Izračunljivost

PRVI KOLOKVIJ

12. travnja 2010.

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) ekvivalentni programi za RAM–stroj,

[1] (b) klasa primitivno rekurzivnih funkcija,

[1] (c) rekurzivan skup.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

[1] (a) primitivna rekurzivnost konačnih suma,

[1] (b) rekurzivnost funkcije definirane kontrakcijom,

[1] (c) rekurzivnost funkcije definirane simultanom primitivnom rekurzijom.

[4] 3. Dokažite da je svaki konačan skup rekurzivan.

[5] 4. Neka je $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x - y = 2\}$. Napišite program za RAM stroj koji izračunava funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$ zadanu sa $f(x, y) = 1$.

[5] 5. Napišite program za makro stroj koji izračunava funkciju $f\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadanu sa $f(x, y) = \min\{x + y, xy, x^y\}$. (Napomena: $0^0 = 1$.)

[5] 6. Neka je funkcija $zn\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ zadana sa

$$zn(n, i, b) := \begin{cases} \text{znamenka koja se u zapisu broja } n \text{ u bazi } b \text{ nalazi } i\text{-toj poziciji} & \text{, ako je } b \geqslant 2, \\ n & \text{, inače.} \end{cases}$$

Dokažite da je zn primitivno rekurzivna funkcija. (Napomena: pozicije znamenaka brojimo s desna na lijevo počevši od 0, npr. u zapisu $(123456)_{10}$ na poziciji 2 nalazi se znamenka 4.)

[5] 7. Neka je funkcija $zz\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ zadana sa

$$zz(n, b) := \begin{cases} \text{zbroj znamenaka broja } n \text{ u bazi } b & \text{, ako je } b \geqslant 2, \\ n & \text{, ako je } b = 1, \\ 0 & \text{, ako je } b = 0. \end{cases}$$

Dokažite da je zz primitivno rekurzivna funkcija. (Napomena: u ovom zadatku smijete koristiti činjenicu da je funkcija zn iz prethodnog zadatka primitivno rekurzivna.)

[5] 8. Dokažite da je skup prirodnih brojeva koji imaju točno tri prosta djelitelja primitivno rekurzivan. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Napomene:

- Zadatke predajete razdvojene na dvije hrpe – $\{1, 2, 3\}$ i $\{4, 5, 6, 7, 8\}$.
- Zadatke 1, 2 i 3 pišite na *jednom* papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno imati nikakva pomagala osim pribora za pisanje.
- Na poleđini je navedeno što smijete koristiti u zadacima 5, 6, 7 i 8.

Makroi koje smijete koristiti u 5. zadatku:

- ZERO $\mathcal{R}_k$,
- MOVE $\mathcal{R}_i$ TO $\mathcal{R}_j$ USING $\mathcal{R}_k$,
- $\mathcal{R}_k \leftarrow \mathcal{R}_i \star \mathcal{R}_j$, pri čemu je $\star \in \{+, \dot{-}, \cdot\}$.
- $\mathcal{R}_k \leftarrow {\mathcal{R}_i}^{\mathcal{R}_j}$.

U zadacima 6, 7 i 8 bez dokaza se smijete pozvati na činjenicu da su sljedeće funkcije primitivno rekurzivne:

- $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
- $\mathrm{ost}\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; $\mathrm{ost}(x, y) = \begin{cases} \text{ostatak pri dijeljenju } x \text{ sa } y, & \text{ako je } y > 0, \\ x, & \text{ako je } y = 0. \end{cases}$
- $+, \cdot, \dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

Također se možete pozvati i na primitivnu rekurzivnost skupa prostih brojeva.

U zadacima 6, 7. i 8. smijete koristiti i sljedeći teorem.

Teorem: Neka su $\alpha, \beta\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h\colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f, g\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ zadane formulama

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 0 & \text{inače;} \end{cases} \quad \text{i} \quad g(\vec{x}) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 1 & \text{inače;} \end{cases}$$

primitivno rekurzivne.