Izračunljivost

POPRAVNI KOLOKVIJ

23. lipnja 2010.

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) RAM–izračunljiva funkcija

[1] (b) μ–operator

[1] (c) indeks funkcije

[1] (d) klasa parcijalno rekurzivnih funkcija

[1] (e) Σ_n^0–relacija

[1] (f) nedeterministički konačni automat

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

[1] (a) Kleenijev teorem o normalnoj formi za parcijalno rekurzivne funkcije

[1] (b) teorem rekurzije

[1] (c) teorem o fiksnoj točki

[1] (d) Riceov teorem

[1] (e) Churchovu tezu

[1] (f) teorem o grafu

[4] 3. Dokažite da je klasa RAM–izračunljivih funkcija zatvorena za primitivnu rekurziju.

[4] 4. Dokažite Riceov teorem.

5. Napišite RAM-stroj koji izračunava funkciju

[3] (a) $f\colon \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 0$;

[5] (b) $g\colon 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x$. $(2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\})$

[8] 6. Za prirodni broj n, sa $\varphi(n)$ označimo broj prirodnih brojeva manjih ili jednakih n koji su relativno prosti s n. Dokažite da je Eulerova funkcija $x \mapsto \varphi(x)$ primitivno rekurzivna.

[5] 7. Neka je $e = 2^{181} \cdot 3^{2701} \cdot 5^7 \cdot 7^7$. Odredite domenu i sliku funkcije $\{e\}^2$. U ovom zadatku promatramo RAM-strojeve kod kojih su svi registri (osim ulaznih) inicijalno postavljeni na 0.

[6] 8. Neka je S rekurzivan podskup od $\mathbb{N}$. Dokažite ili opovrgnite: postoji parcijalno rekurzivna funkcija f takva da je $\mathrm{dom}\,(f) = \mathrm{rng}\,(f) = S$.

9. Dokažite da sljedeći skupovi nisu rekurzivni:

[3] (a) $\{e \in \mathbb{N} \mid \{e\}^1 \text{ je konstantna funkcija }\}$;

[5] (b) $\{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \mathrm{dom}\,(\{a\}^1) = \mathbb{N} \setminus \{b\}\}$.

[5] 10. Navedite pet primjera funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{N}$ koje nisu rekurzivne.

Kodiranje instrukcija RAM-stroja:

$$\begin{aligned}\texttt{INC}\ \mathcal{R}_i &\mapsto \langle 0, i\rangle\\ \texttt{DEC}\ \mathcal{R}_i, n &\mapsto \langle 1, i, n\rangle\\ \texttt{GOTO}\ n &\mapsto \langle 2, n\rangle\end{aligned}$$

U zadatku 6 bez dokaza se smijete pozvati na činjenicu da su sljedeće funkcije primitivno rekurzivne:

- $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- $\mathrm{dijeli} \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; $\mathrm{dijeli}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x|y, \\ 0, & \text{inače;} \end{cases}$
- $+, \cdot, \dot{-} \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$;
- $\max, \min \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$;

kao i sljedeći teorem:

Teorem: Neka su $\alpha, \beta \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ zadane formulama

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 0 & \text{inače;} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g(\vec{x}) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 1 & \text{inače;} \end{cases}$$

primitivno rekurzivne.