Tetivni četverokut

Matija Bašić

kolovoz 2016.

Priprema

- Zadaci na zadanu temu s natjecanja u prethodnim godinama
- Dodatni materijali iz literature
- Samostalno rješavanje zadataka (prvo nastavnika, kasnije učenika)
- Analiza predznanja i potrebnih pojmova (na primjer, znaju li učenici dokazati da se simetrale stranica sijeku u jednoj točki ili karakterizirati tetivni četverokut koristeći obodne kutove)
- Strategija za predavanje - odabir zadataka za predavanje i analiza ključnih koraka u zadacima

Klasični zadaci (vježbe iz Elementarne geometrije, PMF)

1. Dokažite da se simetrala unutarnjeg kuta trokuta i simetrala nasuprotne stranice sijeku na opisanoj kružnici trokuta.

   Napomena: Promjena perspektive - umjesto da dokazujemo da se presjek pravaca p i q nalazi na kružnici k, dokazujemo da se presjek pravca p i kružnice k nalazi na pravcu q. Tvrdnja iz zadatka vrlo je bitna u rješavanju mnogih složenijih zadataka.

2. Neka su A_1, B_1, C_1 nožišta visina trokuta ABC. Dokažite da je ortocentar trokuta ABC središte kružnice upisane trokutu $A_1B_1C_1$.

   Napomena: Vrlo dobar zadatak za postupno vođenje učenika do rješenja. Ključno je uočiti tetivne četverokute na temelju dva nasuprotna prava kuta, te računati kutove (angle chasing).

3. Neka je H ortocentar trokuta ABC. Dokažite da su kružnice opisane trokutima ABC, HBC, ABH i CAH međusobno sukladne.

   Napomena: Poznata činjenica: osnosimetrična slika ortocentra obzirom na stranicu leži na opisanoj kružnici trokuta. Vrlo elegantno korištenje simetrije.

4. Neka su A i B točke na kružnici k i neka je t tangenta na kružnicu u točki A. Dokažite da je kut između tangente t i tetive $\overline{AB}$ jednak obodnom kutu nad tom tetivom.

   Napomena: Ovo je poznata činjenica koju nazivamo teorem o kutu tetive i tangente. Koristi se u mnogim složenijim zadacima.

5. Dokažite da je duljina visine trapeza kojemu se može upisati i opisati kružnica jednaka geometrijskoj sredini duljina njegovih osnovica.

   Napomena: Lagan zadatak koji je idealan za ponavljanje više pojmova. Ponoviti kako dokazujemo da je četverokut tangencijalan ako i samo ako su zbrojevi duljina nasuprotnih stranica jednaki (koristeći jednakost duljina odsječaka tangenti). Može se povezati s izvodom formule za udaljenost vrha i dirališta upisane kružnice u trokutu.

6. Neka je $\overline{AB}$ zajednička tetiva dviju kružnica. Pravac kroz A siječe jednu kružnicu još u točki C, a drugu još u točki D. Tangente u točkama C i D (na odgovarajuće kružnice) sijeku se u točki M. Dokažite da je $BCMD$ tetivni četverokut.

   Napomena: Lagan zadatak za vježbanje uočavanja tetivnih četverokuta (angle chasing).

7. Zadane su kružnica k i točka M unutar nje. Ako se točkom M povuku dvije međusobno okomite tetive kružnice k, dokažite da je zbroj kvadrata duljina tih tetiva konstantan.

   Napomena: Netrivijalna ideja: promatrati promjere koji su paralelni danim tetivama. Vrlo korisna diskusija o invarijantnosti neke veličine bez obzira na promjenu konfiguracije (točke M).

8. Simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ u trokutu ABC siječe nasuprotnu stranicu u točki S. Točka T je polovište stranice $\overline{BC}$. Kružnica opisana trokutu AST siječe stranicu $\overline{AB}$ u točki D, a stranicu $\overline{AC}$ u točki E. Dokažite da je $|BD| = |CE|$.

   Napomena: Povezivanje teorema o simetrali kuta i korištenja potencije točke obzirom na kružnicu. Idealan zadatak za vježbanje strategije kombiniranja rješavanja unatrag i unaprijed.

9. Neka je D polovište stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC i neka je E točka na stranici $\overline{AC}$ takva da je $\sphericalangle EDA = \sphericalangle ABC$. Točkom E povučena je paralela s $\overline{BC}$ koja siječe $\overline{AD}$ u točki F. Dokažite da je $|AF| \cdot |DF| = |EF|^2$.

   Napomena: Koristimo potenciju točke obzirom na kružnicu. Koju kružnicu?

10. Na kružnici polumjera r, s različitih strana njezina promjera $\overline{AB}$ dane su točke C i D takve da je $\sphericalangle DAB = 30°$ i $\sphericalangle CAB = 45°$. Odredite $|CD|$.

    Napomena: Pogodno za diskusiju o jednakokračnom pravokutnom trokutu i polovini jednakostraničnog trokuta (može biti uvod u trigonometriju). Dobar primjer za uvođenje Ptolomejevog teorema.

11. Neka je $ABCD$ kvadrat i neka je M točka na manjem luku $\widehat{AB}$ kružnice opisane tom kvadratu. Dokažite da

    $$\frac{|AM| + |BM|}{|CM| + |DM|}$$

    ne ovisi o položaju točke M.

    Napomena: Koristimo Ptolomejev teorem. Ponovno, diskusija o invarijantnosti neke veličine bez obzira na promjenu konfiguracije (točke M).

12. Dan je trokut ABC. Simetrale kutova $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$ sijeku njegovu opisanu kružnicu u točkama P, Q, R redom. Dokažite da je $|AP| + |BQ| + |CR|$ veće od opsega trokuta.

    Napomena: Složen zadatak u kojem je potrebno iskoristiti Ptolomejev teorem i nejednakost trokuta.

Zadaci s domaćih natjecanja

1. Neka je O središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta ABC, te neka je N nožište visine iz vrha A. Dokaži da je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle CAO$. *(školsko 2015, 2.r.)*

2. Točke A, B, C, D, E leže tim redom na kružnici čiji je promjer $\overline{AE}$. Odredi $\angle ABC + \angle CDE$. *(školsko 2016, 2.r.)*

3. Neka je $ABCDEF$ šesterokut upisan u kružnicu. Dužina $\overline{BE}$ siječe dužinu $\overline{AC}$ u točki G, a dužinu $\overline{DF}$ u točki H. Ako je $|CG| = |HG| = 3$, $|BG| = |HD| = 2$ i $|HF| = 5$, odredi $|AC|$. *(školsko 2016, 4.r.)*

4. Na kružnici k nalaze se točke A i B, a na manjem luku $\widehat{AB}$ točka P. Neka su Q i R točke na k, različite od P, takve da je $|AP| = |AQ|$ i $|BP| = |BR|$. Neka je T sjecište pravaca AR i BQ. Dokaži da su pravci PT i AB međusobno okomiti. *(županijsko 2016, 2.r.)*

5. Jednakokračni trokut ABC ($|AB| = |AC|$) upisan je u kružnicu k. Neka je D točka na osnovici $\overline{BC}$ tog trokuta, k_1 kružnica opisana trokutu ABD i E točka na kružnici k_1. Pretpostavimo da pravac AE siječe kružnicu k u točkama A i F tako da F leži između A i E. Ako se pravci DE i BF sijeku u točki G, dokaži da vrijedi $|EG| = |GF|$. *(županijsko 2016, 3.r.)*

6. U šiljastokutnom trokutu ABC u kojem je $|AB| < |AC|$, točka D leži na stranici $\overline{BC}$. Okomica iz točke B na pravac AD siječe kružnicu opisanu trokutu ABD u točkama B i E. Ako su pravci DE i AC međusobno okomiti, dokaži da je AD simetrala kuta $\sphericalangle BAC$. *(županijsko 2016, 4.r.)*

7. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi $\sphericalangle BAD = 50°$, $\sphericalangle ADB = 80°$ i $\sphericalangle ACB = 40°$.

    Ako je $\sphericalangle DBC = 30° + \sphericalangle BDC$, izračunaj $\sphericalangle BDC$. *(županijsko 2015, 3.r.)*

8. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B. Pravac l siječe kružnicu k_1 u točkama C i E, a kružnicu k_2 u točkama D i F tako da se točka D nalazi između C i E, a točka E između D i F. Pravci CA i BF sijeku se u točki G, a pravci DA i BE u točki H.

    Dokaži da je $CF \parallel HG$. *(državno 2015, 1.r.)*

9. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice sa središtem O. Na kružnici je dana točka C takva da je OC okomito na AB. Na kraćem luku $\widehat{BC}$ odabrana je točka P. Pravci CP i AB sijeku se u točki Q, a točka R je sjecište pravca AP i okomice kroz Q na pravac AB.

    Dokaži da je $|BQ| = |QR|$. *(državno 2014, 1.r.)*

10. Neka su p i q dva paralelna pravca. Kružnica k dodiruje pravac p u točki A i siječe pravac q u različitim točkama B i C. Neka je T točka na pravcu p i neka dužine $\overline{TB}$ i $\overline{TC}$ sijeku kraći luk $\widehat{AC}$ redom u točkama K i L, različitima od B i C.

    Dokaži da pravac KL prolazi polovištem dužine $\overline{AT}$. *(državno 2014, 2.r.)*

11. Neka je $ABCD$ konveksni četverokut takav da vrijedi

    $$\sphericalangle BAD = 90^\circ, \qquad \sphericalangle BAC = 2\sphericalangle BDC \quad \text{i} \quad \sphericalangle DBA + \sphericalangle DCB = 180^\circ.$$

    Odredi mjeru kuta $\sphericalangle DBA$. *(državno 2014, 4.r.)*

12. U konveksnom četverokutu $ABCD$ vrijedi

    $$\angle BAC = 48^\circ, \qquad \angle CAD = 66^\circ, \qquad \angle CBD = \angle DBA.$$

    Odredi kut $\angle BDC$. *(državno 2016, 4.r.)*

Zadaci s priprema MEMO ekipe

1. Neka je $ABCD$ tetivni četverokut i neka se pravci AB i CD sijeku u točki E. Točka F je centralno simetrična slika točke C obzirom na točku E. Dokaži da su pravci AF i BD okomiti ako i samo ako su pravci AB i CD okomiti. *(Revista Math. Timisoara 1986)*

2. Neka je ABC šiljastokutni trokut u kojem je $|AB| \neq |AC|$. Kružnica s promjerom $\overline{BC}$ siječe stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ u točkama M i N, redom. Neka je O polovište stranice $\overline{BC}$. Simetrale kutova $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle MON$ sijeku se u točki R. Dokaži da se kružnice opisane trokutima BMR i CNR sijeku na stranici $\overline{BC}$. *(IMO 2004)*

3. Neka je $ABCDE$ konveksan peterokut takav da je $BC||AE$, $|AB| = |BC| + |AE|$ i $\sphericalangle ABC = \sphericalangle CDE$. Neka je M polovište dužine $\overline{CD}$ i neka je O središte opisane kružnice trokutu BCD. Ako je $\sphericalangle DMO = 90^\circ$, dokaži da je $2\sphericalangle BDA = \sphericalangle CDE$. *(shortlist 2010)*

4. Neka je O središte upisane kružnice, a H ortocentar ššiljastokutnog trokuta ABC. Dokaži da postoje točke D, E, F na stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ redom, tako da vrijedi

    $$|OD| + |DH| = |OE| + |EH| = |OF| + |FH|$$

    i da su pravci AD, BE i CF konkurentni. *(shortlist 2000)*

5. Neka su Ω i O opisana kružnica i središte opisane kružnice šiljastokutnom trokutu ABC uz $|AB| > |BC|$. Simetrala kuta $\sphericalangle ABC$ siječe Ω u točki $M \neq B$. Neka je Γ kružnica s promjerom $\overline{BM}$. Simetrale kutova $\sphericalangle AOB$ i $\sphericalangle BOC$ sijeku Γ u točkama P i Q, redom. Točka R je odabrana na pravcu PQ tako da je $|BR| = |MR|$. Dokaži da je $BR||AC$. *(shortlist 2014)*

6. Neka je H ortocentar trokuta ABC, a D polovište stranice BC. Pravac kroz H siječe stranice AB i AC u točkama F i E redom tako da je $AE = AF$. Polupravac DH siječe opisanu kružnicu trokutu ABC u točki P. Dokaži da točke P, A, E, F leže na jednoj kružnici. *(Kina, 2010)*