Neka je X glatka mnogostrukost nad poljem $k=\bar{k}$ i neka je $\mathcal{L}$ kvazi-koherentan snop na X. Cilj nam je razumjeti konstrukciju svežnja glavnih dijelova

$$\mathcal{P}^n(\mathcal{L}) = \pi_{2*}\left(\pi_1^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X\times X} / \mathcal{I}^{n+1}\right)$$

gdje su $\pi_1, \pi_2 : X\times X \to X$ dvije projekcije i $\mathcal{I}$ ideal dijagonale u $X\times X$.

Krenimo s Taylorovim razvojem funkcije ...

Kako algebraizirati Taylorov red

$$f(a+t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} t^i \quad ?$$

Neka je $k[[t]] = k \oplus kt \oplus kt^2 \oplus \dots$ prsten formalnih redova. Tada je formalni red polinoma $f(x)\in k[x]$ u $x=a$

$$f(a+t) \in k[[t]] \, .$$

Mlaz kao trunkacija

(eng. jet)

Često nas ne zanima cijeli razvoj nego npr. samo derivacije 1-og reda, ..., n-tog reda.

Def.: (prsten dualnih brojeva n-tog reda)

$$k[t]/(t^{n+1}) = k \oplus kt \oplus \dots \oplus kt^n \, ; \, t^{n+1} = 0$$

Taylorov polinom n-tog reda je slika od $f(a+t)$ u $k[t]/(t^{n+1})$

tj. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} t^i$

Ovo možemo reformulirati preko preslikavanja k-algebri. Neka je $X = \operatorname{Spec} k[x]$ i $S = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[x]$.

Točka $a \in X(k)$ je morfizam k-algebri

$$p : S \to k \; ; \; x \mapsto a$$

Def. Mlaz stupnja n u a je morfizam k-algebri

$$\varphi : S \to k[t]/(t^{n+1}) \quad \text{t.d.}$$

$$\varphi \bmod t = p \quad \text{tj.}$$

$$\varphi(x) = a + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t^i \; ; \; \alpha_i \in k$$

Za $f(x) \in k[x]$, $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ možemo interpretirati kao Taylorov razvoj od f duž mlaza φ.

Primjer: Za $n=1$ i $\varphi(x) = a+t$

$\varphi(f(x)) = f(a+t)$ je uobičajeni Taylorov razvoj.

Primjer: za $n=1$, općenito neka je

$$\varphi : S \to A[t]/(t^2) \qquad 1\text{-mlaz}$$

A i S su proizvoljne k-algebre.

općenito $\mathcal{J}^n_X(A) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\left(S, A[t]/(t^{n+1})\right)$

gdje je $X = \operatorname{Spec} S$ i $S = k$-alg. i

A je k-alg.

φ možemo napisati kao

$$\varphi(f) = c_0(f) + c_1(f)t$$

Preslikavanje $\delta : S \to A$ i $\delta(f) = c_1(f)$

je k-linearna derivacija u točki $p(f) = c_0(f)$

- $\delta(af + bg) = a\,\delta(f) + b\,\delta(g)$

$$p : S \to A$$

- $\delta(fg) = c_1(fg) = $ coeff. uz t od $(c_0(f)+c_1(f)t)(c_0(g)+c_1(g)t)$

$$= p(f)\cdot\delta(g) + \delta(f)\,p(g)$$

δ djeluje na A preko preslikavanja p

$\rightarrow$ tako def. strukturu S-modula na A

Za $S=k[x]$ i $A=k$ vidimo da je $p(f)$ evaluacija od f u točki p pa je δ uobičajena derivacija u točki p.

Vidimo da za svaki 1-mlaz φ ima smisla $\varphi(f)$ zvati Taylorov polinom od f (u odnosu na derivaciju δ). Slično vrijedi i za n-mlazove gdje preostale koef. možemo interpretirati preko derivacija višeg reda.

Ova razina općenitosti je nužna jer općenito nemamo kanonski odabrane derivacije preko kojih ćemo definirati Taylorov polinom.

n-mlazovi definiraju predsnop

Neka je X mnogostrukost nad k (ili k-shema).

Za $U \subset X$ Zariski otvoren skup definiramo i $U = \operatorname{Spec} S$

$$J^n_X(U) = \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\Big(\overset{\Gamma(U,\mathcal{O}_X)}{\overset{\shortparallel}{S}}, \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[t] / (t^{n+1})\Big)$$

što definira predsnop.

Je li ovaj predsnop snop?

Dat ćemo potvrdan odgovor na ovo pitanje bez lijepljenja.

Česta ideja u alg. geometriji — pokazat ćemo da je predsnop reprezentabilan.

nepotrebno

Def: Mjesto (eng. site) je uređeni par $(\mathcal{C}, \mathcal{J})$ kategorije $\mathcal{C}$ i Grothendieckove topologije na $\mathcal{C}$.

za svaki objekt U specificiramo familiju preslikavanja $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$ koje zovemo natkrivanje od U t.d.

1. Svaki izomorfizam $V \simeq U$ je natkrivanje $\{V \to U\}$.

2. Ako je $\{U_i \to U\}$ natkrivanje i $V \to U$ morfizam, onda fiber product $U_i \times_U V$ postoji i

$$\{U_i \times_U V \to V\}_{i \in I} \text{ je}$$

nakrivanje od V

$\nwarrow$ nepotrebno

3. Ako je $\{U_i \to U\}$ natkrivanje i za svaki i $\{V_{ij} \to U_i\}$ je natkrivanje onda kompozicije $\{V_{ij} \to U\}$ su natkrivanje

Primjer: (small Zariski site)

C = otvorene podskupove od X

J = uobičajena otvorena natkrivanja

1. $\{U_i \to U\}$ je natkrivanje ako i samo ako

$$\cup U_i = U$$

Mjesta "služe" da bi se na njima definirali snopovi....

Def. Za mjesto (C, J) kažemo da je subkanonsko (eng. subcanonical) ako je svaki reprezentabilni predsnop na kategoriji C snop za Groth. top. J.

nepotrebno

kontravarijantan funktor.

$$h_X : C^{op} \to Sets$$

$$h_X(U) = \mathrm{Hom}_C(U, X) \quad \forall U \in C$$

Propozicija: Zariskijevo mjesto (Zariski site) je subkanonsko.

Pokažimo onda da je funktor J_X^n reprezentabilan ako je X glatka.

Prisjetimo se:

$$J_X^n(U) := \mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\left(\mathcal{O}_X(U),\ \mathcal{O}_X(U)[t]/(t^{n+1})\right)$$

Trebamo pokazati da postoji k-shema Y i morfizam $p: Y \to X$ takva da je $J_X^n(U)$ prirodno izomorfan s $\mathrm{Hom}_{X\text{-shema}}(U, Y)$

Pretp. prvo da je $X = \operatorname{Spec} A$. glatka, k-alg.

Definirajmo $P^n_{A/k} := A \otimes_k A / I^n$

gdje je $I = \ker(\mu : A \otimes A \to A)$ i acetl-sub.

Budući da je A glatka nad k, $P^n_{A/k}$ je konačno generirani projektivni A-modul.

ključni izomorfizam

Propozicija: Postoji prirodni izomorfizam između skupa

$$\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}\left(A, A[t]/(t^{n+1})\right), \qquad A[t]/(t^{n+1}) = A \otimes k[t]/(t^{n+1})$$

i A-modula A-linearnih homomorf.

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}\left(P^n_{A/k}, A\right).$$

"Dokaz:" Promotrimo prvo $\mathrm{Hom}_{k\text{-alg}}(-)$.

Neka je $\phi : A \to A \otimes_k k[t]/(t^{n+1})$ morfizam k-algebri. Tada

$$\phi(a) = \sum_{i=0}^{n} \phi_i(a) \otimes t^i \quad \text{gdje je}$$

$\phi_i : A \to A$ k-linearna preslikavanja. Uvjet da je ϕ morfizam algebri daje razna ograničenja na ϕ_i, npr. $\phi_0(ab) = \phi_0(a)\phi_0(b)$ i

$$\phi_1(ab) = \phi_0(a)\phi_1(b) + \phi_1(a)\phi_0(b), \ldots$$

Niz k-linearnih preslikavanja $(\phi_0, \dots, \phi_n)$

koji zadovoljavaju te uvjete je ono što je

Grothendieck nazvao k-diferencijalni operator

n-tog reda. Oznaka: $\mathrm{Diff}_k^n(A, A)$

Promotrimo $\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(P^n_{A/k}, A)$.

A-modul: $c(a \otimes b \bmod I^{n+1}) = ca \otimes b \bmod I^{n+1})$

Definirajmo kanonsko k-linearno preslikavanje

$d_n : A \to P^n_{A/k}$; $d_n(a) = 1 \otimes a \bmod I^{n+1}$

- to je univerzalni k-diferenc. operator reda

  n iz $A \to A$ jer vrijedi:

  za svaki A-modul M i svaki k-dif.

  operator reda n, $D : A \to M$, postoji

  jedinstveni homom. A-modula

  $h : P^n_{A/k} \to M$ t.d. $D = h \circ d_n$

Univerzalno svojstvo daje kanonski izomorfizam

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(P^n_{A/k}, M) \simeq \mathrm{Diff}^n_k(A, M)$$

Pa za $M = A$ tvrdnja slijedi.

Ključ je dakle u definiciji diferencijalnog operatora.

Def 1. Neka je $D : A \to A$ k-linearno preslikavanje. Za $b \in A$ def. $m_b(x) = bx$. Komutator od D s m_b, $[D, m_b] : A \to A$ se definira

$$[D, m_b](x) = D(m_b(x)) - m_b(D(x)) = D(bx) - bD(x).$$

Red od D definiramo induktivno:

- red je $-1 \iff D = 0$
- za $n \geq 0$, red od D je $\leq n$
$$\iff$$
$\forall b \in A$, $[D, m_b]$ je k-dif. operator reda $\leq n-1$

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{Diff}^n_k(A, A)$ ... operatori reda n

Preostaje još pokazati univerzalno svojstvo operatora ... EGA ...

Jednom kada imamo "ključni izomorfizam" nije teško vidjeti kako definirati X-shemu Y.

Želimo da X-shema Y ima svojstvo da $\mathrm{Hom}_{X\text{-shema}}(X, Y)$ su u prirodnoj bijekciji s $\mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(P^n_{A/k}, A)$.

Ako je $Y = \mathrm{Spec}(B_Y)$ za neku A-algebru B_Y onda $\mathrm{Hom}_{X\text{-sh}}(X, Y)$ odgovara homom. A-algebri $B_Y \to A$, pa "naivni" pokušaj definiciji gdje za B_Y uzmemo $P^n_{A/k}$ nije dobar jer nama trebaju morfizmi A-modula.

Dakle, $\mathbb{P}^n_{A/k}$ trebamo zamijeniti sa simetričnom algebrom $\mathrm{Sym}_A(\mathbb{P}^n_{A/k})$ koja ima sljedeće univerzalno svojstvo:

u našem slučaju $M = \mathbb{P}^n_{A/k}$

Za svaku komutativnu A-algebru C, homomorfizmi A-algebri $\varphi : \mathrm{Sym}(M) \to C$ su jednoznačno određeni s homom. A-modula $f : M \to C$ i obratno $f : M \to C$ se jedinstveno proširi do homom. A-alg. $\varphi : \mathrm{Sym}_A(M) \to C$.

tj. $\mathrm{Hom}_{A\text{-alg}}(\mathrm{Sym}_A(M), C) \simeq \mathrm{Hom}_{A\text{-mod}}(M, C)$.

$\Rightarrow Y = \mathrm{Spec}\,(\mathrm{Sym}_A(\mathbb{P}^n_{A/k}))$

(ili Spec_A da bi naglasili da je $Y \to X$ X-shema).

Kako se Sym_A definira?

Neka je M A-modul. Ideja je da je $\mathrm{Sym}_A(M)$ "najslobodnija" A-algebra generirana s A-modulom M.

Konstrukcija:

nije komutativna

1. Neka je $T_A(M)$ tenzorska algebra

$$= \bigoplus_{n\geq 0} M^{\otimes_A n}$$

2. Za komutativnost kvocijentiramo s dvostranim idealom I_S generiranim s elementima oblika $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$

$\forall m_1, m_2 \in M$

Def. $\mathrm{Sym}_A(M) = T_A(M) / I_S$.

Primjer: Ako je M slobodni A-modul s bazom

$\{e_1,..., e_r\}$ onda je njegova simetrična algebra izomorfna polinomijalnom prsten $A[x_1,..., x_r]$.

Nije teško vidjeti da Sym_A ima traženo univerzalno svojstvo.

Za ne-afinu k-shemu X, $P^n_{X/k}$ možemo zamijeniti sa kvazi-koherentnim snopom $\mathcal{O}_X$-modula na X

$$P^n_{X/k} = \Delta^*\left(\mathcal{O}_{X\times_k X} / I_\Delta^{n+1}\right)$$

gdje je $\Delta : X \to X \times_k X$ diag. morfizam sa snopom ideala I_Δ.

Sada definiramo $Y = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathrm{Sym}_{\mathcal{O}_X}(P^n_{X/k})\right)$.