Kompaktifikacija prostora parametara:

Ako prostor parametara objekata koji nas zanimaju nije projektivan, da bi mogli koristiti metode teorije presjeka trebamo ga upotpuniti - i to često možemo napraviti na više načina. Točke koje dodajemo zovemo rubne točke. Želimo da točke koje dodajemo parametriziraju i dalje neke objekte koje razumijemo.

Problem pet konika

Neka je dano pet generičkih planarnih konika $C_1,..,C_5 \subset \mathbb{P}^2$.

Koliko glatkih konika $C \subset \mathbb{P}^2$ tangira svih pet?

1. pokušaj

$\wedge$
naivni

ne nužno nesingularni

a) Skup konika je parametriziran s $\mathbb{P}^5$. Lokus konika koji tangiraju C_i je ireducibilna hiperploha $Z_i \subset \mathbb{P}^5$. ako je C_i glatka

što to znači ako točka kontakta nije nesingularna?

uvjet je: $m_p(C, C_i) \geq 2$

$$\begin{tikzcd} m_p(C, C_i) \arrow[d, phantom, "\|"] \\ \dim \mathcal{O}_p / (f, g) \end{tikzcd}$$

prsten lokalnih funkcija u $p \in \mathbb{A}^2$ racionalni je kod kojih p nije nultočka nazivnika.

Izračunajmo jednadžbu te hiperplohe.

Neka su $\underset{a=}{}\overset{Q_a}{(a_0 : \dots : a_5)}$, $\overset{b=}{}\overset{Q_b}{(b_0 : \dots : b_5)} \in \mathbb{P}^5$ dvije konike. Izračunajmo kada se one diraju.

Neka su A i B matrice pridruženim kvadratnim formama, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_4 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \quad i \quad Q_a = [x, y, z]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

i slično za B.

Kako izgleda uvjet $m_p(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{Q_a}}, \overset{0}{\overset{\shortparallel}{Q_b}}) \geq 2$?

$$Q_a \in m_p^2 \quad u \quad \mathcal{O}_p/(Q_b)$$

To možemo zapisati kao

$$\begin{cases} Q_a(p) = 0 \\ Q_b(p) = 0 \\ \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \nabla Q_a(p) \\ \nabla Q_b(p) \end{pmatrix} < 2 \end{cases}$$

↙ zašto to vrijedi ako je p singularan?

↑ vrijedi li to?

Promotrimo pramen konika
(pencil of conics)

$$C_\lambda : \lambda Q_a + Q_b = 0$$

još ćemo pretp. da je Qa nesing. u p.

Lema: Postoji p u kojima se Q_a i Q_b tangiraju ako i samo ako postoji konika u pramenu koja je singularna u nekoj točki presjeka konika Q_a i Q_b.

Dokaz: Slijedi direktno iz prethodnog sustava.

Konici C_λ odgovara matrica $\lambda A + B$ te je ona singularna u nekoj točki ako i samo ako $\det(\lambda A + B) = 0$

Singularne konike su: ili unija dva različita pravca ili dvostruki pravac. Lako se provjeri da je determinanta degenerirane konike 0.

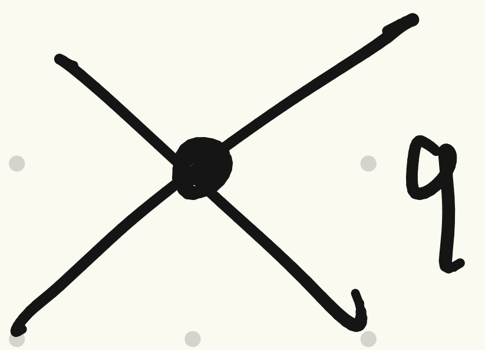
Kako prepoznati je li ta singularna točka ujedno i točka presjeka krivulja Q_a i Q_b?

Dokažite za d.z.: Pripadni λ mora biti dvostruka nultočka polinoma $\det(\lambda A+B)$

$\Rightarrow$ uvjet tangiranja u točki koja je nesingularna na $Q_a=0$ je $\mathrm{disc}_\lambda \det(\lambda A+B)=0$

uvjet u slučaju da je Q_a glatka.

Ako je Q_a unija dva različita pravca



onda svaka konika Q_b kroz q tangira Q_a.

Dakle, ako je C_i unija dva različita pravca, $Z_i \subset \mathbb{P}^5$ onda ima tri komponente

konike koje diraju svaki pravac posebno i konike koje prolaze kroz točku presjeka

Uočite da ako je jedna od konika dvostruki pravac, onda ona automatski tangira drugu. Tj. dvostruki pravci tangiraju sve konike.

Zašto je Z_i ireducibilna u slučaju kada je C_i glatka? Odnosno zašto je

$$\operatorname{disc}_x(\det(\lambda A+B))=0 \quad \text{ireduc.}$$

za $A=C_i$.

↑ polinom čiji su varijable elem. od B

nesing.

$$D=\{(C,p)\in \mathbb{P}^5\times C_i \mid C \text{ je konika tangencij. na } C_i \text{ u } p\}$$

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ Z_i & & C_i \end{tikzcd}$$

Vlakna od π_2 su linearni potprostori od $\mathbb{P}^5$ dimenzije 3 pa je D ireducibilan.

$\Rightarrow Z_i$ je ireducibilan.

dodaj li pridjev da ovo bude precizno

b) Stupanj od Z_i je 6 ako je C_i glatka.

Zašto? Promotrimo presjek od Z_i i generičkog pravca u $\mathbb{P}^5$ - odnosno ekvivalentno promotrimo koliko konika $D_t, t\in\mathbb{P}^1$ u pramenu konika određenom tim pravcem dira C_i. Promotrimo preslikavanje $C_i \to \mathbb{P}^1$ koje točki $P \in C_i$ pridružuje $t \in \mathbb{P}^1$ za koji je $P \in D_t$. Takav P je jedinstven jer se konike $\underset{\overset{\|}{t}}{D_{[t_0:s]}}$: $t_0 F + sG = 0$ sijeku u točkama sa kojima se F i G sijeku (a koji generički nisu na C_i).

za neke F i G koji određuju pravac

Lako se vidi da je to preslikavanje algebarsko, dano formulom

$$P \mapsto [G(P) : F(P)]$$

Preslikavanje je stupnja 4 i nas zanima broj točaka ramifikacije - prema Riemann-Hurwitzovoj formuli

$$2\cdot 0-2=4(2\cdot 0-2)+\sum_{P\in C_i}(e_P-1)$$

⇒ broj tangenti s kratnosti je 6

⇒ stupanj od C_i je 6

c) Naivno, ako je Z_i-ovi sijeku transverzalno $Z_1\cdot Z_2\cdot\ldots\cdot Z_5$ će imati $6^5=7776$ točaka u presjeku.

Ali ovo nije točno!

Z_i je zatvarač u $\mathbb{P}^5$ lokusa glatkih konika C koje tangiraju C_i. Posebno Z_i sadrži sve dvostruke pravce pa presjek Z_i-ova nije konačan - sadrži sve dvostruke pravce.

Ovaj problem ćemo riješiti tako što ćemo konstruirati drugačiju kompaktifikaciju prostora glatkih konika.

ako je $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}V$ onda je $\mathbb{P}^{n*} = \mathbb{P}V^*$

Potpune konike:

Def. Dual glatke konike $C \subset \mathbb{P}^2$ je skup svih tangenti na C na koje gledam kao na krivulju $C^* \subset \mathbb{P}^{2*}$.

Pokazat ćemo da je C^* isto glatka konika (gdje char $k \neq 2$).

Neformalna analiza:

Što se dešava s dualom konike kada se glatka konika degenerira u singularnu — dvostruki pravac ili uniju dva različita pravca?

Neka je $C \to B$ jednoparametarska familija konika s parametrom t, C_t je glatka za $t \neq 0$.

Pridruživanje $\underset{\substack{\in \\ B-\{0\}}}{t} \mapsto C_t \mapsto \underset{\substack{\subset \\ \mathbb{P}^{2*}}}{C_t^*} \in \mathbb{P}^{5*}$

se proširuje do B (jer je $\mathbb{P}^{5*}$ proper)

$\Rightarrow$ postoji dobro definirana konika $C_0^* = \lim_{t \to 0} C_t^*$

No limes ovisi o familiji $\mathcal{C}$ a ne samo o C_0, tj. C_0^* nije određen s krivuljom C_t

Realizirat ćemo skup glatkih konika U kao lokalno zatvoren podskup od $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$

Može se pokazati da je preslikavanje $C \mapsto C^*$ regularno na U pa je U izomorfan grafu preslikavanja $U \to \mathbb{P}^{5*}$, $C \mapsto C^*$, tj.

$$U = \{ (C, C^*) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*} \mid C \text{ je glatka konika u } \mathbb{P}^2 \text{ i } C^* \subset \mathbb{P}^{2*} \text{ je njezin dual} \}.$$

Tražimo kompaktifikaciju – mnogostrukost potpunih konika je zatvarač $X = \overline{U} \subset \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$.

Postoji 4 tipa točaka u X:

pokazat ćemo kasnije

Neka je $(C, C') \in X$.

a) $(C, C') \in U$, tj. C i C' su glatke konike i $C' = C^*$ $\rightarrow$ glatke potpune konike

b) $C = L \cup M$ ($L \neq M$ pravci) i $C' = 2p^*$ gdje je $p^* \subset \mathbb{P}^{2*}$ pravac dualan točki $p = L \cap M$

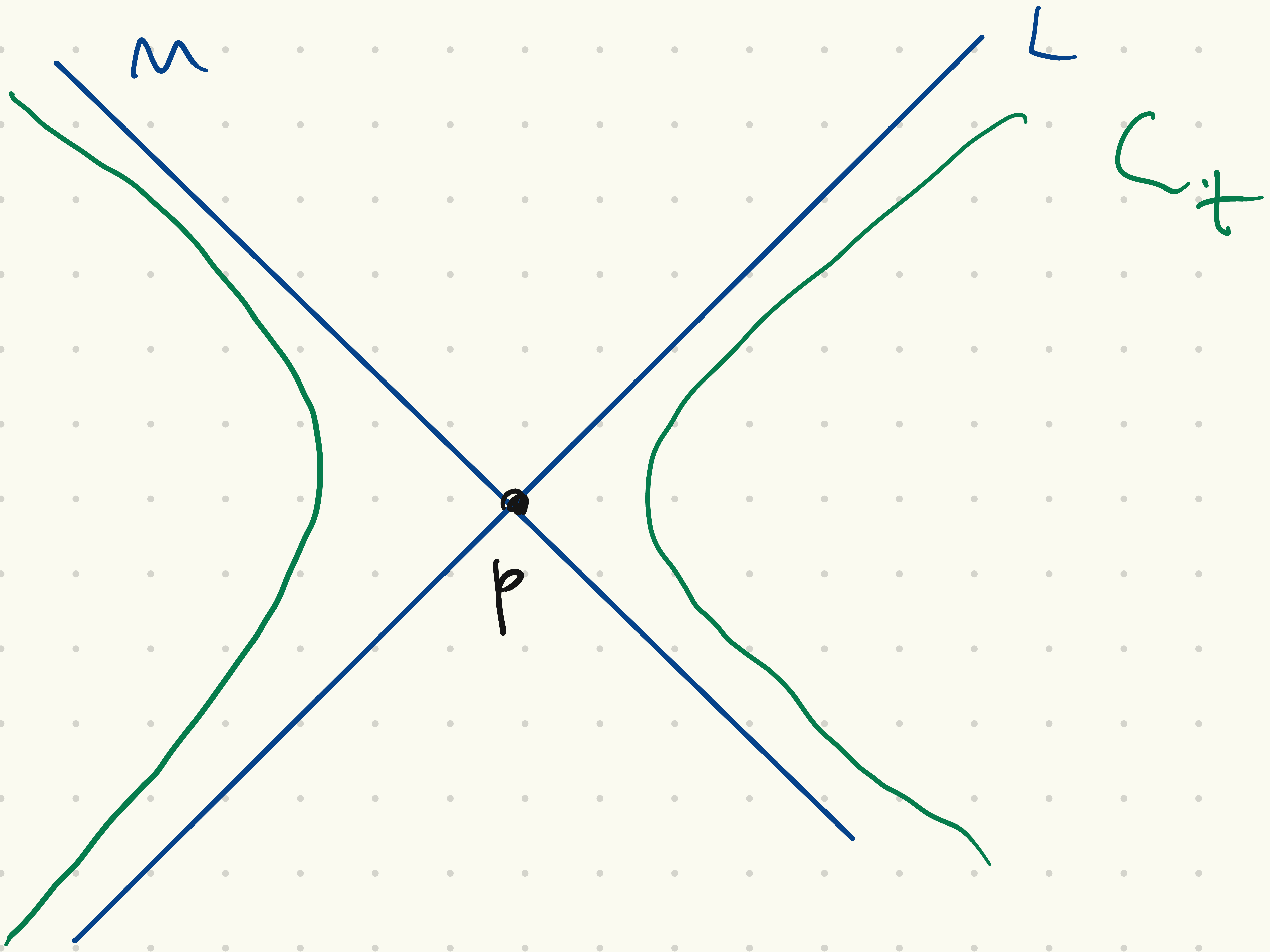
c) $C = 2L$ i $C' = p^* \cup q^*$ gdje su p^* i q^* pravci duali točkama $p, q \in L$

d) $C = 2L$ i $C' = 2p^*$ gdje je p^* pravac dualan točki $p \in L$.

Također vrijedi da je X nesingularna projektivna mnogostrukost.

Heuristički možemo ovako razmišljati:

Neka je $\{C_t\}$ familija glatkih konika čiji je limes u $t=0$ $C_0 = L \cup M$ unija dva različita pravca.



Svaka familija $\{L_t\}$ pravaca L_t koji su tangente na C_t "konvergira" u pravac L_0 kroz točku $p = L \cap M$ i obratno svaki pravac kroz p je limes nekih tangenti L_t.

Dakle C_0' je skup pravaca kroz p — $p^* \subset \mathbb{P}^{2*}$. No kako je C_0' konika slijedi da je $C_0' = 2p^*$.

Kako to dokazati?

Neka je V v.p. nad K ($\mathrm{char}\, K \neq 2$).

Sljedeće je ekvivalentno: $\varphi(v)(w) = \varphi(w)(v) \quad \forall\, v, w \in V$

- simetrično linearno preslikavanje $\varphi : V \to V^*$
- kvadratna forma $q : V \to K$
- element $q' \in \mathrm{Sym}^2(V^*)$

$\varphi : V \to V^* \rightsquigarrow q(x) = \varphi(x)(x)$

polinom stupnja 2

$\swarrow$

$q' \in \mathrm{Sym}^2(V^*)$ koji odg. tom polinomu

$\downarrow$

$Q \subset \mathbb{P}V \; ; \quad Q = V(q) = \{ v \in \mathbb{P}V \mid \varphi(v)(v) = 0 \}$

$\uparrow$ kvadrika.

Kvadrika $Q \subset \mathbb{P}V$ je glatka ako i samo ako je φ izomorfizam – preciznije singularne točke od Q odgovaraju projektivizaciji jezgre od φ. Rang od Q je rang linearnog preslikavanja φ.

Dual svake mnogostrukosti $X \subset \mathbb{P}^n$ se definira kao zatvarač u $\mathbb{P}^{n*}$ lokusa hiperravnina tangencijalnih na X

$\Rightarrow$ dual kvadrike ranga k ima dimenziju $k-2$

Kako u jeziku multilinearne algebre opisati dual od Q?

Propozicija: Neka je $Q \subset \mathbb{P}V = \mathbb{P}^n$ kvadrika pridružena simetričnom preslikavanju $\varphi : V \to V^*$ i neka je $v \in V$ nenul vektor t.d. $\langle \varphi(v), v \rangle := \varphi(v)(v) = 0$, tj. $v \in Q$. Tangencijalna hiperravnina na Q u v je

$$T_v Q = \{ w \in \mathbb{P}(V) \mid \langle \varphi(v), w \rangle = 0 \}$$

Dual od Q je onda

$$Q^* = \{ \varphi(v) \in \mathbb{P}(V^*) \mid v \in Q \text{ i } \varphi(v) \neq 0 \}.$$

Posebno, ako je Q nesingularna (tj. rang od φ je $n+1$) onda Q^* je slika $\varphi(Q)$

po induciranom preslikavanju $\varphi: \mathbb{P}V \to \mathbb{P}V^*$ i

Q^c je kvadrika koja odgovara kofaktorskom

preslikavanju φ^c.

↙ što je to?   za $\varphi: V \to W$, $\varphi^c: W \to V$

$\dim V = \dim W = n+1$

preslikavanje koje se javlja kod računanja inverza

preko minora → $\varphi \circ \varphi^c = \det(\varphi)\, I_W$

$\varphi^c \circ \varphi = \det(\varphi)\, I_V$

φ^c je kompozicija

$$W \simeq \Lambda^n W^* \xrightarrow{\Lambda^n \varphi^*} \Lambda^n V^* \simeq V$$

↙

$W = \langle w_0, \dots, w_n \rangle$

$\Lambda^n W = \langle \hat{w}_0, \dots, \hat{w}_n \rangle$ gdje je

$w_i \mapsto \hat{w}_i$ $\hat{w}_i = w_0 \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{i-1} \wedge w_i \dots \wedge w_n$

ili koristi samo odabir volumne forme $\omega \in \Lambda^{n+1} W^*$

za $w \in W$ definiramo funkcional na $\Lambda^n W$

$$\Lambda^n W \xrightarrow{\wedge w} \Lambda^{n+1} W \xmapsto{\omega} K$$ koji

? inducira element iz $\Lambda^n W^*$

Korolar: Ako su Q i Q' glatke kvadrike tada Q i Q' imaju zajedničku tangentu (hiperravninu) $\ell=0$ u nekoj točki presjeka $v \in Q \cap Q'$ ako i samo ako Q^* i Q'^* imaju zajedničku tangencijalnu hiperravninu $v=0$ u točki presjeka $\ell \in Q^* \cap Q'^*$.

Dokaz: Pretp. da Q i Q' odgovaraju simetričnim preslikavanjima φ i ψ. Budući da su im tangenc. hiperravni u v jednake prethodna propoziciji implicira $\varphi(v) = \psi(v) \in Q^* \cap Q'^*$.

Pokažimo da se Q^* i Q'^* dodiruju u $\varphi(v)$.

$$T_{\varphi(v)} Q^* = \{ w \in \mathbb{P}(V^*) \mid \varphi^c(\varphi(v))(w) = 0 \}$$

(gdje smo identificirali V^{**} s V (kanonski).

$$\to T_{\varphi(v)} Q^* = \mathbb{P} \ker v = \mathbb{P}(\{ w \in V^* \mid w(v) = 0 \})$$

↑ ne ovisi o φ

$$T_{\psi(v)} Q'^* = \mathbb{P} \ker v$$

↑ tangencijalni prostori su jednaki

■

Ovaj korolar nam kaže da možemo identificirati divizor $Z_D \subset X$ (D je glatka ravninska konika) koji je zatvarač skupa potpunih konika (C, C') gdje je C glatka i tangira D sa slično definiranim divizorom za dualnu koniku D^*.

Vratimo se sada konikama u $\mathbb{P}^2$, $\dim V = 3$.

Propozicija: Mnogostrukost

$$X \subset \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V^*) \times \mathbb{P}(\mathrm{Sym}^2 V) = \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$$

potpunih konika je glatka i ireducibilna.

Identificirajmo $(\varphi, \psi) \in \mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^{5*}$ točke s parovima simetričnih matrica $\varphi : V \to V^*$ $\psi : V^* \to V$, shema X je definirana s idealom I generiranim s 8 bilinearnih jednadžbi koje odgovaraju da produkt $\psi \circ \varphi$ ima diag. elemente jednake (2 jednadžbe) i ne diag. elemente jednake nuli. (6 jednadžbi).

Rješenje problema: Svakoj glatkoj konici $D \subset \mathbb{P}^2$ pridružim divizor $Z = Z_D \subset X$ koji se definira kao zatvarač u X lokusa točaka $(C, C^*) \in X$ gdje je C glatka konika koja dira D.

Neka je $\xi = [Z_D] \in A^1(X)$ odgovarajuća klasa u Chowovom prstenu.

Kako izgleda presjek $Z_{D_1} \cap Z_{D_2}$?

Opišimo prvo točke tipa b) koje se nalaze u Z_D za glatku koniku D. Neka je $(C, C') \in X$ gdje je $C = L \cup M$.

Kako možemo razmišljati o točkama iz zatvarača koji nisu u U kao o limesu točaka iz U?