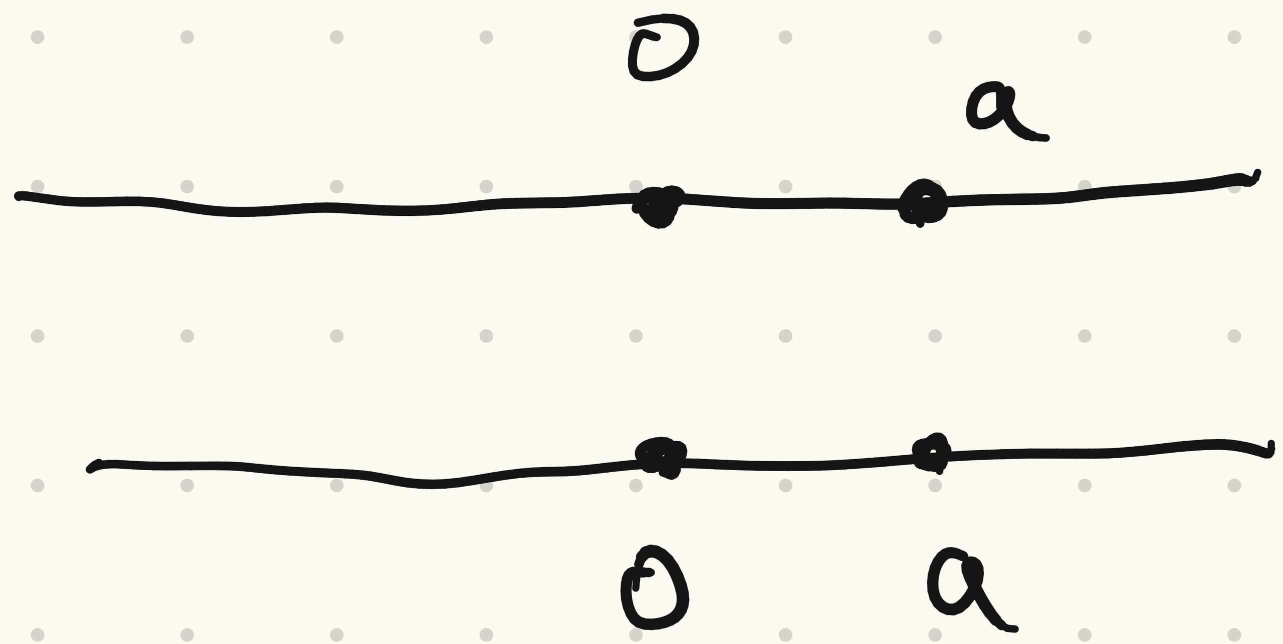
$f = g =$ konstanta.

$$\Rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbb{P}^1) = k$$

b) afin pravac s dvostrukim ishodištem

ovdje lijepimo po morfizmu $k[u,u^{-1}] \to k[t,t^{-1}]$

$u \mapsto t$



pravci bez ishodišta

$$X = X_1 \sqcup X_2 /\sim$$

Kao prostor X je pravac, npr. X_1 + ishodište pravca X_2. Ishodišta pravaca X_1 i X_2 imaju jednake okoline.

$\rightsquigarrow$ 

dvostruko ishodište

U ovom slučaju globalni presjeci strukturnog snopa su parovi $(f(t), g(u))$ gdje

$$f(t) \in k[t] = \mathcal{O}_{X_1}(X_1) \quad \text{i} \quad g(u) \in k[u] = \mathcal{O}_{X_2}(X_2)$$

t.d. se $f(t)$ i $g(u)$ podudaraju na presjeku

tj. $f(t) = g(t)$ u $k[t,t^{-1}]$ odnosno

$f(t) = g(t)$ u $k[t]$.