

Neka je X glatka mnogostrukost nad poljem k -to i neka je $\mathcal{L}$ kvazi-kohherentni snop na X . Cilj nam je razumjeti konstrukciju svežnja glavnih čiglova

$$\mathcal{I}^m(\mathcal{L}) = \pi_{2*}(\pi_1^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X \times X} / \mathcal{I}_{m+1})$$

gdje su $\pi_1, \pi_2: X \times X \rightarrow X$ dupli projektori i $\mathcal{I}$ ideal diagonale u $X \times X$.

Krenimo s Taylorovim razvojem funkcije ...

Kako algebrizirati Taylorov red

$$f(a+t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} t^i \quad ?$$

Neka je $k[[t]] = k \oplus kt \oplus kt^2 \oplus \dots$

prsten formalnih redova. Tada je

formalni red polinoma $f(x) \in k[x]$ u $x=0$

$$f(a+t) \in k[[t]]$$

Mlaz kao trumkacija

(eng. jit)

Često nas ne zanimaju cijeli razvoji nego npr. samo derivacije 1-og reda, ..., n -tog reda.

Def.: (prostor dualnih bazeja n -tog reda)

$$k[t] / (t^{n+1}) = k \oplus kt \oplus \dots \oplus kt^n; \quad t^{n+1} = 0$$

Taglov polinom n -tog reda je sljedeći

od $f(a+t)$ u $k[t] / (t^{n+1})$

$$t \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} t^i$$

Ovo možemo reformulirati preko preslikavanja

k -algebri. Neka je $X = \text{Spec } k[x]$

$$i: S = \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k[x],$$

Točka $a \in X(k)$ je morfizem k -algebry

$$p: S \rightarrow k \quad ; \quad x \mapsto a$$

Def. Mlaza stupnja n a a je morfizem k -algebry:

$$\varphi: S \rightarrow k[t]/(t^{n+1}) \quad \text{t.j.}$$

$$\varphi \bmod t = p \quad \text{t.j.}$$

$$\varphi(x) = a + \sum_{i=1}^n \alpha_i t^i \quad ; \quad \alpha_i \in k$$

Za $f(x) \in k[x]$, $\varphi(f(x)) = f(\varphi(x))$ možemo interpretirati kao Taylorov razvoj od f duž mlaza φ .

Primer: Za $n=1$ i $\varphi(x) = a + t$

$\varphi(f(x)) = f(a+t)$ je uobičajeni Taylorov razvoj.

Prímjer: Za $n=1$, općenito neka je

$$\varphi: S \rightarrow A[t]/(t^2) \quad 1 - \text{mlaz}$$

A i S su prazdnim k -algebama.

općenito $J_X^n(A) = \text{Hom}_{k\text{-alg}}(S, A[t]/(t^{n+1}))$

gdje je $X = \text{Spec } S$; $S = k\text{-alg}$ i

A je $k\text{-alg}$.

φ možemo napisati kao

$$\varphi(t) = c_0(t) + c_1(t)t$$

Preslikavanja $\delta: S \rightarrow A$; $\delta(t) = c_1(t)$

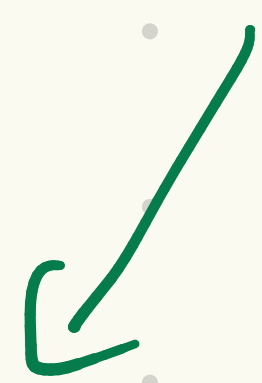
je k -linearna derivacija u točku $p(t) = c_0(t)$

$$\bullet \delta(at + by) = a\delta(t) + b\delta(y)$$

$$\downarrow$$
$$p: S \rightarrow A$$

$$\bullet \delta(fg) = c_0(fg) = \text{coeff. uz } t \text{ od } (c_0(f) + c_1(f)t + \dots + c_n(g) + c_{n+1}(g)t + \dots)$$

$$= p(f) \cdot \delta(g) + \delta(f) p(g)$$



S djeluje na A preko preslika vani p

$\rightarrow$ tako def. strukturu S -modula na A

Za $S = k[x]$ i $A = k$ vidimo da je

$p(f)$ evaluacija od f u točki p pa je

δ uobičajena derivacija u točki p .

Vidimo da za neki 1-malen ℓ imamo sumu $\ell(f)$ zaobiš Taylorov polinom od f (u odnosu na derivaciju δ).

Slično vrijedi i za n -mlazove gdje preostale kvief. moduli interpretiraju preko derivacija višeg reda.

Ova razina općenitosti je nažalost
 općenito nemam kamonda odrediti serijicu
 preko kojih ćemo definirati Taylor polinom.

n -mlazni definicija presnopa

Neka je X mnogostrukost nad k
 (ili k -shema).

Za $U \subset X$ zanishi otvoreni skup

definiramo: $U = \text{Spec } S$

$$\mathcal{I}_X^n(U) = \text{Hom}_{k\text{-alg}} \left(S'', \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[t] \right) / (f_{n+1})$$

$\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$
 $\parallel$

što definiramo presnop.

Je li ovaj presnop snop?

Dat čemo potrditi odgovor na to
pitanje brez lizipljanja.

Česta ideja v alg. geometriji —
pokazati čemo da ji pravo
reprezentabilan.

ne potrebuje

Def: Mjesto (emg-sita) je urejeni
par $(C, \mathcal{I})$ kategoriji C i
Grothendieckova topologija na C .

za svaki objekt U specifičnim

familijski preslikavanja $\{U_i \xrightarrow{f_i} U\}_{i \in I}$

koji zajedno nadležuju od U t.d.

1. Svaki izomorfizam $V \cong U$ je nadležujući
 $\{V \rightarrow U\}$.

2. Ako je $\{U_i \rightarrow U\}$ natkrivenje i $V \rightarrow U$ morfizam, onda fiber produkt

$U_i \times_U V$ postoji i

$\{U_i \times_U V \rightarrow V\}_{i \in I}$ je nepotpuno

natkrivenje od V

3. Ako je $\{U_i \rightarrow U\}$ natkrivenje i za neki

$\{V_{i_f} \rightarrow U_i\}$ je natkrivenje onda

kompozicije $\{V_{i_f} \rightarrow U\}$ su natkrivenje

Primeri: (small Zariski site)

$\mathcal{C}$ = otvorene podskeme od X

$\mathcal{I}$ = uobičajeni otvoreni natkrivenji

4. $\{U_i \rightarrow U\}$ je natkrivenje ako i samo ako

$$\bigcup U_i = U$$

Mjestu "slučaj" da bi se na njima definirali
snopovi...

Def. Za mjesto (C, γ) kažemo

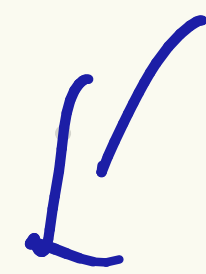
da je subkanonski (eng. subcanonical)

ako je svaki reprezentativni presjek
na kategoriji C snop za Groth.

top. j.



nepotrebno



kontinuiranosti funkcija.

$$h_x: C^{\text{op}} \rightarrow \text{Sets}$$

$$h_x(u) = \text{Hom}_C(u, x) \quad \forall u \in C$$

Propozicija: Zariskijev mjesto (Zariski site)
je subkanonski.

Pokažimo onda da je funkcija J_x^n reprezentabilna ako je X glatka.

Prisjetimo se:

$$J_x^n(U) := \text{Hom}_{k\text{-alg}}(\mathcal{O}_x(U), \mathcal{O}_x(U)[t]/(t^{n+1}))$$

Trebamo pokazati da postoji k -shema Y i morfe

takva da je $J_x^n(U)$ prirodno

izomorfno s $\text{Hom}_{X\text{-shem.}}(U, Y)$

$p: Y \rightarrow X$

Pretp. prvo da je $X = \text{Spec } A$, $\swarrow$ glatka, $\searrow$ k -alg.

Definirajmo $P_{A/k}^n := A \otimes_k A / I^n$

gdje je $I = \ker(\epsilon: A \otimes_k A \rightarrow A)$; uobičajeno.

Budući da je A glatka nad k , $P_{A/k}^n$ je konačno generirani projekt. A -modul.

Propozicija: Postoji prirodan izomorfizam
 između skupa $A \otimes k[t]/(t^{n+1})$

$$\text{Hom}_{\text{alg}}(A, A[t]/(t^{n+1}))$$

A -modulni A -linearni homomorfizmi.

$$\text{Hom}_{A\text{-mod}}(P_{A/k}^n, A).$$

Dokaz: Promotrimo prvo $\text{Hom}_{\text{alg}}(-)$.

Neka je $\phi: A \rightarrow A \otimes_k k[t]/(t^{n+1})$ morfizam

k -algebri. Tada

$$\phi(a) = \sum_{i=0}^n \phi_i(a) \otimes t^i \quad \text{gdje je}$$

$\phi_i: A \rightarrow A$ k -linearni preslikavanja. Uvjet

da je ϕ morfizam algebri daje razna ograničenja

na ϕ_i , npr. $\phi_0(ab) = \phi_0(a)\phi_0(b)$;

$$\phi_1(ab) = \phi_0(a)\phi_1(b) + \phi_1(a)\phi_0(b), \dots$$

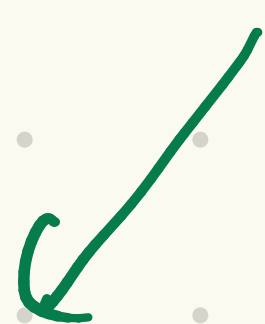
Niz k -linearnih preslikavanj $(\phi_1, \dots, \phi_n)$

koji zadovoljavaju te uslove i one su i

Grothendieck naziva k -diferencijalnim operatorima

n -tog reda. Označa: $\text{Diff}_k^n(A, A)$

Prostor $\text{Hom}_{A\text{-mod}}(P_{A/k}^n, A)$,



A -modul; $c(a \otimes b \text{ mod } I^{n-1}) = c a \otimes b \text{ mod } I^n$

Definirajmo kanonički k -linearni preslikavanje

$$d_n: A \rightarrow P_{A/k}^n, \quad d_n(a) = 1 \otimes a \text{ mod } I^n$$

- to je univerzalni k -diferencijalni operator reda

n iz $A \rightarrow A$ jer vrijedi:

za svaki A -modul M i svaki k -dif.

operator reda n , $D: A \rightarrow M$, postoji

jedinstveni homom. A -modulih

$$h: P_{A/k}^n \rightarrow M \quad \text{t.d.} \quad D = h \circ d_n$$

Univerzalna svojstva da je kanonski izomorfizam

$$\text{Hom}_{A\text{-mod}}(\mathcal{P}_{A/k}^n, M) \cong \text{Diff}_k^n(A, M)$$

Pa za $M=A$ tudi eni slučaj.

Ključ je dekle u definiciji diferencialnega operatora.

Def 1. Neka je $D: A \rightarrow A$ k -linearni preslikovanje.

Za $b \in A$ def. $m_b(x) = bx$. Komutator od D

s m_b , $[D, m_b]: A \rightarrow A$ se definira

$$[D, m_b](x) = D(m_b(x)) - m_b(D(x)) = D(bx) - bD(x).$$

Red od D definiramo induktivno:

$$\bullet \text{ red je } -1 \iff D=0$$

$$\bullet \text{ za } n \geq 0, \text{ red od } D \text{ je } \leq n$$

$$\iff$$

$\forall b \in A, [D, m_b]$ je k -dif. operator.

$$\text{red je } \leq n-1$$

$\leadsto \text{Diff}_k^n(A, A) \dots$ operatori reda n

Precostaj još pokazati univerzalni svojstvo
operatora $\text{Im} \dots \text{EGA} \dots$

Želimo kada imamo "ključni izomorfizam"
napišati teško vidljivi kao definiciju X -shemu $\mathcal{Y}$.

Želimo da X -shemu $\mathcal{Y}$ imamo svojstvo

da $\text{Hom}_{X\text{-shema}}(X, \mathcal{Y})$ su u principu

bijekci s $\text{Hom}_{A\text{-mod}}(P_{A/k}^n, A)$.

Ako je $\mathcal{Y} = \text{Spec}(B_{\mathcal{Y}})$ za neki A -algebru $B_{\mathcal{Y}}$

onda $\text{Hom}_{X\text{-sh}}(X, \mathcal{Y})$ odgovara homom.

A -algebru $B_{\mathcal{Y}} \rightarrow A$, pa "naivni" pokušaj

definirati gdje za $B_{\mathcal{Y}}$ uzimamo $P_{A/k}^n$ mi

dobivamo još manje trebaju moramo A -modulu.

Dahle, $P_{A/k}^m$ freies A/k -Modul S_A

symmetrischem algebra $\text{Sym}_A(P_{A/k}^m)$ kein

immer gleiche universeller gruppe:

u. nassen
sicht

$$M = P_{A/k}^m$$

Zu jedem kommutativen A -algebra C ✓
homomorphism A -algebra $\varphi: \text{Sym}(M) \rightarrow C$

ist eindeutig bestimmt φ homom. A -modul.

$f: M \rightarrow C$ ist Abbildung $f: M \rightarrow C$ se faktoriell
projektiv zu homom. A -alg. $\varphi: \text{Sym}_A(M) \rightarrow C$.

$$\text{Ist } \text{Hom}_{A\text{-alg}}(\text{Sym}_A(M), C) \cong \text{Hom}_{A\text{-mod}}(M, C).$$

$$\Rightarrow Y = \text{Spec}(\text{Sym}_A(P_{A/k}^m))$$

(d.h. Spec_A da bi möglich)

da $Y \rightarrow X$ X -schon.

Kako se Sym_A definira?

Neka je M A -modul. Ideja je

da je $\text{Sym}_A(M)$ "najslabodiji" A -algebra

generirana s A -modulom M .

Konstrukcija:

ni je komutativna

1. Neka je $T_A(M)$ tenzorska algebra

$$= \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes_A n}$$

2. Za komutativnost kvocientiramo s

dobivamo ideal I_S generiranim s

elementima oblika $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$

$$\forall m_1, m_2 \in M$$

Def. $\text{Sym}_A(M) = T_A(M) / I_S$

Primjer: Ako je M slobodni A -modul s bazom

$\{x_1, \dots, x_r\}$ onda je vrijedna simetrična
algebra izomorfna polinomijalnom prstenu
 $A[x_1, \dots, x_r]$.

Niji teško vidjeti da Sym_X ima
trivijalno univerzalno svojstvo.

Za ne-afin k -sheav X , $\mathbb{P}_{X/k}^n$ možemo
zamisliti sa kvazi-koherentnim snopom $\mathcal{O}_X$ -
modulima na X

$$\mathbb{P}_{X/k}^n = \Delta^* \left(\mathcal{O}_{X \times_k X} / \bigcap_{\Delta} \mathcal{I}_{\Delta}^{n+1} \right)$$

gdje je $\Delta: X \rightarrow X \times_k X$ diag. morfizam
sa snopom čilech $\mathcal{I}_{\Delta}$.

Stiče se definira $Y = \text{Spec}_{\mathcal{O}_X}(\text{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathbb{P}_{X/k}^n))$.