Izračunljivost

PRVI KOLOKVIJ

24. travnja 2009.

1. Definirajte sljedeće pojmove:

[1] (a) RAM-izračunljiva funkcija,

[1] (b) μ-operator,

[1] (c) klasa parcijalno rekurzivnih skupova.

2. Iskažite sljedeće tvrdnje:

[1] (a) veza makro i RAM-strojeva,

[1] (b) definicija rekurzivnih funkcija po slučajevima,

[1] (c) rekurzivnost funkcije definirane simultanom primitivnom rekurzijom.

[4] 3. Dokažite da je klasa RAM-izračunljivih funkcija zatvorena na μ-operator.

[5] 4. Neka je $S = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 < x < y\}$. Napišite program za RAM stroj koji izračunava funkciju $f\colon S \to \mathbb{N}$ zadanu sa $f(x, y) = x - 1$.

[5] 5. Napišite program za makro stroj koji izračunava funkciju $f\colon \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ zadanu sa $f(x, y, z) = \max\{x + y, x + z, y + z\}$.

[5] 6. Konstruirajte Turingov stroj koji odlučuje jezik $L = \{a^m b^n c^{m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ nad alfabetom $\Sigma = \{a, b, c\}$. Početnu poziciju glave stroja možete proizvoljno odabrati.

[5] 7. Dokažite da je skup prostih brojeva primitivno rekurzivan skup. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

[5] 8. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{N}$ primitivno rekurzivni skupovi. Dokažite da su skupovi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ i $A \times B$ također primitivno rekurzivni. Svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

Napomene:

- Zadatke predajete razdvojene na dvije hrpe – $\{1, 2, 3\}$ i $\{4, 5, 6, 7, 8\}$. Zadaci unutar jedne hrpe ne moraju nužno biti svaki na svom papiru.
- Na kolokviju nije dopušteno imati nikakva pomagala osim pribora za pisanje.
- Na poleđini je navedeno što smijete koristiti u zadacima 5., 7. i 8.
- Mobiteli nisu dozvoljeni niti kao zamjena za sat. Molimo da ih ugasite i odložite sa strane.

Makroi koje smijete koristiti u 5. zadatku:

- ZERO $\mathcal{R}_k$,
- MOVE $\mathcal{R}_i$ TO $\mathcal{R}_j$ USING $\mathcal{R}_k$,
- $\mathcal{R}_k \leftarrow \mathcal{R}_i \star \mathcal{R}_j$, pri čemu je $\star \in \{+, \dot{-}, \cdot\}$.

U zadacima 7. i 8. bez dokaza se smijete pozvati na činjenicu da su sljedeće funkcije primitivno rekurzivne:

- $\mathrm{sg}, \overline{\mathrm{sg}} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,
- $\mathrm{ost} \colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$; $\mathrm{ost}(x, y) =$ ostatak pri dijeljenju x sa y,
- $+, \cdot, \dot{-} : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$.

U zadacima 7. i 8. smijete koristiti i sljedeći teorem.

Teorem: Neka su $\alpha, \beta \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ i $h \colon \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ primitivno rekurzivne funkcije. Tada su i funkcije $f, g \colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ zadane formulama

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} \sum\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 0 & \text{inače;} \end{cases} \qquad \text{i} \qquad g(\vec{x}) = \begin{cases} \prod\limits_{i=\alpha(\vec{x})}^{\beta(\vec{x})} h(\vec{x}, i) & \text{ako je } \alpha(\vec{x}) \leqslant \beta(\vec{x}), \\ 1 & \text{inače;} \end{cases}$$

primitivno rekurzivne.