

Male tajne iz geometrije

Zadatak 1. Neka su A i B bilo koje dvije točke, te $k \neq 1$ pozitivan realan broj. Dokaži da je geometrijsko mjesto točaka P takvih da je

$$\frac{PA}{PB} = k$$

kružnica čije središte leži na pravcu AB .

Zadatak 2. Neka su nad stranicama konveksnog četverokuta konstruirani kvadrati. Dokaži da su spojnice središta nasuprotnih kvadrata okomite i jednake duljine.

Zadatak 3. Neka su BE i CF visine u trokutu ABC , a H njegov ortocentar. Dokaži da je $AH \sin \alpha = EF$.

Zadatak 4. Neka je $ABCD$ četverokut takav da je $AB = BC = CA$, te da je $\angle CDA = 120^\circ$. Dokaži da je $BD = AD + CD$.

Zadatak 5. Neka su dijagonale četverokuta $ABCD$ okomite, a točka D' takva da je $AD = AD'$ i $CD = CD'$. Dokaži da je D' ortocentar trokuta ABC ako i samo ako je četverokut $ABCD$ tetivan.

Zadatak 6. Neka su E, F odabrane na stranicama BC i AC ($BC \neq AC$) redom takve da je

$$BE \cdot CF \cdot AC = BC \cdot CE \cdot AF.$$

Neka je S presjek AE i BF . Dokaži da je $FS = ES$ ako i samo ako je četverokut $SECF$ tetivan.

Zadatak 7. Neka je $AEBD$ tetivan četverokut takav da je $\angle E + \angle B < 180^\circ$, a točka F na pravcu BE takva da je $FD = ED$. Neka je C presjek pravaca BD i AE , a G presjek pravaca CE i FD , te neka vrijedi $BA^2 = BD \cdot BC$. Dokaži da su trokuti EFC i EGB slični.

Zadatak 8. Neka je H ortocentar trokuta ABC , te neka je točka A' presjek kružnice opisane polovištima trokuta ABC (P_1, P_2, P_3) i pravca AH koja je bliža točki A . Dokaži da je $A'P_2 = \frac{1}{2}HC$, te da je $\angle P_3A'H = \angle ACB$.

Zadatak 9. Neka su P, Q redom polovišta baza AB i CD trapeza $ABCD$. Dokaži da se pravci AD, BC i PQ sijeku u jednoj točki, te da su P, Q i sjecište dijagonala trapeza kolinearne točke.

Zadatak 10. Dokaži da su u svakom trokutu ortocentar, središte opisane kružnice i težište kolinearne točke.